A VOS STYLOS

PROBLÈME 22

Énoncé

Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ indéfiniment dérivable, telle que, pour tout x rationnel, la dérivée $n^{\text{ième}}$ $f^{(n)}(x)$ soit un rationnel pour n pair et un irrationnel pour n impair ?

Solution

Voici comment on peut fabriquer une telle fonction. Soit $j \longmapsto r_j$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$; nous allons voir qu'il est possible de construire une suite de fonctions indéfiniment dérivables f_j telles que

a) pour $n \leq j$, $|f_j^{(n)}| \leq 2^{-j}$;
b) pour $i < j$, f_j est nulle au voisinage de r_i ;
c) $(f_0 + \ldots + f_j)^{(n)}(r_j)$ est rationnel pour n pair et irrationnal pour n impair.

Une fois établie l'existence de ces f_j, il suffira de poser $f = \sum_j f_j$; grâce à la majoration a), chacune des séries $\sum_j f_j^{(n)}$ sera uniformément convergente, donc f sera indéfiniment dérivable et $f^{(n)} = \sum_j f_j^{(n)}$. La condition b) entraînera $f^{(n)}(r_i) = \sum_j f_j^{(n)}(r_i) = (f_0 + \ldots + f_i)^{(n)}(r_i)$ et c) assurera donc la propriété cherchée.

La construction de f_j se fait par récurrence : j est fixé dans la suite, et, si $j \neq 0$, nous supposons déjà construites les f_i pour $i < j$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle $I = [r_j - \varepsilon, r_j + \varepsilon]$ ne contienne aucun des r_i tels que $i < j$; soit φ une fonction indéfiniment dérivable nulle hors de I et égale à 1 au voisinage de r_j ; soit α tel que $|\varphi^{(n)}| \leq \alpha$ pour tout $n \leq j$; appelons λ l'inverse de $4^j e^\varepsilon \alpha$. Choisissons des nombres a_n tels que $|a_n| < \lambda$ et que $a_n + (f_0 + \ldots + f_{j-1})^{(n)}(r_j)$ soit rationnel si et seulement si n est pair. La fonction entière $g(x) = \sum_n a_n \frac{(x-r_j)^n}{n!}$ vérifie $|g^{(n)}| < \lambda e^\varepsilon$ sur I, donc, par la formule de Leibnitz,

$$|(g\varphi)^{(n)}| \leq 2^n \lambda e^\varepsilon \alpha \leq 2^{-j} \text{ pour } n \leq j.$$

En posant $f_j = g\varphi$, la condition a) est ainsi établie, b) est satisfaite car φ est identiquement nulle au voisinage des r_i et c) est vérifiée car $f_j \equiv g$ au voisinage de r_j et $g^{(n)}(r_j) = a_n$.

REMARQUE : Plus généralement, étant donnés un ensemble dénombrable $C \subset \mathbb{R}$ et, pour chaque $x \in C$ et pour chaque $n \in \mathbb{N}$, un ensemble dense $D_{x,n} \subset \mathbb{R}$, la même construction fournit une fonction f indéfiniment dérivable vérifiant $f(x)^{(n)} \in D_{x,n}$ pour tout $x \in C$ et tout n.

PROBLÈME 23

Énoncé (proposé par J.-M. Nagel)

Dans un jeu de 52 cartes battu, quelle est la probabilité pour qu'une dame et un roi soient voisins immédiats?

Indication

Cas où toutes les cartes du jeu sont des dames et des rois.

PROBLÈME 24

Énoncé

Un faisceau de droites parallèles fournit un exemple de partition du plan en droites.

a) Existe-t-il une partition du plan en cercles (non dégénérés, c'est-à-dire de rayon ni nul ni infini)?

b) Existe-t-il une partition du plan en figures formées chacune de deux cercles (distincts et non dégénérés) tangents intérieurement ou extérieurement?

PROBLÈME 25

Énoncé

Etant donné un triangle, trouver tous les centres
a) des ellipses inscrites dans le triangle,
b) des ellipses ex-inscrites dans le triangle,
c) des hyperboles dont une branche est tangente aux trois côtés du triangle,
d) des hyperboles dont une branche est tangente à deux côtés du triangle et l'autre branche au troisième.