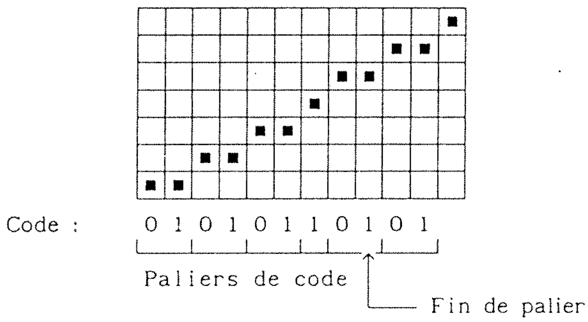
DROITES DISCRÈTES ET CALENDRIERS

Albert TROESCH

Nous allons voir comment un algorithme utilisé dans un traitement d'images pour reconnaître des segments de droite sur un écran d'ordinateur permet de décrire la structure d'un calendrier. Puis, en introduisant une généralisation des bases de numération, nous verrons comment aboutir à un algorithme simple et général de conversion de dates entre calendriers.

1. DROITES DISCRÈTES (voir [9], [10], [12], [13])

Lorsqu'on trace un segment de droite sur un écran d'ordinateur, on trace un ensemble de points tels que celui-ci :



La figure représente l'ensemble des points (x, y) de $\mathbb{Z}^2$ vérifiant

$$y = [7x/12] \text{ pour } 0 \leq x \leq 11$$

le crochet désignant la partie entière.

Plus généralement, si a, b, r sont trois entiers, avec $b > 0$, la droite discrète de caractéristiques (a, b, r) est l'ensemble des points de $\mathbb{Z}^2$ vérifiant

$$y = [(ax + r)/b].$$

La fonction $f(x) = [(ax + r)/b]$ sera appelée *forme quasi-affine de caractéristiques* (a, b, r). Le paramètre r sera appelé le *reste initial* de f. Nous noterons encore $f = (a, b, r)$.

Un segment de droite discrète est l'intersection d'une droite discrète et d'une bande $x_0 \leq x \leq x_1$.

Code : On appelle code en x d'une droite discrète définie par une forme quasi-affine f le nombre entier

$$c_x = f(x + 1) - f(x).$$

Le code d'une droite discrète de caractéristiques (a, b, r) ne peut prendre que les deux valeurs $[a/b]$ et $[a/b]+1$. Il est périodique de période b. On définit de même le code d'un segment de droite discrète. Nous appellerons *longueur* d'un segment de code le nombre de ses éléments.

Paliers : lorsque $a \leq b$ on appellera *palier* de la droite discrète un sous-ensemble de cette droite formé de tous les points situés à une même ordonnée. Ces paliers correspondent aux *paliers de code* : segments de code de longueur maximale extraits du code de la droite, formés d'une suite de 0 (éventuellement vide) et se terminant par 1 (voir figure précédente). Le premier de ces éléments de code sera appelé *début du palier*, le dernier *fin du palier*. Pour un segment de droite le dernier palier peut ne pas contenir de 1 terminal. Pour cette raison nous remplacerons sa longueur réelle par sa *longueur corrigée* c'est -à-dire sa longueur augmentée de 1. Le premier palier et le dernier (s'il n'est pas terminé par 1) sont appelés *paliers externes*, les autres sont appelés *paliers internes*. Si le code contient des paliers internes, un palier externe est dit *complet* si sa longueur (corrigée pour le dernier palier) est strictement supérieure à la longueur du palier interne le plus court. En l'absence de paliers internes c'est le plus long des deux paliers externes qui sera considéré comme complet (en utilisant toujours la longueur corrigée pour le dernier palier).

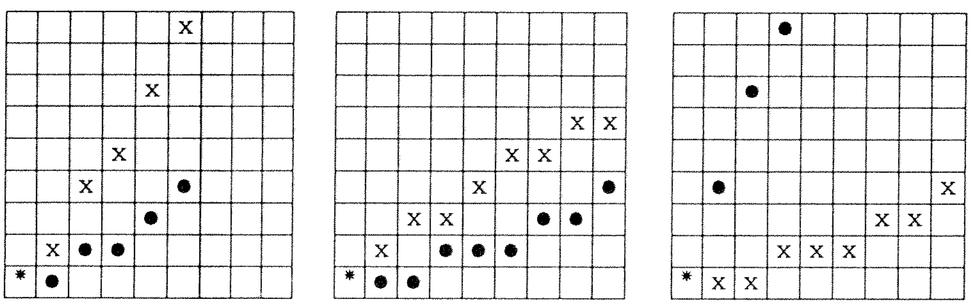
L'algorithme suivant permet de reconnaître si une suite d'entiers est le code d'un segment de droite discrète et dans l'affirmative de trouver ses caractéristiques (on suppose ici que le premier élément de code correspond à $x = 0$) :

ALGORITHME DE RECONNAISSANCE :
Soit c un code (de longueur finie).
Si c contient au plus deux entiers consécutifs
    alors *droite*:=vrai
    sinon *droite*:=faux;
n:=1;
tant que (*droite*=vrai) et (c non constant) faire
    { (Début de l'analyse du code)
    n:=n+1;
    p_n:=plus petit élément de code de c;
    Retrancher p_n à tous les éléments de c (Opération 1)
        (on obtient ainsi un code formé des seuls entiers 0 et 1);
    Si l'élément 1 n'est pas isolé alors
        {
        n:=n+1;
        Echanger les 0 et les 1;   (Opération 2)
        E_n:=vrai;
        }
    sinon E_n:=faux;
    n=n+1;
    Remplacer les paliers de code internes et les paliers de code
    externes complets par leur longueur;   (Opération 3)

g_n:=nombre d'éléments de code négligés
(=longueur du palier initial s'il n'est pas complet, 0 sinon).
Si c contient au plus deux entiers consécutifs
alors *droite*:=vrai
sinon *droite*:=faux;
} (Fin de l'analyse du code)
Si *droite*=vrai alors
{ (Début de la détermination des caractéristiques (a, b, r))
a_n:=c; (c est le code constant obtenu à la fin de l'analyse);
b_n:=1;
r_n:=0;
tant que n >0
{
n:=n-1
a_n:=b_{n+1}; b_n:=a_{n+1};
r_n:=a_n-1-r_{n+1}; (Opération 3)
r_n:=$(r_n - g_{n+1}a_n)$mod b_n; (Correction pour tenir comte des éléments de code négligés : on déplace l'origine au début du segment de code)
n:=n-1;
Si E_n=vrai alors
{
b_n:=b_{n+1};
a_n:=b_{n+1}-a_{n+1} (Opération 2)
r_n:=$b_n - 1$-r_{n+1};
}
n:= $n - 1$;
b_n:= b_{n+1};
a_n:= a_{n+1}+$p_{n+1}b_{n+1}$; (Opération 1)
}
} (Fin de la détermination des caractéristiques)
sinon c n'est pas un code de segment de droite discrète;

Commentaires :

Cet algorithme est basé sur les opérations suivantes :



Transvection $y'=y-x$ Symérie oblique $y'=x-y$ Symétrie $x'=y$, $y'=x$

x : droite initiale • : droite transformée * : point commun

Les deux premières transforment une droite discrète en une droite discrète. La troisième transforme l'ensemble des débuts de paliers d'une droite dont les caractéristiques a et b vérifient $a < b$, en une droite discrète. La deuxième partie de l'algorithme utilise les relations entre les caractéristiques des droites initiales et transformées pour calculer les caractéristiques du segment de droite. On pourra se reporter à [12] et [13] pour plus de détails.

2. APPLICATION À DIVERS CALENDRIERS

Pour une documentation sur les différents calendriers on pourra consulter [1], [2], [3], [7], [11]), et en particulier la suite d'articles parus dans '*L'Ouvert*' sous la plume de J. Lefort [6].

2.1. LES MOIS DES CALENDRIERS JULIEN ET GRÉGORIEN

Appliquons l'algorithme de reconnaissance à la suite des longueurs des mois en commençant par *mars* et en terminant par *janvier*.

Ligne n	Code											Op.	g_n	p_n
1	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31	31			
2	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1		30
3	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	2		
4			2		3			2		3		3	2	
5			0		1			0		1		1		2
6								2				3	2	

La colonne Op. contient le numéro de l'opération utilisée (voir algorithme), p_n est l'entier soustrait à tous les éléments de code dans l'opération 1. et g_n est le nombre d'éléments négligés dans l'opération 3.)

Ligne	a_n	b_n	r_n	Observations	g_n	p_n	Equation
6	2	1	0		2		$y=[2x]$
5	1	2	0	$r_5 \equiv (a_5-1-r_6-g_6 a_5) \pmod{b_5}$		2	$y=[x/2]$
4	5	2	0	$a_4=a_5+p_5 b_5,\ b_4=b_5$	2		$y=[5x/2]$
3	2	5	2	$r_3 \equiv (a_3-1-r_4-g_4 a_3) \pmod{b_3}$			$y=[(2x+2)/5]$
2	3	5	2	$r_2 \equiv (b_2-1-r_3) \pmod{b_2}$		30	$y=[(3x+2)/5]$
1	153	5	2	$a_1=a_2+p_2 b_2,\ b_1=b_2$			$y=[(153x+2)/5]$

Commentaires :

La suite des longueurs des mois depuis le mois 1$^{\text{er}}$ mars est le code de la droite discrète de caractéristiques (153,5,2) :

$$y = [(153x + 2)/5]$$

et par suite à la date $j.m$ il s'est écoulé

$$y = [(153M' + 2)/5] + j - 1$$

jours entiers depuis le 1$^{\text{er}}$ mars précédent, M' étant défini par

$$M' = m - 3 \text{ si } m \geq 3.$$
$$M' = m + 9 \text{ si } m < 3.$$

(Cette formule est donnée par D.-A. Hatcher [5]. Elle est valable aussi pour le mois de février puisque ce mois est entièrement contenu dans le 12$^{\text{e}}$ mois (de 30 jours) décrit par cette forme quasi-affine).

Vérification : Rangs des 1$^{\text{er}}$ de mois par rapport au 1$^{\text{er}}$ mars :

	mar	avr	mai	jun	jul	aou	sep	oct	nov	déc	jan	fév
M'	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	0	31	61	92	122	153	184	214	245	275	306	337
c	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31	31	

Si on pose $M = m$ si $m \geq 3$ et $M = m + 12$ si $m < 3$, on a $M' = M - 3$.
D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} J = [(153(M-3)+2)/5] &= [(153(M+1) - 4{*}153 + 2)/5)] \\ &= [(153(M+1) - 610)/5] \\ &= [30,6(M+1)] - 122. \end{aligned}$$

On retrouve ainsi une formule empirique citée dans [6].

2.2. LA SUITE DES ANNÉES ABONDANTES DU CALENDRIER MUSULMAN

Les années du calendrier musulman ont 354 jours (années communes) ou 355 jours (années abondantes). Ces dernières sont réparties dans un cycle de 30 ans de la manière suivante :

Année : 2 5 7 10 13 16 18 21 24 26 29 (32)
Code : 3 2 3 3 3 2 3 3 2 3 3

Examinons le code de deux tels cycles :

<table>
<tr><th>Ligne</th><th colspan="22">Code</th><th>Op.</th><th>g_n</th><th>p_n</th></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="2"></td><td colspan="4">4</td><td colspan="3">3</td><td colspan="4">4</td><td colspan="4">4</td><td colspan="3">3</td><td colspan="2"></td><td>3</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="2"></td><td colspan="4">1</td><td colspan="3">0</td><td colspan="4">1</td><td colspan="4">1</td><td colspan="3">0</td><td colspan="2"></td><td>1</td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="2"></td><td colspan="4">0</td><td colspan="3">1</td><td colspan="4">0</td><td colspan="4">0</td><td colspan="3">1</td><td colspan="2"></td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td colspan="9"></td><td colspan="11">3</td><td colspan="2"></td><td>3</td><td>2</td><td></td></tr>
</table>

Ligne	a_n	b_n	r_n	Observations	g_n	p_n	Equation
7	3	1	0		1		$y=[3x]$
6	1	3	1	$r_6 \equiv a_6-1-r_7-g_7a_6 \pmod{b_6}$			$y=[(x+1)/3]$
5	2	3	1	$r_5 \equiv b_5-1-r_6 \pmod{b_5}$		3	$y=[(2x+1)/3]$
4	11	3	1	$a_4 \equiv a_5+p_5b_5$, $b_4=b_5$	2		$y=[(11x+1)/3]$
3	3	11	6	$r_3 \equiv a_3-1-r_4-g_4a_3 \pmod{b_3}$			$y=[(3x+6)/11]$
2	8	11	4	$r_2 \equiv b_2-1-r_3 \pmod{b_2}$		2	$y=[(8x+4)/11]$
1	30	11	4	$a_1=a_2+p_2b_2$, $b_1=b_2$			$y=[(30x+4)/11]$

Si on veut que $y(0)=2$:

$$y=[(30x+4)/11]+2=[(30x+26)/11]$$

Vérification :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	2	5	7	10	13	16	18	21	24	26	29
c	3	2	3	3	3	2	3	3	2	3	

Si, au lieu de la suite des rangs des années abondantes, nous étions partis de la suite des longueurs des années, nous aurions eu

Ligne	Code												Op.	g_n	p_n
-1	354	354	355	354	354	355	354	355	354	354	355	...			
0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	...	1		354
1					3			2		3			3	3	

La ligne 1 de ce tableau est la même que celle du tableau précédent; on a donc encore un code de droite discrète et on peut continuer le calcul des caractéristiques :

Ligne	a_n	b_n	r_n	Observations	Equation
1	30	11	4		$y=[(30x+4)/11]$
0	11	30	3	$r_0 \equiv a_0-1-r_1-g_1a_0 \pmod{b_0}$	$y=[(11x+3)/30]$
-1	10631	30	3	$a_{-1}=a_0+p_0b_0$, $b_{-1}=b_0$	$y=[(10631x+3)/30]$

Vérification :

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
n	0	354	708	1063	1417	1771	2126	2480	2835	3189	3543	3898	...
c	354	354	355	354	354	355	354	355	354	354	355	...	...

2.3. LA SUITE DES LONGUEURS DES MOIS DE L'ANNÉE MUSULMANE ABONDANTE

La suite des longueurs des mois de l'année musulmane abondante est la ligne 1 du tableau qui suit. Pour l'année commune le dernier mois a 29 jours.

Ligne	Code												Op.	g_n	p_n
1	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30	30			
2	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1		29
3	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	2		
4				2		2		2		2		3	3	2	
5				0		0		0		0		1	1		2
6							5						3	0	

Ligne	a_n	b_n	r_n	Observations	Equation
6	5	1	0		$y=[5x]$
5	1	5	0	$r_5=a_5-1-r_6-g_6a_5 \pmod{b_5}$	$y=[x/5]$
4	11	5	0	$b_4=b_5$, $a_4=a_5+p_5b_4$	$y=[11x/5]$
3	5	11	5	$r_3=a_3-1-r_4-g_4a_3 \pmod{b_3}$	$y=[(5x+5)/11]$
2	6	11	5	$r_2=b_2-1-r_3 \pmod{b_2}$	$y=[(6x+5)/11]$
1	325	11	5	$b_1=b_2$, $a_1=a_2+p_2b_1$	$y=[(325x+5)/11]$

Avec des numérotations à partir de 0, le rang n d'un jour dans l'année s'obtient à partir du rang m du mois dans l'année et du rang j du jours dans le mois par la formule

$$n = [(325m + 5)/11] + j$$

que l'année soit abondante ou non.

Commentaires :

Dans [5], D.-A. Hatcher donne la formule suivante

$$[(59.2x + 1.02)/2] + j.$$

Notre méthode a les deux avantages suivants sur les traitements classiques
– elle est algorithmique et par conséquent évite d'avoir à procéder par tâtonnement pour trouver les coefficients,
– elle fournit des coefficients entiers.

2.4. LA SUITE DES ANNÉES EMBOLISMIQUES DU CALENDRIER JUIF

Le calendrier juif est basé sur le cycle de Méton, période de 19 années solaires correspondant, avec une assez bonne précision, à 235 lunaisons. Les années comportent 12 mois (années communes) ou 13 mois (années embolismiques).

Les rangs dans ce cycle des années embolismiques sont :

Année :	0	6	8	11	14	17	(19)
Code :		3	3	2	3	3	2

Examinons le code de deux tels cycles.

<table>
<tr><th>Ligne</th><th colspan="14">Code</th><th>Op.</th><th>g_n</th><th>p_n</th></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="3"></td><td colspan="4">4</td><td colspan="3">3</td><td colspan="4">4</td><td>3</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="3"></td><td colspan="4">1</td><td colspan="3">0</td><td colspan="4">1</td><td>1</td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="7"></td><td colspan="7">2</td><td>3</td><td>1</td><td></td></tr>
</table>

Ce qui nous donne les caractéristiques :

Ligne	a_n	b_n	r_n	Observation	Equation
6	2	1	0		$y=[2x]$
5	1	2	1	$r_5=a_5-1-r_6-g_6a_5 \pmod{b_5}$	$y=[(x+1)/2]$
4	7	2	1	$b_4=b_5,\ a_4=a_5+p_5b_4$	$y=[(7x+1)/2]$
3	2	7	1	$r_3=a_3-1-r_4-g_4a_3 \pmod{b_3}$	$y=[(2x+1)/7]$
2	5	7	5	$r_2=b_2-1-r_3 \pmod{b_2}$	$y=[(5x+5)/7]$
1	19	7	5	$b_1=b_2,\ a_1=a_2+p_2b_1$	$y=[(19x+5)/7]$

En partant de la suite des longueurs des années en mois on obtient

<table>
<tr><th>Ligne</th><th colspan="20">Code</th></tr>
<tr><td>-1</td><td>13</td><td>12</td><td>12</td><td>13</td><td>12</td><td>12</td><td>13</td><td>12</td><td>13</td><td>12</td><td>12</td><td>13</td><td>12</td><td>12</td><td>13</td><td>12</td><td>12</td><td>13</td><td>12</td><td>13</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td colspan="3">3</td><td colspan="3">3</td><td colspan="2">2</td><td colspan="3">3</td><td colspan="3">3</td><td colspan="3">3</td><td colspan="2">2</td></tr>
</table>

La ligne 1 est le code duquel nous étions partis précédemment. En continuant le calcul des caractéristiques nous trouvons pour

- la ligne 0 : $y = [(7x + 13)/19]$
- la ligne -1 : $y=[(235x + 13)/19]$.

Toutes les numérotations partant de 0, on obtient ainsi le rang n du mois dans le cycle à partir du rang a de l'année et du rang m du mois dans l'année par

$$n = [(235a + 13)/19] + m.$$

Le lecteur intéressé peut, à titre d'exercice, essayer de trouver la structure des années du calendrier juif en examinant la suite des longueurs des mois. Comme pour le calendrier julien il peut être utile de commencer la suite par un autre mois que le premier de l'année (voir [6] pour une description de ce calendrier ou [13] pour les résultats).

L'algorithme de reconnaissance se programme sans peine, ce qui permet l'automatisation de tous ces calculs.

3. FORMES QUASI-AFFINES ET BASES DE NUMÉRATION QUASI-AFFINES

3.1. QUOTIENT D'UN ENTIER PAR UNE FORME QUASI-AFFINE

On démontre (voir [13]) le résultat suivant.

Proposition

Soit $f(x) = [(ax + r)/b]$ *une forme quasi-affine telle que* $a \geq b \geq 0$. *La fonction* f^{-1} *définie par*

$$f^{-1}(y) = x$$

où x *est l'unique entier tel que* $f(x) \leq x < f(x+1)$ *est une forme quasi-affine. De plus* f^{-1} *est définie par* $f^{-1}(y) = [(by + b - 1 - r)/a]$.

Définition

Soint n *un entier et* f *une forme quasi-affine telle que* $a > b$. *Nous appellerons quotient de* n *par* f *l'entier* $q = f^{-1}(n)$. *L'entier* $R = n - f(q)$ *sera appelé le reste. On a* $0 \leq R \leq [a/b]$.

Exemples :

1) si $f(x) = ax$ alors $f^{-1}(y) = [y/a]$: c'est la division euclidienne;
2) si $f(x) = x - r$ alors $f^{-1}(y) = y + r$.

3.2. BASES QUASI-AFFINES

Définition

Nous appellerons base de numération quasi-affine d'ordre k *une suite de* k *formes quasi affines* $f_1(a_1, b_1, r_1)$ *vérifiant*
1) $a_0 = b_0 = 1$.
2) Pour $0 \leq i \leq k$, $a_i \geq b_i > 0$.
3) Pour $0 \leq i \leq k-1$, $[a_{i+1}/b_{i+1}] > [a_i/b_i]$.

En itérant la division d'un entier par une forme quasi-affine on trouve successivement

$$
\begin{array}{ll}
q_k = f_k^{-1}(n) & R_k = n - f_k(q_k) \\
q_{k-1} = f_{k-1}^{-1}(R_k) & R_{k-1} = R_k - f_{k-1}(q_{k-1}) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
q_1 = f^{-1}(R_2) & R_2 = R_2 - f_1(q_1) \\
q_0 = f_0^{-1}(R_1) = R_1 - r & R_0 = R_1 - f_0(q_0) = R_1 - (R_1 - r + r) = 0.
\end{array}
$$

D'où

$$n = f_k(q_k) + f_{k-1}(q_{k-1}) + \cdots + f_1(q_1) + f_0(q_0).$$

L'entier n sera donc représenté par la suite d'entiers

$$(q_k, q_{k-1}, \dots, q_1, q_0)$$

que nous appellerons le *développement de n dans la base quasi-affine*

$$(f_k, f_{k-1}, \dots f_1, f_0).$$

Exemples :
1) Si $f_i(x) = b^i x$, alors $f_i^{-1}(x) = [x/b^i]$ et on retrouve le développement usuel d'un entier en base b.
2) Si n_i est une suite d'entiers positifs, et si $f_i(x) = n_0 n_1 \dots n_i x$ alors $f_i^{-1}(x) = [x/n_0 n_1 \dots n_i]$ et on retrouve les développements dans des bases généralisées.

4. CONVERSIONS DE DATES

Pour faire les conversions de dates on utilise habituellement un système de référence qui est le *Jour Julien*, rang du jour depuis le

Lundi 1^er janvier de l'an -4712 (Date julienne) (*).

On résout alors le problème de la conversion des dates en donnant, pour chaque calendrier, des formules permettant, à partir d'une date, de calculer le Jour Julien de cette date, et inversement, à partir d'un Jour Julien, de retrouver la date de ce jour.

4.1. LE CALENDRIER JULIEN

Pour une date $j.m.A$ du calendrier julien, le Jour Julien JJ est donné par :

```
si m>=3  A'=A
         m'=m
si m<3   A'=A-1
         m'=m+12
JJ=[(1461A'+6884472)/4]+[(153m'-457)/5]+j-1
```

(*) Nous utilisons ici et dans toute la suite la notation algébrique pour les années, incluant des années négatives et une année 0. C'est le système généralement adopté en astronomie.

C'est-à-dire

$$\boxed{\begin{array}{ll} JJ = f_2(A') + f_1(m') + f_0(j) & \\ & f_2 = (1461, 4, 6884472) \\ \text{avec} & f_1 = (153, 5, -457) \\ & f_0 = (1, 1, -1). \end{array}}$$

Ainsi (A', m', j) est le développement de JJ dans la base (f_2, f_1, f_0). Inversement, on déduit donc (a', m', j) de la donnée de JJ par les formules

$$\boxed{\begin{array}{lll} A' = f_2^{-1}(JJ) & = [(4JJ - 6884469)/1461] \\ R_2 = JJ - f_2(A') & \\ m' = f_1^{-1}(R_2) & = [(5R_2 + 461)/153] \\ R_1 = R_2 - f_1(m') & \\ j = f_0^{-1}(R_1) & = R_1 - 1. \end{array}}$$

REMARQUES :

La forme f_0 a pour rôle de déplacer l'origine de la numérotation des jours du mois de 0 à 1. La forme f_1 découle de la formule de 2.1. après un changement de numérotation des mois :

$$[(153(m' - 3) + 2)/5] = [(153m' - 457)/5].$$

En 2.1. nous n'avions pas tenu compte du mois de février : c'est sans importance pour le calcul de JJ étant donné que les mois décrits par f_1 ont tous soit 30 soit 31 jours; février est donc entièrement contenu dans le 12ᵉ mois décrit par f_1.

En appliquant l'algorithme de 1. à la suite des longueurs des années : 365 365 365 366, on obtient la forme quasi-affine $f_2'(1461, 4, 0)$. On a donc $f_2(x) = JJ_0 + f_2'(x) = [(1461x + 4JJ_0)/4]$ où JJ_0 est une constante à déterminer, constante dépendant de l'origine du Jour Julien.

Etalonnage :

On a alors pour le Jour Julien du 1.1.-4712 :

$$0 = JJ_0 + f_2'(-4713) + f_1(13) + f_0(1) = JJ_0 - 1721118.$$

D'où $JJ_0 = 1721118$, et $f_2 = (1461, 4, 6884472)$.

Le lecteur pourra vérifier, en appliquant les formules données, que JJ_0 est le Jour Julien du 1.3.0 (remplacer f_2 par f_2' revient à déplacer l'origine du Jour Julien à cette date).

6.2. LE CALENDRIER GREGORIEN

Le Jour Julien de la date grégorienne $j.m.A$ s'obtient par les formules :

si $m \geq 3$	$A'=A$	
	$m'=m$	
si $m<3$	$A'=A-1$	
	$m'=m+12$	
$s=[A''/100]$		(Nombre de siècles)
$A'=A''-100s$		(Nombre d'années dans le siècle)
$JJ=[(146097s+6884480)/4]+[1461A'/4]+[(153m'-457)/5]+j-1$		

ou encore

$$JJ=f_3(s)+f_2(A')+f_1(m')+f_0(j)$$

avec
$$f_3=(146097,4,6884480)$$
$$f_2=(1461,4,0)$$
$$f_1=(153,5,-457)$$
$$f_0=(1,1,-1)$$

Ainsi (s, A', m', j) est le développement de JJ dans la base (f_3, f_2, f_1, f_0). Inversement on obtient donc (s, A', m', j) à partir de JJ par

$$\begin{aligned}
s &= f_3^{-1}(R_4) &&= [(4R_4-6884477)/146097] \\
R_3 &= R_4-f_3(s) &&= R_4-[(146097s+6884480)/4] \\
A' &= f_2^{-1}(R_3) &&= [(4R_3+3)/1461] \\
R_2 &= R_3-f_2(A') &&= R_3-[1461a'/4] \\
m' &= f_1^{-1}(R_2) &&= [(5R_2+461)/153] \\
R_1 &= R_2-f_1(m') &&= R_2-[(153m'-457)/5] \\
j &= f_0^{-1}(R_1) &&= R_1-1\ .
\end{aligned}$$

REMARQUES :

La structure de ce calendrier se distingue de celle du calendrier julien par l'ajout d'une forme f_3. En appliquant l'algorithme de reconnaissance à la suite des longueurs des siècles : 36524 36524 36524 36525, on obtient la forme $f_3' = (146097, 4, 0)$. On a donc

$$f_3(x) = JG_0 + f_3(x)[(146097x + 4JG_0)/4]$$

où JG_0 est une constante à déterminer.

Etalonnage :

Le 15.10.1582 de ce calendrier correspond au 5.10.1582 dans le calendrier julien. On obtient ainsi dans le calendrier grégorien

$$JJ(15.10.1582) = JG_0 + f_3'(15) + f_2(82) + f_1(10) + f_0(15) = JG_0 + 578041$$

et dans le calendrier julien

$$JJ(5.10.1582) = 2299171.$$

D'où $JG_0 = 1721120$ et $f_3 = (146097, 4, 6884480)$.
Ici encore on peut vérifier que JG_0 est le Jour Julien du 1.3.0 de ce calendrier.

6.3. CALENDRIER MUSULMAN

Le Jour Julien d'une date musulmane $j.m.A$ s'obtient par la formule

$$\boxed{JJ = [(10631A + 58442583)/30] + [(325m - 320)/11] + j - 1}$$

ou encore

$$\boxed{\begin{array}{ll} JJ = f_2(A) + f_1(m) + f_0(j) & \\ & f_2 = (10631, 30, 58442583) \\ \text{avec} & f_1 = (325, 11, -320) \\ & f_0 = (1, 1, -1) \end{array}}$$

Ainsi (A, m, j) est le développement de JJ dans la base (f_2, f_1, f_0). Inversement à partir du Jour Julien on retrouve donc la date musulmane par

$$\boxed{\begin{array}{lllll} A & = & f_2^{-1}(JJ) & = & [(30JJ - 58442554)/10631] \\ R_2 & = & JJ - f_2(a) & = & JJ - [(10631A + 58442583)/30] \\ m & = & f_1^{-1}(R_2) & = & [(11R_2 + 330)/325] \\ R_1 & = & R_2 - f_1(m) & = & R_2 - [(325m - 320)/11] \\ j & = & f_0^{-1}(R_1) & = & R_1 - 1\ . \end{array}}$$

REMARQUES :

Nous avons obtenu en 2. la forme f_1 mais avec un reste égal à 5. Ici nous numérotons les mois à partir de 1 au lieu de 0, ce reste devient donc $r = -325 + 5 = -320$. Nous avions également obtenu f_2 mais avec un reste égal à 3. Notons cette forme f_2'. On a alors

$$f_2(x) = JM_0 + f_2'(x) = [(10631x + 30JM_0 + 3)]$$

où JM_0 est une constante à déterminer.

Etalonnage :
Le 1.1.1. du calendrier musulman correspond au 16.7.622 dans le calendrier julien. Calculons $JJ(1.1.1)$:

$$JJ(1.1.1) = JM_0 + f_2'(1) + f_1(1) + f_0(1) = JM_0 + 354$$
$$JJ(16.7.622) = 1948440 \text{ (Calendrier julien)}.$$

On a donc $JM_0 = 1948440 - 354 = 1948086$ et $f_2 = (10631, 30, 58442583)$.
On vérifie que JM_0 est le Jour Julien du 1.1.0. dans ce calendrier.

CONCLUSION

Du fait de sa généralité et de sa nature algorithmique le procédé employé offre une très grande sécurité dans l'établissement des formules de conversion de date. Il s'applique à la plupart des calendriers (il faut cependant qu'ils soient suffisamment réguliers pour que leur structure puisse être décrite par une suite de formes quasi-affines).

La procédure à suivre est la suivante :
– On commence par appliquer l'algorithme de reconnaissance aux différents cycles qui décrivent le calendrier pour déterminer ses formes de structure. On obtient alors une base quasi-affine qui donne le Jour Julien à une constante près.
– On détermine la constante par étalonnage en calculant le Jour Julien d'une date dont on connaît la date correspondante dans un calendrier déjà traité, ou dont on connaît le Jour Julien.
– Une date est alors (à quelques modifications près) le développement du Jour Julien dans cette base quasi-affine.

Les calendriers moins réguliers peuvent tout de même être traités partiellement par cette méthode. Mais celle-ci doit alors être adaptée à chaque cas. C'est ce que j'ai fait dans [13] pour le calendrier juif. Par ailleurs, j'ai traduis ces idées en un programme en Pascal dont j'ai fait la démonstration au cours de l'atelier.

BIBLIOGRAPHIE

[1] COUDERC P.-*Le calendrier.* PUF 203 (1946).

[2] DUMOULIN C. - PARISOT J.-P.- *Astronomie pratique et informatique.* Masson (1987).

[3] GINZEL F.-K.- *Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie.* (1911) J.-C. Hindrichs'sche Buchhandlung Leipzig.

[4] HATCHER D.-A.- *Simple formulae for Julian Day Numbers and Calendar Dates.* Q Jl R. astr. Soc. (1984) 25, 53-55.

[5] HATCHER D.-A.- *Generalized Equations for Julian Day Numbers and Calendar Dates.* Q. Jl R. astr. Soc. (1985) 26, 151-155.

[6] LEFORT J.- *La grande Saga des Calendriers. 'L'Ouvert'* , Journal de l'A.P.M.E.P. d'Alsace et de l'I.R.E.M. de Strasbourg, n° 52, ..., 57, 64 et 67.

[7] MAHMOUD M.- *Mémoire sur les calendriers judaïque et mulsulman.* Mémo. des sav. étrang. de l'Acad. roy. de Belgique, T. XXVI (1855).

[8] PARISOT J.-P.- *Additif to the paper of D.-A. HATCHER : 'Generalized equations for Julian Day Numbers and Calendar Dates.* Q. Jl R. astr. Soc.

[9] REVEILLES J.-P.- *Les paliers des droites de Bresenham.* Pixim 88, pp. 81-101;

Ed. Hermès (1988).

[10] REVEILLES J.-P.- *Géométrie discrète. Calculs en nombres entiers et algorithmique.* Thèse d'Etat, soutenue à Strasbourg le 20-12-1991.

[11] SUACHER F. - PARISOT J.-P.- *Les calendriers liturgiques et les irrégularités de la date de Pâques.* Revue de l'Association Astronomique de Franche-Comté 18 (février 1988).

[12] TROESCH A.- *Interprétation géométrique de l'algorithme d'Euclide et reconnaissance de segments.* I.R.M.A. (1990) 426/P-239 (à paraître dans Theoretical Computer Science, juin 1993).

[13] TROESCH A.- *Droites discrètes et calendriers.* I.R.M.A. (1992) 487/P-282.

PEUTINGER (Conrad), antiquaire allemand, né et mort à Augsbourg (1465-1547). Il devint, en 1493, syndic de sa ville natale, et fut nommé conseiller impérial par l'empereur Maximilien Ier. Nous citerons, parmi ses ouvrages, les *Inscriptiones romanæ* (1520). Ce qu'on appelle la *Table de Peutinger* est une carte des voies de l'empire romain, rédigée vers le IIIe siècle, mais conservée dans une copie de 1264. Cette copie fut trouvée à Worms par Conrad Celtes, qui la donna à Peutinger. Welser en donna des fragments en 1591. L'original de cette carte, trouvé en 1714, est à la bibliothèque de Vienne et a été édité par Mannert (Leipzig, 1824); par Desjardins (Paris, 1869-1876); par Miller [aux 2/3] (Ratisbonne, 1888).

Peutinger.

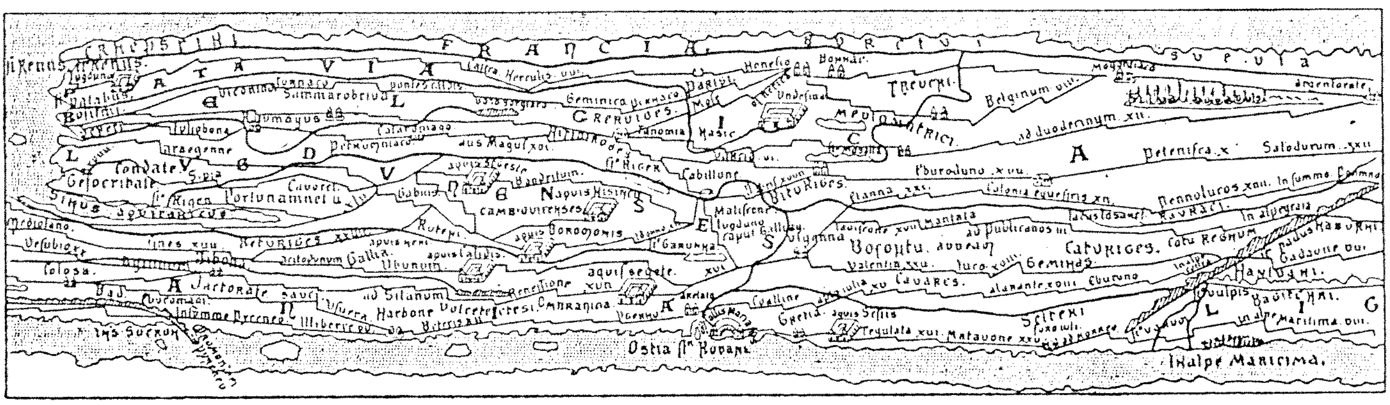


Table de Peutinger.