L'HORLOGE ASTRONOMIQUE DE LA CATHÉDRALE DE STRASBOURG

Jean LEFORT

SCHWILGUÉ

Auteur de l'Horloge astronomique de la Cathédrale de Strasbourg

A mon ancien élève Chrétien Unger
Souvenir d'attachement

J. B. Schwilgué

J.-B. SCHWILGUÉ,
d'après le dessin de Ch.-Aug. Schuler

Vers 1785-1786 un jeune garçon passe son temps à questionner le suisse de garde à l'horloge astronomique de la cathédrale de Strasbourg. Né le 18 décembre 1776, Jean-Baptiste habite à deux pas de là, rue Brûlée, et il a vite fait de revenir régulièrement écouter, sans se lasser, les explications qui sont données sur les splendeurs passées de cette merveille de la mécanique du 16e siècle. Certes, la foudre et l'usure ont eu raison petit à petit des différents mécanismes et le jeune Schwilgué n'a devant lui qu'une œuvre monumentale figée ou presque : seules fonctionnent encore les aiguilles qui donnent l'heure. Les automates se sont arrêtés depuis longtemps; le célèbre coq ne chante plus. Mais les légendes enjolivent la réalité passée et les légendes dans l'esprit d'un enfant d'une dizaine d'années, qui plus est passionné de mécanique, c'est tellement important qu'il jura qu'il sera celui qui fera revivre l'horloge. On dit même que ce serment il le fit à haute voix parmi la foule venue admirer l'œuvre de Dasypodius. Mais si à dix ans on peut ainsi décider de son orientation, on dépend encore terriblement de sa famille et il' doit bien suivre son père qui, devenu veuf, déménage à Sélestat en 1787 l'éloignant de sa chère horloge. Il en apprendra l'arrêt total en 1788 et son désir de ressusciter cette œuvre n'en sera que renforcé.

LA PREMIÈRE HORLOGE

C'est que Strasbourg a une longue tradition d'horloge astronomique et si elle n'est pas la seule ville à s'enorgueillir d'un tel ouvrage, c'est sans doute celle qui est la plus célèbre. Pour toute une communauté, il est impensable de faillir à une tradition qui remonte à plus de 400 ans. Dès la construction de la cathédrale il avait été prévu une horloge monumentale. Mais la construction d'une cathédrale, cela demande plusieurs générations et les plans évoluent. L'horloge, la première connue, est achevée en 1354. Elle est située sensiblement en face de l'horloge actuelle et sa célébrité est due autant aux différents cadrans qu'aux automates. Sa réputation dépasse largement les frontières de l'Alsace comme en témoigne le nombre de demandes de copies émanant de diverses municipalités, demandes qui sont en général acceptées comme celle de Villingen en Forêt-Noire (construite en 1401).

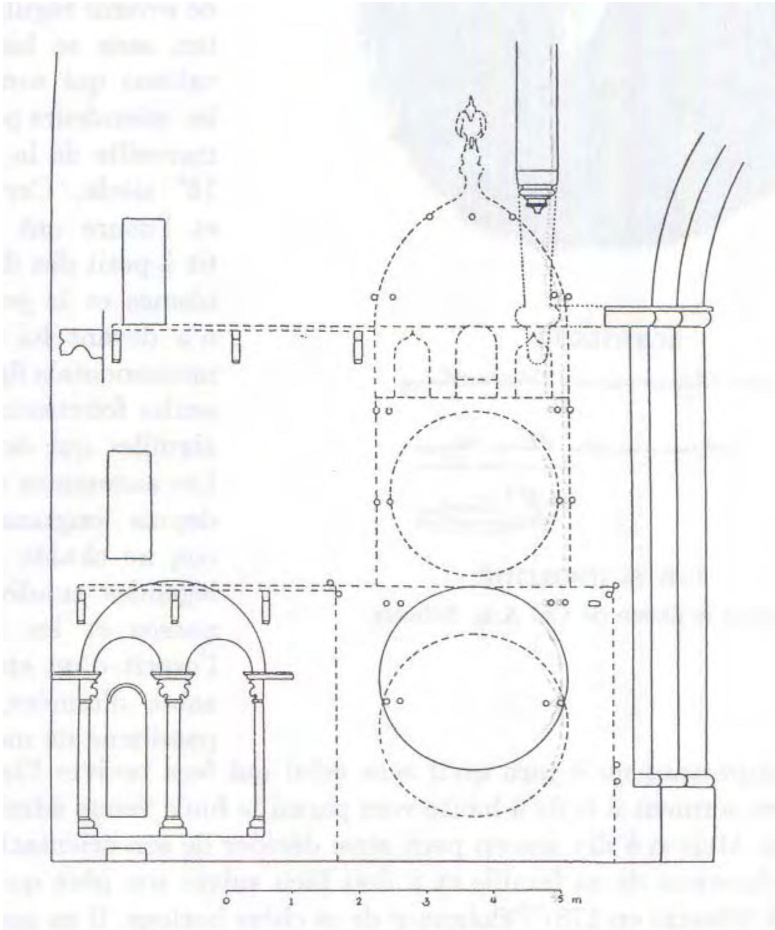


Fig. 1 : Reconstitution de la première horloge, achevée en 1354.

Les petits ronds représentent les scellements de plomb qui ont été repérés dans la muraille.

L'HORLOGE ASTRONOMIQUE DE LA CATHÉDRALE DE STRASBOURG

D'une hauteur totale de 11,70 m, l'horloge était installée dans une grande cage en bois scellée au mur. La partie inférieure présentait une façade carrée d'environ 4 m. de côté, façade entièrement occupée par un calendrier d'un diamètre de 2,80 m. qui faisait un tour complet en une année de façon continue; un dispositif particulier permettait de distinguer les fêtes variables, les indications du comput (julien) ainsi que le millésime. La partie médiane ne faisait plus que 2,90 m. de côté et contenait l'essentiel des organes moteurs; en façade se trouvait l'astrolabe établi selon le système géocentrique de Ptolémée: la sphère terrestre au centre et autour le fond étoilé sur lequel se déplaçait l'araignée faisant un tour par jour sidéral. Par dessus les aiguilles du soleil faisaient un tour en 24 heures et l'on voyait aussi les aiguilles de la lune et celles des 5 planètes. Enfin, la partie supérieure contenait les automates: au centre trônait une Vierge à l'enfant; d'une niche latérale sortaient les trois rois mages lorsque sonnaient les heures; ils s'inclinaient devant la Vierge et disparaissaient dans une autre niche pendant qu'un carillon jouait des mélodies de psaumes sur une série de dix timbres; alors, un coq perché au sommet de l'horloge faisait retentir son cocorico en battant des ailes et en agitant la tête.

Ce coq est la seule pièce qui nous soit parvenue et on peut encore l'admirer au musée. De bois massif creusé pour y loger les mécanismes, il est recouvert de plumes de fer forgé, la crête étant de cuivre rouge repoussé. Deux tiges permettent de mettre en mouvement l'automate: la première lui soulève la tête, lui ouvre le bec en faisant avancer la langue tandis que descend la queue; la deuxième écarte les ailes ce qui fait s'écarter en même temps les plumes des ailes.

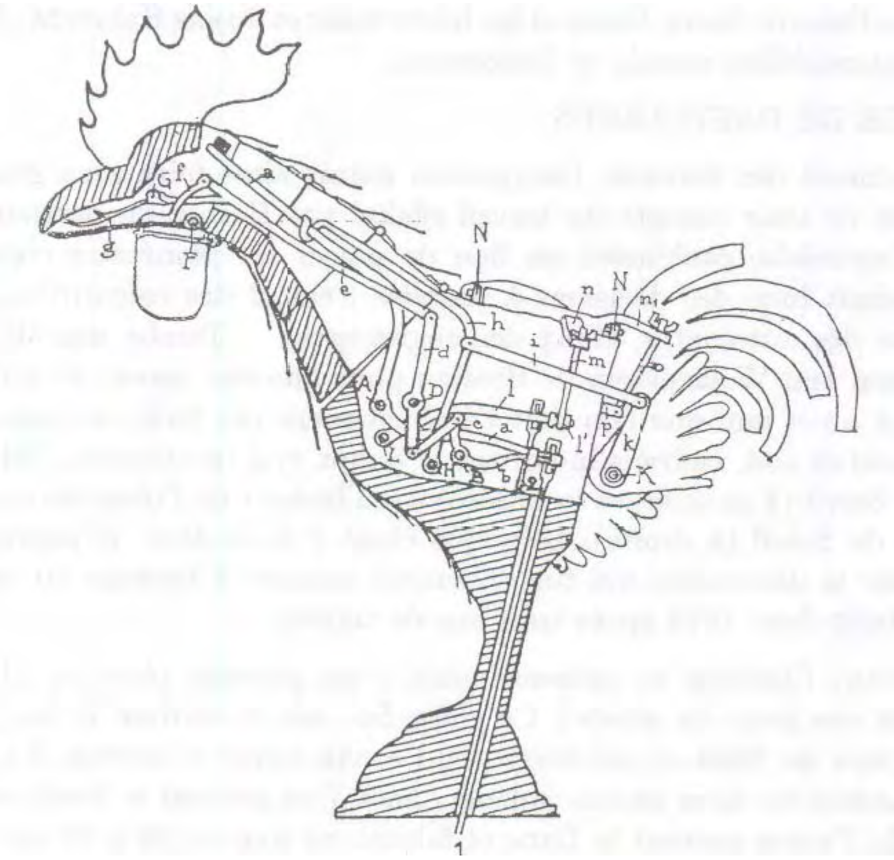
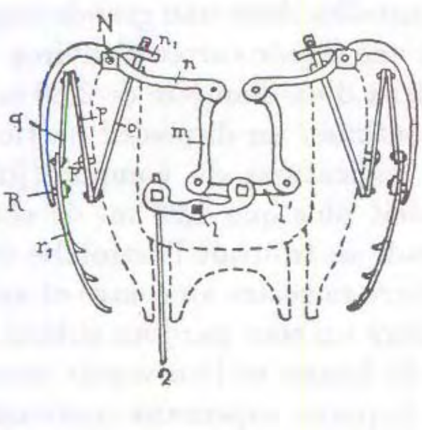


Fig. 2 : Le coq automate de 1354; coupe longitudinale



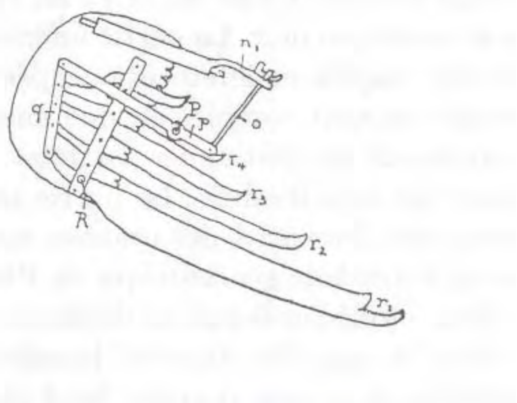


Fig. 3 : Coupe transversale du coq automate.

Fig. 4 : Mécanisme des ailes du coq automate.

On sait que différentes réparations furent faites au cours des années. En particulier il y eut une réparation du chant du coq en 1450, mais l'horloge s'arrêta définitivement vers 1500 et on songea à la remplacer vers 1531. De discussions en compromis, un accord fut trouvé vers 1540 pour reconstruire une horloge sur le site actuel, malheureusement les événements politiques, et religieux retardèrent les travaux commencés par Herlin et celui-ci mourut en 1562 en laissant une horloge inachevée. Les années passent. Le successeur de Herlin dans la chaire de mathématiques est Conrad Dasypodius. Ayant hérité des manuscrits de son prédécesseur, il les étudie et se prépare à achever l'horloge dès qu'il trouvera la collaboration nécessaire. Cette occasion se présente en 1571 où un contrat est signé entre l'administration de l'œuvre Notre-Dame et les frères Isaac et Josias Habrecht, Dasypodius ayant la responsabilité morale de l'opération.

L'HORLOGE DE DASYPODIUS

Directeur général des travaux, Dasypodius ,aurait aimé faire plus grand, mais il est contraint de tenir compte ,alu travail réalisé par Herlin; en particulier, il doit conserver l'astrolabe ptoléméen au lieu de placer un planétaire copernicien. Il reste cependant bien des décisions à prendre : calcul des calendriers, calcul des mouvements des automates, choix des engrenages, ... Tombé malade en 1572 il fil appel à son ami Wolkenstein de Breslau pour que son œuvre ne souffrit aucun retard. C'est à cet ami que l'on doit l'établissement des trois cadrans solaires au dessus du portail sud, cadrans indiquant le temps vrai (au dessus), l'altitude et la latitude du Soleil (à gauche) et la durée entre l'instant de l'observation et le lever ou coucher du Soleil (à droite). L'époque étant à la couleur, le peintre Stimmer fut chargé de la décoration qui fut richement colorée. L'horloge fut inaugurée le jour de la Saint-Jean 1574 après trois ans de travail.

Au spectateur, l'horloge se présente ainsi : au premier plan un globe céleste (conservé de nos jours au musée). Ce globe fait une révolution en un jour sidéral de 23 h 56 min 4s, 0945 ce qui correspond à une erreur d'environ 2 s par an. Ce globe est entouré de deux cercles indépendants, l'un portant le Soleil et faisant un tour en 24 h, l'autre portant la Lune et faisant un tour en 24 h 50 min 30 s,58.

Sur la partie basse de l'horloge proprement dite se trouve le calendrier d'un diamètre extérieur de 2,92 m sur lequel tourne un anneau de 30 cm divisé en 366 secteurs portant chacun un jour de l'année. La statue d'Appolon indique la date du jour courant. Dans l'échancrure de la règle verticale immobile apparaissent les indications suivantes: le millésime chrétien et juif, la date et l'heure de l'équinoxe de printemps, différentes fêtes mobiles, la ou les lettres dominicales. Ces indications sont peintes sur un cercle tournant d'un centième de tour chaque année ce qui oblige à les -repeindre tous les siècles (ce qui sera fait en 1669 en conservant le calendrier julien toujours en vigueur à Strasbourg). De part et d'autre du calendrier se trouvent les tableaux des éclipses de Lune et de Soleil pour le siècle en cours.

Au dessus du calendrier, à l'intérieur d'une niche, on peut voir défiler les chars des jours de la semaine avec Appolon pour Dimanche et Diane pour Lundi. (Mars, Mercure et Saturne ont été conservés dans l'horloge actuelle les autres ayant été perdus ont été remplacés par des copies d'après les dessins de Stimmer.)

Au dessus de la niche, un petit cadran comportant une seule aiguille effectuant un tour par heure (aiguille des minutes) avec, de part et d'autre, deux génies, l'un battant les coups des heures, l'autre retournant un sablier tous les quart d'heure.

Au dessus, dans la partie centrale de l'horloge, il y a l'astrolabe: c'est un fond de ciel, centré sur la latitude de Strasbourg, représentant les étoiles visibles et qui tourne en un jour sidéral. Une aiguille représentant le Soleil fait un tour en 24 h (deux fois 12 h). 5 autres aiguilles représentant les planètes tournent également : Mercure et Vénus sont solidaires de l'aiguille du Soleil, Mars fait un tour en 729 jours (?), Jupiter en 12 ans et Saturne en 30 ans.

Au dessus encore, un système ingénieux formé de deux disques diamétralement opposés tournant en deux mois lunaires derrière un cache indique les phases de la Lune. Une aiguille indique le jour du mois lunaire. Couronnant le tout, viennent les automates, tout d'abord les quatre âges, un enfant, un adolescent, un guerrier et un vieillard, disposés sur un disque tournant d'un quart de tour chaque quart d'heure et sonnant un à quatre coups en se tournant vers le spectateur. Et enfin, le Christ et la mort sonnant les heures en un aller-retour fulgurant. Sur la tour de gauche, Dasypodius a replacé le coq de l'horloge précédente qui "cocoricote" et s'anime à chaque heure.

Toutes les pièces sont en fer forgé et on comprend qu'un entretien régulier soit nécessaire. On en chargea la famille Habrecht à titre héréditaire et c'est ce qu'elle fit jusqu'à son extinction en 1732. Il est curieux de constater que c'est l'artisan Isaac Habrecht qui recueillit toute la gloire de l'horloge alors que toutes les imperfections étaient attribuées au concepteur Dasypodius. Peut-être parce que Dasypodius mourut en 1601 et que Habrecht lui survécu 19 ans après avoir réalisé des copies pour différents souverains.

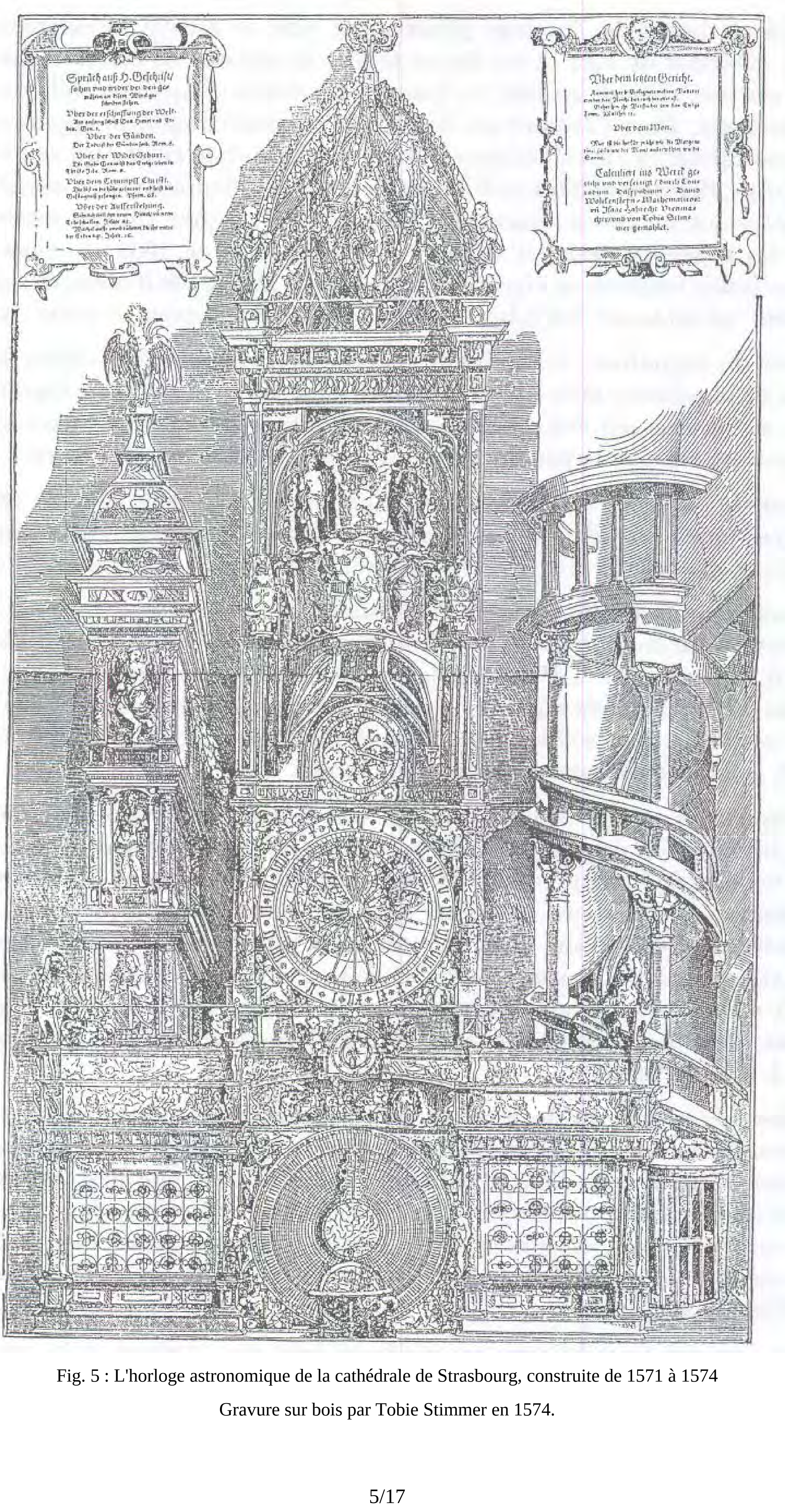


Fig. 5 : L'horloge astronomique de la cathédrale de Strasbourg, construite de 1571 à 1574

Gravure sur bois par Tobie Stimmer en 1574.

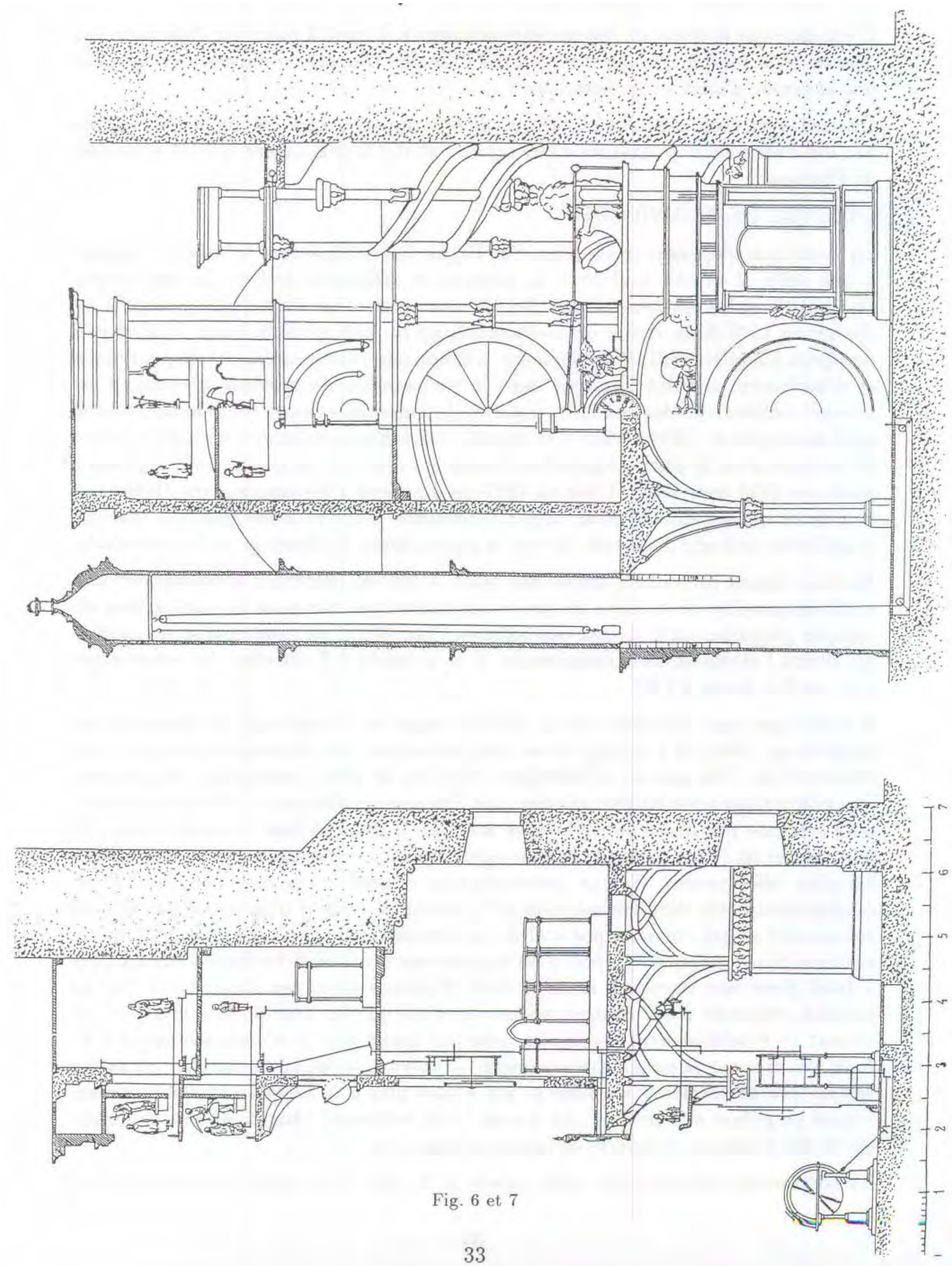


Fig. 6 et 7

33

Malheureusement les horlogers successifs ne sont pas toujours à la hauteur de la tâche et s'il y eut des améliorations bien souvent, quand un mécanisme ne fonctionnait plus on se contentait de le débrayer.

C'est ainsi que le chant du coq dut être actionné à la main à partir de 1640 suite aux dégâts de la foudre. Finalement en 1788 l'horloge s'arrête, complètement bloquée par la crasse d'huile et de poussière.

On envisagea bien sûr de la réparer ou de la remplacer, mais l'époque est troublée par des événements politiques d'importance et il y a plus urgent que de s'occuper de 1'horloge.

L'OEUVRE DE SCHWILGUÉ

La révolution n'épargne pas le jeune Schwilgué. Les collèges sont fermés et, toujours à son idée, il étudie seul avec le secours de différents traités, la mécanique, l'horlogerie et les mathématiques. Il faut croire que ce fut avec succès puisqu'il est chargé en 1808 de la chaire de mathématiques du collège de Sélestat, chaire qu'il occupera jusqu'en 1827. Parallèlement, il fonde une petite entreprise de pendulerie et d'horlogerie. S'étant impliqué dans la propagation du système décimal, il est nommé vérificateur des poids et mesures de l'arrondissement de Sélestat, travail qu'il accomplit de 1808 à 1825. Cet emploi l'orienta naturellement vers les balances et bascules pour le perfectionnement desquelles il obtînt un brevet qu'il exploita à partir de 1823 avec Rollé. C'est en 1827 qu'il revient à Strasbourg, rue Brûlée, en face de sa maison natale, pour diriger l'entreprise Rollé et Schwilgué. On voit par là qu'il n'a toujours pas perdu de vue la restauration de l'horloge de la cathédrale.

En fait, depuis toujours il dresse des plans. C'est en cherchant à démontrer qu'il serait impossible de trouver un processus mécanique donnant les indications du comput grégorien qu'il trouva une solution! En 1821 il en avait réalisé un modèle qui attira l'attention des connaisseurs. Ille présenta à Paris chez des astronomes puis au Roi Louis XVIII.

Il n'est donc pas étonnant qu'en 1827 le maire de Strasbourg lui demande un rapport sur l'état de l'horloge et sur une estimation des dépenses nécessaires à sa restauration. Cela permet à Schwilgué d'étudier de près l'horloge de Dasypodius. Son admiration reste entière en raison de l'époque reculée de sa conception mais il n'en constate pas moins la médiocrité actuelle. Il propose donc trois solutions : 1) une remise en l'état primitif, 2) une modification avec remplacement des parties les plus défectueuses, 3) une reconstruction à neuf selon sa conception. C'est évidemment cette dernière solution qu'il préconise mais il n'en cache pas le coût substantiel ce qui entraîne pas mal de tergiversations. Ce n'est qu'en 1832 qu'un nouveau maire relance l'affaire, d'où un nouveau devis où Schwilgué s'engage plus à fond pour une remise à neuf; il écrit d'ailleurs dans ses mémoires: *"Je ne pouvais consentir à me charger seulement d'une partie, attendu que le public, en voyant ce rétablissement incomplet, pourrait croire que je n'étais pas capable de faire fonctionner la partie astronomique. D'ailleurs je faisais remarquer en même temps, que de restaurer un ouvrage qui n'était plus à la hauteur de notre époque, c'était perpétuer des erreurs".* Le 4 août 1836, le Conseil Municipal vote un crédit de 10 000 francs et demande de nouveaux rapports.

La commande définitive est enfin passée le 26 mai 1838 pour un montant total de 32 400 francs plus 8 000 francs de gros œuvre et maçonnerie. Schwilgué se doit de seulement restaurer l'horloge dans un délai de trois ans : tout travail supplémentaire qu'il serait amené à entreprendre doit au préalable être soumis au vote du Conseil Municipal et à l'approbation du Préfet.

A partir de cette date, Schwilgué va se consacrer entièrement à l'horloge. Il se sépare de son associé Rollé, vend son fonds industriel... ne conservant que la fabrication des horloges d'édifice. Les travaux commencent le 24 juin 1838 avec des ouvriers qu'il avait eu soin de former depuis quelques années ainsi qu'avec son fils Charles et Albert Ungerer. Bien que contraint de conserver l'ancienne structure extérieure, ce qui lui causa des soucis et posa quelques problèmes, Schwilgué ne s'en tînt pas du tout au cahier des charges (et c'est heureux pour nous). L'horloge fonctionna pour la première fois le dimanche 2 octobre 1842 à l'occasion du congrès scientifique de France qui avait lieu à Strasbourg. Des réglages et des essais furent encore nécessaires et l'inauguration avec la mise en route définitive eut lieu le 31 décembre 1842 à minuit au cours d'une grande fête avec cortège aux flambeaux, etc... On fêtait autant l'horloge retrouvée que son architecte.

Nous avons vu que Schwilgué ne s'était pas tenu au cahier des charges. En fait il avait largement dépassé les devis et les délais sans jamais en référer au Conseil Municipal. Le 10 mars 1843 il remit à au Conseil un mémoire contenant, entre autre, le décompte suivant :

Travaux selon le cahier des charges :	32 400,00
Travaux en sus du cahier des charges :	36 863,25
Gros œuvre selon cahier des charges :	8 000,00
Gros œuvre en sus du cahier des charges :	4 000,00
	81 263,25

(ce qui correspond à plus du double de ce qui était prévu). (*) Il terminait sa lettre par : *"Ayant eu à cœur de procurer à la ville de Strasbourg un monument aussi remarquable pour notre époque tellement avancée dans les sciences et dans les arts mécaniques, que l'a été pour le XVIe siècle l'horloge de Dasypodius et des frères Habrecht, je n'ai craint aucun sacrifice, je n'ai reculé devant aucune difficulté pour rendre mon œuvre en tout digne d'attirer l'attention du public et l'admiration des étrangers et des connaisseurs. A cet effet j'ai enrichi l'horloge de toutes les inventions et de toutes les découvertes que j'ai faites dans le cours de mes travaux, et j'ai apporté à toutes les pièces qui composent cette œuvre une exécution poussée jusqu'au dernier degré de perfection.*

En dehors de mes engagements prévus par le devis du 16 *mai* 1836*, j'ai construit plusieurs nouveaux mécanismes et moteurs et j'ai fait un grand nombre de travaux dont les principaux sont détaillés dans le mémoire ci-joint.*

Enfin, pour arriver à la dernière limite de la précision, non seulement dans l'exécution des mécanismes, mais encore dans celle de toutes les autres pièces de cette horloge, il m'a fallu construire plusieurs machines neuves, ayant chacune une destination spéciale pour telle ou telle partie de cette œuvre. La création de ces machines et de ces instruments n'a pas coûté peu de peine, et n'a pas entraîné à de petites dépenses. Quelques-unes de ces machines se trouvent également détaillées dans le mémoire ci-joint".

Le 14 décembre 1843 le Conseil Municipal chargea une commission d'étudier le travail et les décomptes de Schwilgué et le 7 février 1844 le dit conseil vota à l'unanimité :
– le règlement des dépenses engagées par Schwilgué,
– une somme de 20 000 francs pour rémunération de son travail personnel,
– les intérêts des sommes déboursées en sus du devis ;
soit un total de 101 725,90 francs. Ce simple vote, à lui seul, montre l'enthousiasme de ses contemporains.

Schwilgué avait remis les plans à l'œuvre Notre-Dame. Il pensait encore publier un descriptif très complet de l'horloge. Mais des événements familiaux (le décès de deux de ses fils), et la fatigue de l'âge l'en empêchèrent. Il décède le 5 décembre 1856 et est enterré au cimetière Ste Hélène. Son fils Charles lui survivra peu (il sera paralysé en 1858) et ce sont les frères Ungerer qui reprendront la tradition. La maison Ungerer a fermé ses portes voici quelques années et restait un grand dans la construction des horloges monumentales (Orly, Strasbourg les Halles, Sydney, ...).

UN PROBLÈME DE MÉCANIQUE

Pour avoir tous fait du vélo et connaître le principe du changement de vitesse, nous savons que si nous engrenons un pignon de p dents avec un autre de q dents, le rapport des vitesses de rotation de chacun des pignons *sera* p/q (ou q/p). Même si, comme nous le verrons plus loin, on peut envisager des systèmes mécaniques qui assurent l'addition des vitesses de rotation, pour des raisons de simplicité et minimisation des frottements on se contente de produits ou de quotients. On se heurte alors au problème de la décomposition en facteurs premiers. Pour des questions de poids et de résistance des matériaux, la dimension des roues dentées de l'horloge astronomique est limitée à environ 500 dents. Une recherche rapide m'a donné 420 pour plus grande valeur. Le façonnage des dents se fait à l'aide

* Un bon ouvrier artisan gagnait alors environ 3 F /jour mais il est difficile de faire une comparaison avec aujourd'hui étant donné que la structure des prix et que les marchandises disponibles n'avaient rien à voir avec ce que nous connaissons en 1993.

d'un "plateau diviseur" (instrument amélioré par Schwilgué), la difficulté étant d'avoir une division de la circonférence en un nombre premier de dents. A ma connaissance, le plus grand nombre premier utilisé est 281 (60e nombre premier), on trouve aussi 269 (57e nombre premier), puis les nombres composés 382 = 2 × 191, 341 = 11 × 31, 334 = 2 × 167, 327 = 3 × 109, 318 = 2 × 3 × 53, ... A l'opposé, il est difficile d'avoir un trop petit nombre de dents : le minimum est 6 et le plus petit nombre premier utilisé seul est 17.

Schwilgué se heurte donc au problème de remplacer les fractions correspondant à certains mouvements astronomiques non seulement par des fractions plus simples mais par des fractions dont la décomposition en facteurs premiers ne fait intervenir que des petits nombres premiers. Par exemple, la période de révolution de la ligne des nœuds de la Lune est d'environ 18,6 ans. Schwilgué a adopté la valeur mesurée à son époque de 587 371 310 secondes dont la décomposition comporte le nombre premier 58 737 131. Que l'on rapporte ce nombre à la durée du jour solaire moyen de 86 400 s ou du jour sidéral plus court d'environ 4 minutes ne fait pas disparaître cet énorme nombre premier (le fait que la valeur actuellement adoptée soit voisine de 586 960 214 s ne change pas le problème : 586 960 214 = 2 × 797 × 368 231).

APPROXIMATION RATIONNELLES D'UN RÉEL

Il y a essentiellement deux façons, qui se recoupent, de remplacer un réel (rationnel ou non) par un rationnel plus simple.

a) **Les suites de Farey :** Voyons-le sur l'exemple de $\sqrt{2}$. On encadre $\sqrt{2}$ par les deux entiers voisins $1/1 < \sqrt{2} < 2/1$ puis on calcule la fraction obtenue en ajoutant entre eux les numérateurs et entre eux les dénominateurs $\frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$ et on place cette nouvelle fraction par rapport à $\sqrt{2}$; ici $1/1 < \sqrt{2} < 3/2$ et on itère le processus : $\frac{1+3}{1+2} = 4/3 < \sqrt{2} < 3/2$, etc... Ainsi le meilleur encadrement de $\sqrt{2}$ avec des fractions de dénominateurs au plus 50 est: $41/29 < \sqrt{2} < 58/41$. Si le nombre est rationnel, le processus s'arrête, sinon il se continue indéfiniment donnant, comme ici pour $\sqrt{2}$, des encadrements de plus en plus précis.

b) **Les fractions continues :** Voyons-le sur l'exemple de π. On écrit π sous forme de sa partie entière $a_o = 3$ plus l'inverse d'un réel a_1, d'où $\pi = 3 + 1/a_1$ et on recommence sur $a_1 = 7 + 1/a_2$, $a_2 = 15 + 1/a_3$, $a_3 = 1 + 1/a_4$, etc... d'où :

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}$$

On note $\pi = (a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots)$. Si à chaque étape on néglige les a_i suivants, on obtient les rationnels $R_0 = 3$, $R_1 = 3 + 1/7 = 22/7$, $R_2 = 3 + 1/(7 + 1/15) = 333/106$, $R_3 = 3 + 1/(7 + 1/(15 + 1/1)) = 355/113$, etc... appelées réduites. Si le nombre de départ est rationnel, le processus s'arrête, sinon il se continue indéfiniment. On démontre que les réduites sont alternativement plus grandes et plus petites que le réel choisi. On retrouve ces réduites parmi les termes des suites de Farey.

c) **Interprétation géométrique :** Dans un repère orthonormé, associons à chaque réel r la droite de pente r passant par l'origine O. A un irrationnel correspond une droite ne passant par aucun point à coordonnées entières; à un rationnel p/q correspond une droite passant par les points (nq, np) avec n entier. On peut également identifier une fraction p/q avec le point de coordonnées (q,p). En nous limitant au quart de plan $x > 0$, $y \geq 0$, l'ensemble des points à coordonnées entières au dessus (resp. au dessous) de la droite D de pente r admet une enveloppe convexe qui est une ligne polygonale asymptote à D. Les sommets de cette ligne polygonale correspondent exactement aux réduites de r supérieures (resp. inférieures) à r.

Les éléments des suites de Farey donnant les meilleurs encadrements de r sont tous les points à coordonnées entières de cet te ligne polygonale.

L'opération $a/b \oplus c/d = (a+c)/(b+d)$ utilisée dans les suites de Farey correspond à un calcul de barycentre. En effet :

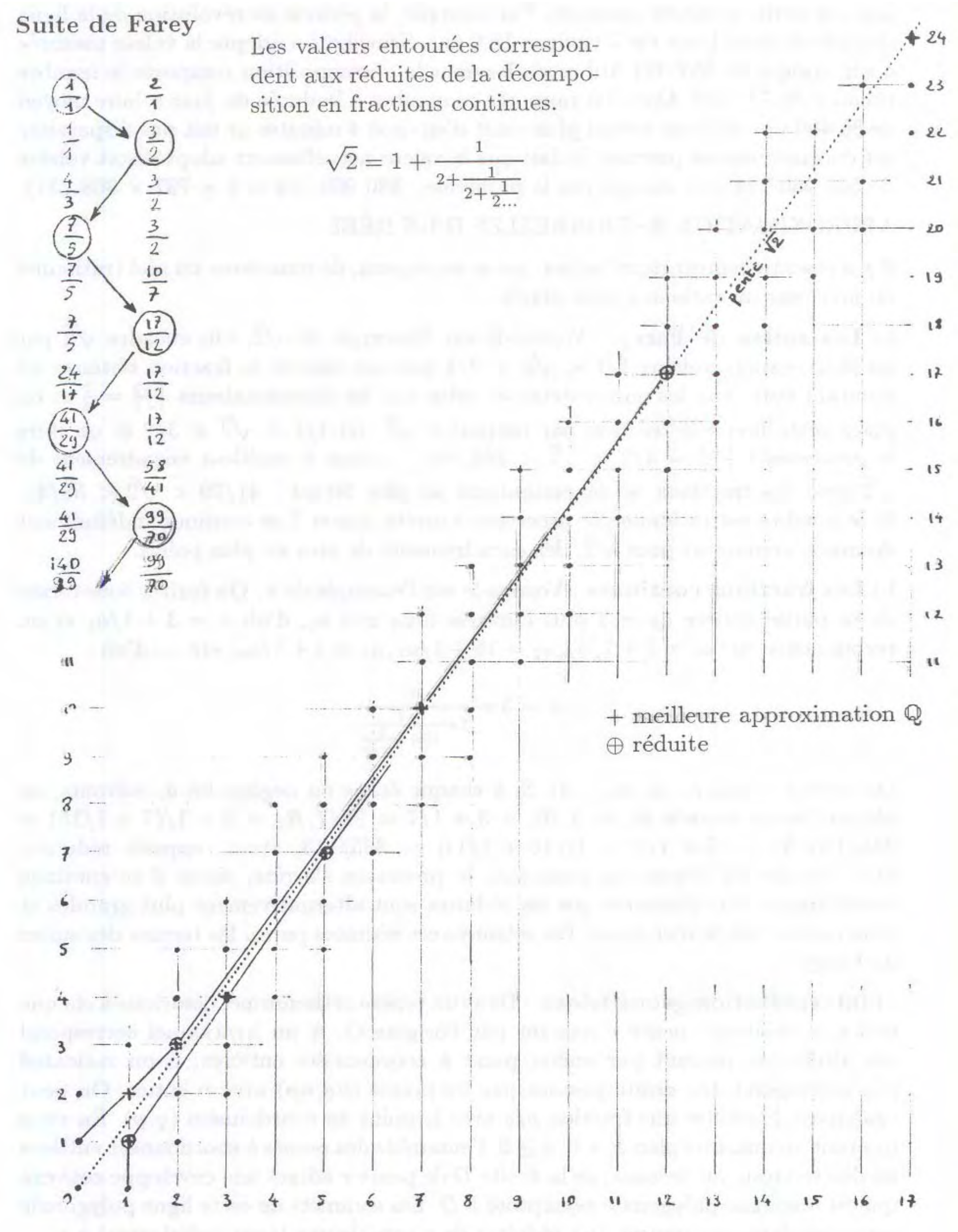


Fig. 8 : Quelques approximations de $\sqrt{2}$

$$\frac{a+c}{b+d}=\left(\frac{b}{b+d}\right)\frac{a}{b}+\left(\frac{d}{b+d}\right)\frac{c}{d}$$

ce qui prouve que la droite de pente (*a* + *c*) / (*b* + *d*) sera plus proche de celle des deux droites dont la pente *a/b* ou *c/d* a le plus grand dénominateur.

En combinant à l'aide de l'opérateur oe les différentes meilleures approximations rationnelles on peut obtenir d'autres approximations mais qui ne sont pas les meilleures au sens précédent, c'est-à-dire dont le dénominateur n'est pas le plus petit possible pour la précision obtenue.

APPLICATION AU PLANÉTAIRE

Le mouvement des différentes planètes est rapporté au mouvement annuel de la Terre. Or, 1 an = 31 556 928 secondes ($= 2^6 \times 3 \times 13 \times 47 \times 269$). La figure 9 donne les durées de révolution choisies et celles obtenues. Complétons-la par les données ci-après :

Planète	**Durée de révolution en secondes**	**Décomposition en fraction continue**
Mercure	7 600 457 =52 × 19 ×16 001	(4; 6,1,1,2,1,1,1,1,2,1,3)
Vénus	19 413 685 =5 × 3 882 737	(1; 1,1,1,2,30,1,13,4,2,1)
Mars	59 350 724 =22 × 14 837 681	(0; 1,1,7,2,1,1,2,4,1,1,4,1,1,1)
Jupiter	374 163 25 =2 × 53 × 59 × 25 367	(0; 11,1,5,1,53,1,15,26,2,1)
Saturne	928 535 410 =2 × 5 × 11 × 17 × 97 × 5 119	(0; 29,2,1,1,3,1,8,47,1,1,1,2)

En notant, comme précédemment, R_i la i-ème réduite, les fractions utilisées sont respectivement : pour Mercure, R_9 , pour Vénus, $R_7 \oplus R_6$, pour Mars, $R_{11} \oplus R_{12}$, , pour Jupiter, R_6 et pour Saturne, R_7.

L'erreur maximale commise est de 13 secondes sur la durée de révolution de Jupiter mais il s'agit de 13 s sur plus de 11 ans soit guère plus de 1 s, par an. Or tous les mécanismes sont réglables (il le fallait, ne serait-ce que pour ajuster la mise en route) et si l'écart devient trop important, une mise à l'heure partielle peut être faite. De toute façon, étant donné l'échelle du planétaire et la taille des planètes sur le fond du ciel, ce genre d'erreur est négligeable pendant très longtemps. Il n'en est pas de même dans l'exemple suivant.

PLANÈTE	DURÉE DE RÉVOLUTION DEVANT ÊTRE RÉALISÉE	RAPPORT ÉTANT A RÉALISER	RAPPORT CHOISI POUR LES ENGRENAGES	DURÉE DE RÉVOLUTION OBTENUE
MERCURE	87 j. 23 h. 14 m. 35 s.	$\frac{31\,556\,928}{7\,600\,475}$	$\frac{3060}{737} = \frac{240}{44} \times \frac{102}{134}$	87 j. 23 h. 14 m. 35,79 s.
VÉNUS	224 j. 16 h 41 m. 25 s.	$\frac{31\,556\,928}{19\,413\,685}$	$\frac{6107}{3757} = \frac{197}{17} \times \frac{31}{221}$	224 j. 16 h. 41 m. 25,68 s.
MARS	686 j. 22 h. 18 m. 44 s.	$\frac{31\,556\,928}{59\,350\,724}$	$\frac{10\,759}{20\,235} = \frac{203}{95} \times \frac{53}{213}$	686 j. 22 h. 18 m. 43,87 s.
JUPITER	4330 j. 14 h. 14 m. 10 s.	$\frac{31\,556\,928}{374\,163\,250}$	$\frac{384}{4553} = \frac{96}{157} \times \frac{32}{232}$	4330 j. 14 h. 14 m. 23,5 s.
SATURNE	10 746 j. 22 h. 30 m. 10 s.	$\frac{31\,556\,928}{928\,535\,410}$	$\frac{290}{8533} = \frac{58}{161} \times \frac{20}{212}$	10 746 j. 22 h. 30 m. 2,15 s.

Rapports des engrenages de ce mécanisme :

Terre : A=A' :	*Lune :*	*Mercure :*	*Vénus :*	*Mars :*	*Jupiter :*	*Saturne :*
$\frac{b}{B} = \frac{9}{156}$	$\frac{k}{K} = \frac{83}{122}$	$\frac{g}{G} = \frac{44}{240}$	$\frac{e}{E} = \frac{17}{197}$	$\frac{m}{M} = \frac{95}{203}$	$\frac{p}{P} = \frac{96}{157}$	$\frac{r}{R} = \frac{58}{161}$
$\frac{c}{C} = \frac{10}{188}$	$\frac{l}{L} = \frac{14}{196}$	$\frac{h}{H} = \frac{102}{134}$	$\frac{f}{F} = \frac{31}{221}$	$\frac{n}{N} = \frac{53}{213}$	$\frac{q}{Q} = \frac{32}{232}$	$\frac{s}{S} = \frac{20}{212}$
$\frac{d}{D} = \frac{10}{269}$	$\frac{J}{j} = \frac{312}{24}$					

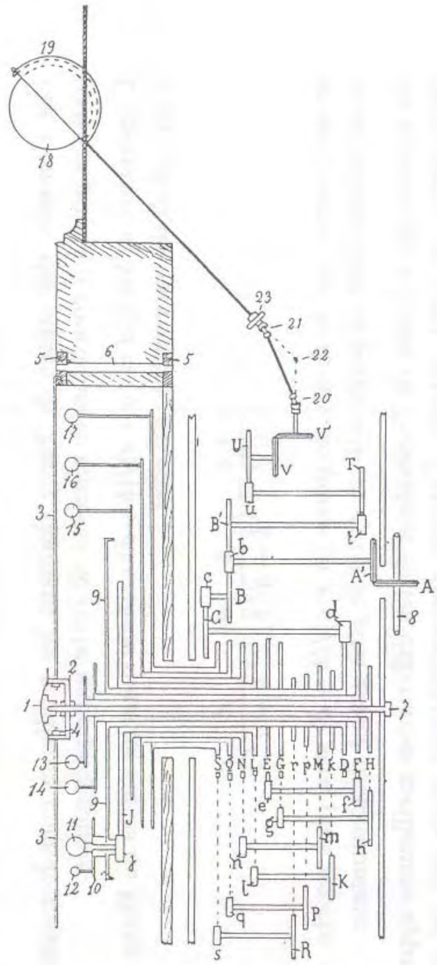


Fig. 49. — Mécanisme du Planétaire et du Globe lunaire.

Fig. 9 : Mécanisme du planétaire et du Globe lunaire.

DU JOUR SOLAIRE MOYEN AU JOUR SIDÉRAL

On sait que si un même méridien terrestre met 24 h pour revenir face au Soleil, il met environ 4 minutes de moins pour revenir face à la même étoile (ce qu'on appelle le jour sidéral). Cette différence provient du fait que la Terre avance sur son orbite; sur l'année il y a un tour d'écart.

Schwilgué a pris comme durée de l'année tropique (notre année ordinaire) 365 j 5 h 48 min 48 s = 31 556 928 s. Donc la durée du jour sidéral est :

$$\frac{365\text{j }5\text{h }48\text{min }48s}{366\text{j }5\text{h }48\text{min }48s} = \frac{31\,556\,928}{31\,643\,328} = \frac{2^6 \times 3 \times 47 \times 269}{2^6 \times 3 \times 164\,809}$$

Il lui faut donc construire des engrenages fournissant le rapport $R = \frac{13\times 47\times 269}{164\,809} = \frac{164\,359}{164\,809}$. Pour cela il va utiliser deux méthodes. L'une approchée qu'il mettra en œuvre sur le mécanisme du mouvement lunaire, l'autre exacte qu'il mettra en œuvre pour le mouvement de la sphère céleste.

1) **Une méthode approchée :** Elle est basée sur les fractions continues. Ici le rapport R se décompose en (0 ; 1, 365, 4, 7, 1, 3, 1, 2) ou bien en (0 ; 1, 365 ,4, 7, 1, 3, 1, 1, 1). Cette dernière décomposition conduit aux réduites :

$$R_1 = \frac{1}{1}; \quad R_2 = \frac{365}{366}; \quad R_3 = \frac{1461}{1465} = \frac{3.487}{5.293};$$

$$R_4 = \frac{10592}{10621} = \frac{2^5.331}{13.19.43}; \quad R_5 = \frac{12053}{12086} = \frac{17.709}{2.6043};$$

$$R_6 = \frac{46751}{46879} = \frac{46751}{7.37.181}; \quad R_7 = \frac{58804}{58965} = \frac{2^2.61.241}{3.5.3931};$$

$$R_8 = \frac{105\,555}{105\,844} = \frac{3.5.31.227}{2^2.47.563} \quad \text{et} \quad R_9 = R.$$

La meilleure réduite ne faisant intervenir que des nombres premiers assez petits est R_4, malheureusement l'écart avec R , qui est d'environ 1 s. en 5 ans, est trop important. Schwilgué, par tâtonnement, va prendre $R \oplus R_8 \oplus R_3 = \frac{271\,375}{272\,118} = \frac{5^3.13.167}{2.3.7.11.19.31}$ qui ne donne qu'une erreur de 1 s. en un peu plus d'un siècle.

Dans le cadre du mouvement lunaire illustré sur la figure 10, le rapport $\frac{271\,375}{272\,118}$ doit être multiplié par 12 car le mouvement est produit par un arbre qui fait un tour en 2 h. Cela conduit au choix suivant pour les engrenages :

$$\frac{334}{28} \times \frac{65}{341} \times \frac{300}{57} = \frac{G}{g} \times \frac{h}{H} \times \frac{S}{s}.$$

Sur la figure, les roues G et H sont solidaires et folles sur l'axe V; de même la roue S est folle sur ce même axe. Ce choix des valeurs numériques permet d'avoir des roues de dimensions comparables.

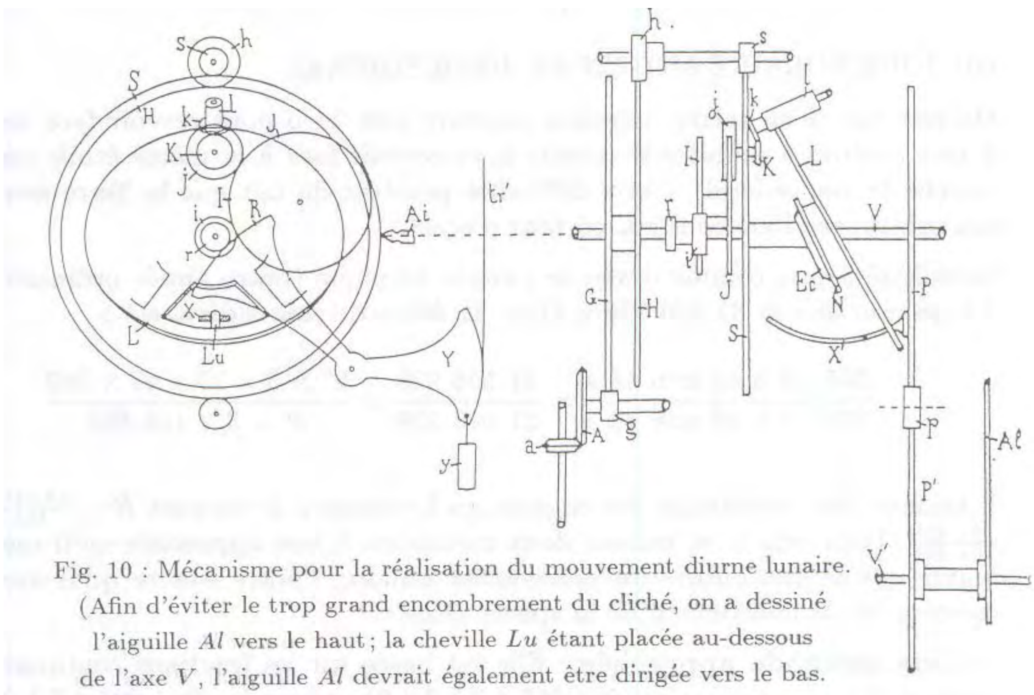


Fig. 10 : Mécanisme pour la réalisation du mouvement diurne lunaire. (Afin d'éviter le trop grand encombrement du cliché, on a dessiné l'aiguille Al vers le haut ; la cheville Lu étant placée au-dessous de l'axe V, l'aiguille Al devrait également être dirigée vers le bas.

2) **Une méthode exacte :** Comme dans la fraction R c'est le dénominateur qui pose problème, car c'est un grand nombre premier, on prend l'inverse de R et on écrit :

$$\frac{1}{R} = \frac{164\,809}{164\,359} = 1 + \frac{450}{164\,359} = 1 + \frac{450}{13.47} \times \frac{1}{269}$$

et on utilise un montage avec engrenages satellites pour traduire l'addition (fig. 11). Les roues d et e, solidaires ont un axe fixé sur la roue B et entraîné par elle. Les roues$C$ et D sont solidaires et folles sur l'axe Z, de même les roues E et F. Alors pour un tour de B, ,la -roue C décrit $(B / b).(c / C)$ tours; il en est de même de D qui avance donc sur B de $(\frac{B}{b}.\frac{c}{C} - 1)$ tours. Cette avance est compensée par la rotation de d et e. Par suite E avance sur B de $\frac{D}{d}.\frac{e}{E}(\frac{B}{b}.\frac{c}{C} - 1)$ tours. Pour avoir la rotation totale de E il faut ajouter le tour effectué par B, d'où la formule :

Pour un tour de B, e fait $1 + \left(\frac{D}{d}.\frac{e}{E}\left(\frac{B}{b}.\frac{c}{C} - 1\right)\right)$.

Schwilgué a utilisé les engrenages suivants :

$$\frac{a}{A} = \frac{45}{72}; \quad \frac{b}{B} = \frac{18}{270}; \quad \frac{c}{C} = \frac{18}{269}; \quad \frac{d}{D} = \frac{26}{100}; \quad \frac{e}{E} = \frac{18}{94}$$

puis $F = F'$, $G = G'$ et $H = H'$. On vérifie qu'on obtient bien le rapport voulu :

$$1+\left[\frac{D}{d}\frac{e}{E}\left(\frac{B}{b}\frac{c}{C}-1\right)\right]=1+\frac{100}{26}\frac{18}{94}\left(\frac{270}{18}\frac{18}{269}-1\right)$$
$$=1+\frac{50}{13}\frac{9}{94}\left(\frac{270}{269}-1\right)$$
$$=1+\frac{450}{13.47}\frac{1}{269}$$

La roue *A* assure l'entraînement et les roues *F, F'* , *G, G'*, *H* et *H'* la transmission à la sphère céleste.

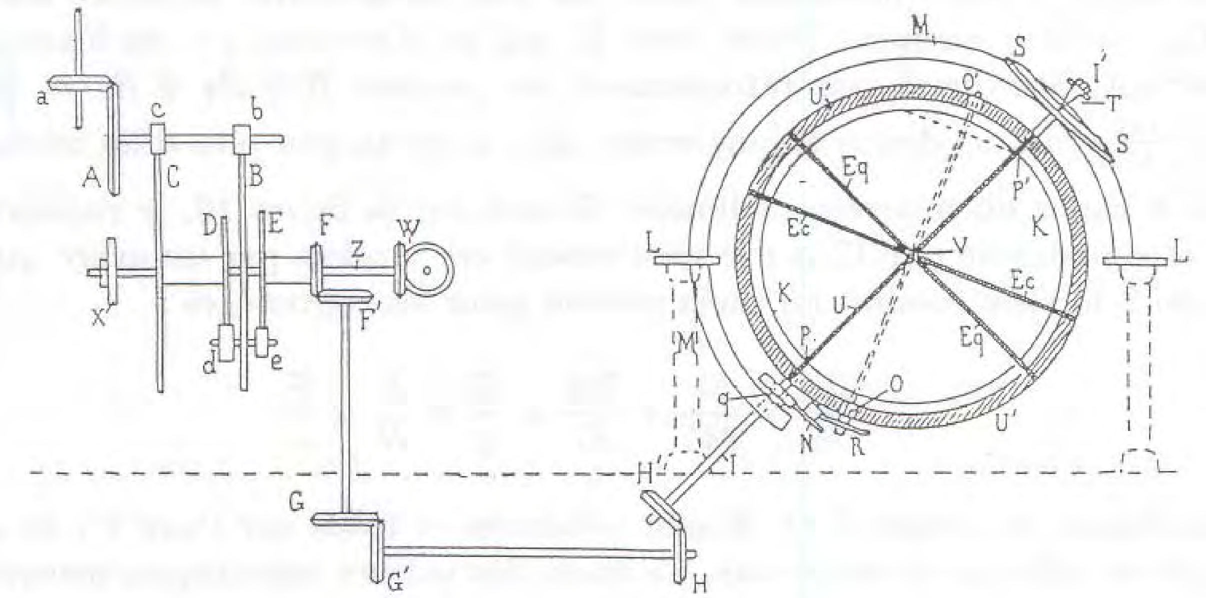


Fig. 11 : Mécanisme du temps sidéral et la Sphère céleste

LES INÉGALITÉS DES MOUVEMENTS DE LA LUNE (ET DU SOLEIL)

Les différents engrenages ne peuvent transmettre qu'un mouvement régulier, celui du "moteur". Or il s'agit de traduire le mouvement apparent de la Lune et du Soleil et l'on sait que le système Terre-Lune-Soleil est un exemple du problème des trois corps, problème qui n'est pas ré soluble par des quadratures; on démontre même que les solutions sont chaotiques à l'échelle du million d'années, bien qu'à l'échelle des temps historiques on puisse considérer que le mouvement est la somme de mouvements périodiques que l'on rapporte à un mouvement képlérien moyen. La Lune étant le corps le moins massif, c'est elle qui subit les plus fortes perturbations. Schwilgué n'a pris en compte que les cinq plus importantes que nous détaillons ci-après. En ce qui concerne le mouvement apparent du Soleil, les choses sont plus simples et il n'est besoin que de trois corrections (fig. 13). Pour des raisons esthétiques, Schwilgué a placé les appareils correcteurs de part et d'autres de ceux correspondant au mouvement de la Lune. Pour abréger l'exposé nous n'étudions ici que les inégalités du mouvement lunaire.

L'anomalie : Elle traduit la lente rotation du périgée. L'intervalle séparant deux passages au périgée est de 27 j 13 h 18 min 34 s et est appelé mois anomalistique.

L'évection : Elle traduit une modification de l'excentricité de l'orbite. Sa période est de 31 j 19 h 29 min 11, 453 s.

La variation : Elle se traduit par une accélération (quand la Lune se dirige vers le Soleil) ou un retard (quand la Lune s'éloigne du Soleil). La variation a une période de 29 j 12 h 44 min 3 s appelée mois synodique.

L'équation annuelle : Elle traduit l'influence plus forte du Soleil quand la Terre (donc la Lune) est au périhélie plutôt qu'à l'aphélie. Sa période, évidemment proche de l'année, vaut 365 j 6 h 13 min 57 s qui représente l'année anomalistique (intervalle de temps séparant deux passages de la Terre au périgée).

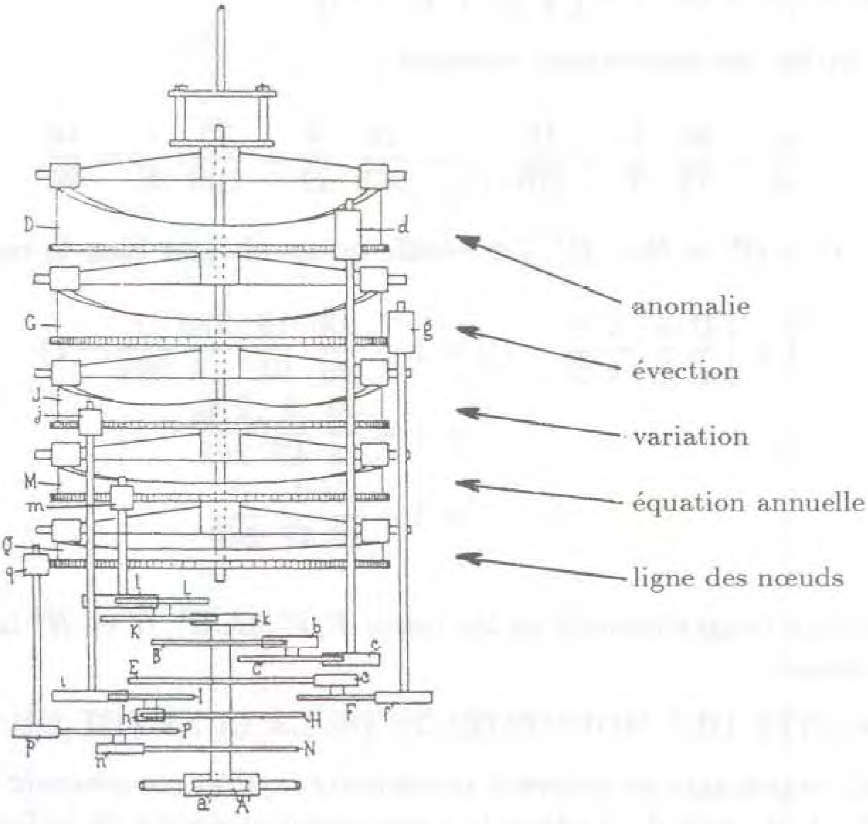


Fig. 12 : Mécanisme des équations lunaires.

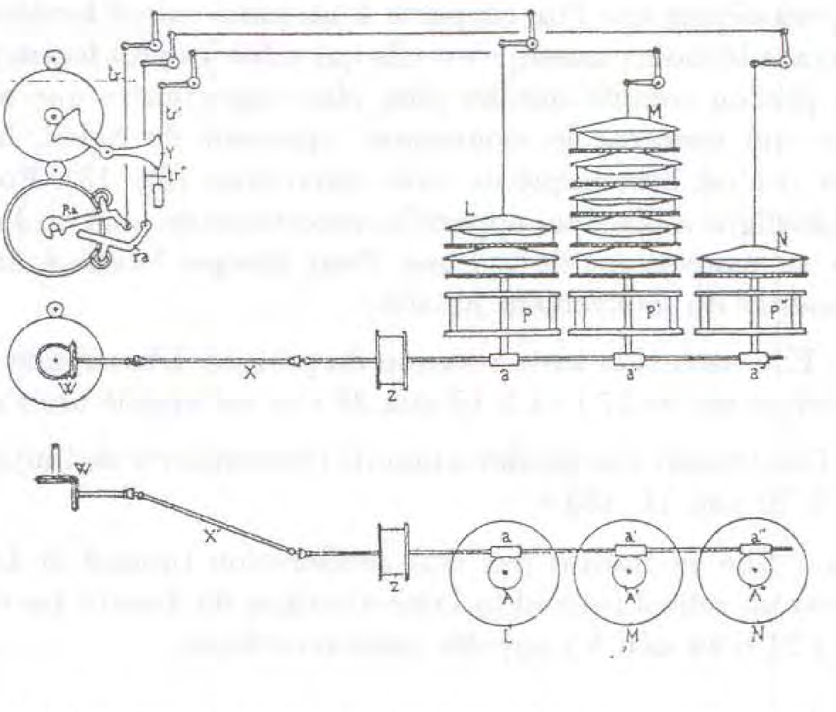


Fig. 13 : Schéma du mécanisme des équations et transmissions qui influencent la marche des aiguilles solaire et lunaire.

L'équation de la ligne des nœuds : C'est elle qui traduit la lente rotation de plan de l'orbite lunaire en 18,6 ans. La droite d'intersection de ce plan avec le plan de l'écliptique (plan de l'orbite terrestre) est appelée "ligne des noeuds". Cette ligne joue un rôle important dans l'étude des éclipses car celles-ci ne peuvent avoir lieu que si la Lune est au voisinage de l'écliptique (donc d'un des nœuds) ([*]). L'intervalle séparant deux passages au nœud ascendant, dit mois draconitique) vaut 27 j 5 h 5 min 35,8 s.

Pour transmettre ces perturbations, Schwilgué a imaginé le mécanisme suivant : pour chacune d'entre elles, la courbe représentative de deux périodes est tracée sur un cylindre de manière que deux points diamétralement opposés soient à la même hauteur. Une traverse horizontale coulisse dans un plan fixe passant par l'axe du cylindre et monte ou descend d'une quantité proportionnelle à l'amplitude de la perturbation à l'instant considéré (fig. 12).

Les différents cylindres sont empilés les uns au dessus des autres, chacun reposant sur la traverse horizontale du précédent, ce qui fait que la traverse la plus haute a un mouvement vertical correspondant à la somme des amplitudes des diverses perturbations.

Le mécanisme d'entraînement doit tenir compte de la hauteur variable de chaque cylindre. C'est pourquoi les pignons sont d'autant plus longs qu'ils agissent sur des cylindres placés plus haut. Pour limiter leur taille, Schwilgué a d'ailleurs situé le mécanisme correspondant aux perturbations les plus importantes en haut du système, donc dans l'ordre décroissant: anomalie, évection, variation, équation annuelle, équation de la ligne des nœuds.

L'entraînement étant assuré par un arbre faisant un tour en un jour moyen soit en 86 400 secondes, Schwilgué s'est, ici encore, heurté au problème de trouver des fractions simples approchant les fractions exactes. Le tableau ci-après montre comment il a résolu ce problème :

	Période à réaliser	**Rapport à réaliser**	**Rapport choisi**	**Période obtenue**
anomalie	27 j 13 h 18 m 34 s	$\frac{2\,380\,714}{86\,400}$	$\frac{70\,209}{2\,548}$	27 j 13 h 18 m 33,34 s
évection	31 j 19 h 29 m 11,453 s	$\frac{2\,748\,551{,}453}{86\,400}$	$\frac{74\,090}{2\,329}$	31 j 19 h 29 m 11,3 s
variation	29 j 12 h 44 m 3 s	$\frac{2\,551\,443}{86\,400}$	$\frac{51\,649}{1\,749}$	29 j 12 h 44 m 2,881 s
équation annuelle	365 j 6 h 13 m 57 s	$\frac{31\,558\,437}{86\,400}$	$\frac{226\,461}{620}$	365 j 6 h 13 m 56,13 s
équation de la ligne des nœuds	27 j 5 h 5 m 35,8 s	$\frac{2\,351\,135{,}8}{86\,400}$	$\frac{49\,880}{1\,833}$	27 j 5 h 5 m 35,84 s

On vérifiera facilement que la décomposition en facteurs premiers ne fait intervenir que des petits nombres (inférieurs à 269).

Il s'agit maintenant de transmettre la somme des perturbations au mouvement moyen de la Lune ou du Soleil. Le mécanisme en est décrit sur les figures 13 (vue d'ensemble), 14 (pour le Soleil) et 10 (pour la Lune). Expliquons ce qui se passe dans le cas du Soleil :

[*] C'est essentiellement grâce à une came tournant en environ 18,6 ans que Schwilgué a réussi à matérialiser les éclipses. Une aiguille portant le disque lunaire est ainsi allongée ou raccourcie, ce qui lui permet de passer ou non devant le disque solaire emporté par une autre aiguille. Un mécanisme analogue traite les éclipses de Lune.

Un système de poulies et de tringles renvoie le mouvement vertical correspondant à la somme des perturbations au cadre *Ra* pivotant sur l'axe *V'* (fig. 14), cadre qui porte les pignons c et *b'* engrenant sur les roues *B* et *C* d'axe *V'*. La roue *C* est celle qui doit assurer le mouvement du Soleil (ici l'aiguille solaire *As)*, alors que la roue *B* est celle qui est entraînée d'un mouvement uniforme.

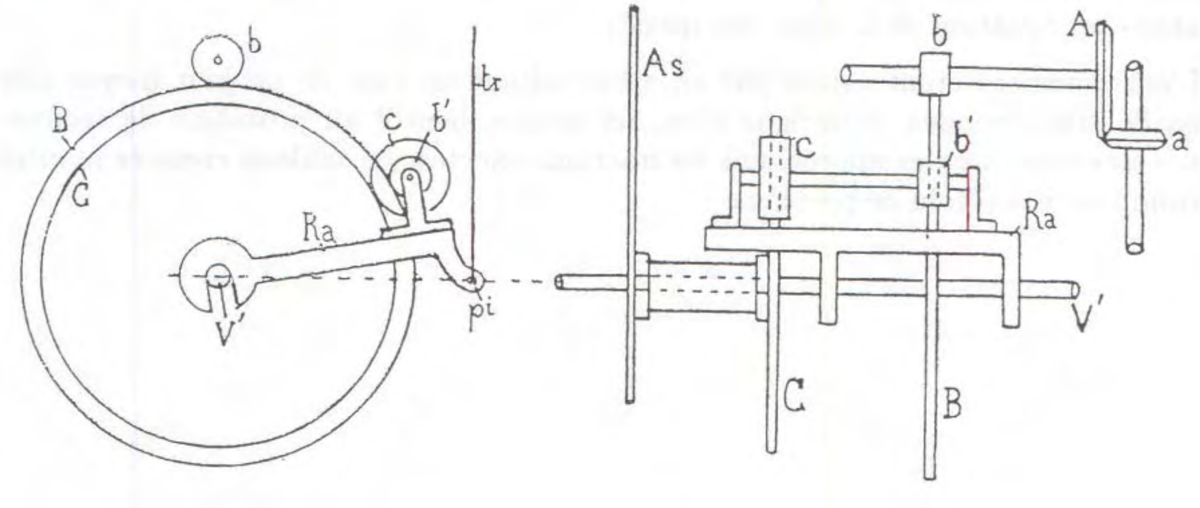


Fig. 14 : Mécanisme pour la réalisation du temps vrai.

Pour bien comprendre le mouvement communiqué à la roue *C*, on peut imaginer que le cadre *Ra* fait un tour complet dans le sens horaire autour de l'axe *V'*, la roue *B* restant immobile. La roue *C* décrit alors $\frac{B}{b} \times \frac{c}{C}$ tours dans le sens positif et Schwilgué s'est arrangé pour que ce produit soit égal à 2 ; mais simultanément, la roue *C* décrit un tour complet dans le sens négatif car l'axe *b'*c fonctionne comme entraîneur. Le résultat final est donc d'un tour positif pour la roue *C*. La correction est donc égale au mouvement de *Ra* mais dans le sens opposé. Il est bien évident que les différents angles, les longueurs des bras de levier, l'échelle adoptée sur les cylindres, . . . tout cela doit être calculé soigneusement et se correspondre.

CONCLUSION

Nous venons de voir quelques unes des prouesses de Schwilgué. Tout détailler nécessiterait un livre complet, sans doute même plus important que celui dans lequel j'ai puisé l'essentiel de cet article: "L'horloge astronomique de la cathédrale de Strasbourg" par Alfred et Théodore Ungerer, publié en 1922 par l'imprimerie alsacienne de Strasbourg.

Mais aujourd'hui, à quoi cela sert-il? Question rituelle de bien des béotiens. En dehors du tourisme, source de richesse pour la ville, pourquoi étudier encore cette horloge archaïque? Une bonne commande informatique réglerait de façon infiniment plus précise tous les problèmes que s'était posé Schwilgué. D'ailleurs, les télescopes géants ne sont-ils pas actuellement programmés pour suivre une trajectoire arbitraire (planète, comète, ...)? Mais voilà ! L'ordinateur reste une boîte noire tandis que les engrenages sont toujours un modèle imagé. Il y a dans les roues dentées quelque chose qui peut donner du sens aux mathématiques, au calcul sur les fractions, à certaines équations, ... sens que ne donnera jamais un programme informatique. Et puis n'oublions pas que les engrenages restent indispensables sur de nombreuses machines, à commencer par le vélo et la voiture (pensez au différentiel) et indispensables aussi dans certains environnements hostiles (hautes températures, milieux corrosifs, ...).

Alors? Alors si vous passez par Strasbourg, allez voir l'horloge. Elle est mise en route tous les jours à 12 h 30. Le prix d'entrée en est modique. Vous pourrez observer à loisir les divers mécanismes et qui sait, revenir dans vos classes avec de chouettes idées de travaux dirigés ou d'activités !