A VOS STYLOS

PROBLÈME 24

Énoncé

Un faisceau de droites parallèles fournit un exemple de partition du plan en droites.

a) Existe-t-il une partition du plan en cercles (non dégénérés, c'est-à-dire de rayon ni nul ni infini) ?

b) Existe-t-il une partition du plan en figures formées chacune de deux cercles (distincts et non dégénérés) tangents intérieurement ou extérieurement ?

Solution

La réponse aux deux questions est non. Pour le a) M. Renfer (Strasbourg) propose la démonstration suivante : il suffit d'établir que toute partition du plan en cercles (de rayons finis) comporte au moins un cercle de rayon nul. Soit C_0 un cercle d'une telle partition; on construit par récurrence une suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de cercles de la partition en prenant pour C_{n+1} le cercle passant par le centre de C_n ; C_{n+1} est intérieur à C_n (avec égalité si C_n est de rayon nul), et a un rayon au plus égal à la moitié de celui de C_n. Les disques fermés limités par les C_n forment une suite décroissante de compacts non vide; leur intersection est donc non vide; comme son diamètre est nul, elles est réduite à un singleton $\{\Omega\}$. Celui des cercles de la partition qui passe par $\{\Omega\}$ est intérieur à tous les C_n et possède donc un rayon nul.

Pour le b), M. Renfer remarque que la même méthode est facile à adapter.

Nous avons également reçu de M. Kern (Strasbourg) une magnifique solution, sous forme d'un théorème très général dont les réponses négatives aux deux questions posées sont des corollaires. Voici ce théorème.

Soit $\mathcal{P}$ une partition du plan (ou de $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 2$) en ensembles fermés connexes. Si, parmi les éléments de $\mathcal{P}$ se trouve un compact, il s'y trouve aussi un compact de complémentaire connexe.

Démonstration. Le complémentaire d'une partie E du plan sera noté E^c ; rappelons qu'un ensemble connexe rencontrant E et E^c rencontre également la frontière de E. Si K est un compact, il est inclus dans une boule; une et une seule des composantes connexes de l'ouvert K^c est un voisinage de l'infini. Nous noterons $\tilde{K}$ cette composante; les autres, s'il y en a, sont bornées. Le complémentaire $\hat{K}$ de $\tilde{K}$ est compact; la frontière de $\tilde{K}$ est incluse dans K.

Notons $\mathcal{P}'$ l'ensemble, non vide par hypothèse, des éléments compacts de $\mathcal{P}$. Si $K_1 \in \mathcal{P}'$ et $K_2 \in \mathcal{P}'$ sont tels que $\tilde{K}_1 = \tilde{K}_2$, tout point de la frontière de $\tilde{K}_1$ est à la fois dans K_1 et K_2, donc, $\mathcal{P}$ étant une partition, $K_1 = K_2$. Il en résulte que la relation définie sur $\mathcal{P}'$ par

$$K_1 \prec K_2 \Longleftrightarrow \tilde{K}_1 \subset \tilde{K}_2$$

est une relation d'ordre. Soit $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathcal{P}'$ telle que l'ordre $\prec$ restreint à $\mathcal{A}$ soit un ordre total. Quand K décrit $\mathcal{A}$, les ouverts $\tilde{K}$ forment une famille totalement ordonnée par inclusion; les compacts $\hat{K}$ aussi, donc leur intersection n'est pas vide : soient $x \in \bigcap_{K \in \mathcal{A}} \hat{K}$ et L l'élément de $\mathcal{P}$ passant par x. Pour $K \in \mathcal{A}$, L ne peut rencontrer $\tilde{K}$ (connexe et rencontrant à la fois $\tilde{K}$ et son complémentaire, il devrait aussi rencontrer sa frontière, donc K, donc être égal à K, et K rencontrerait $\tilde{K}$, ce qui est absurde). Ceci a deux conséquences : d'abord, L est compact; ensuite, $L^c \supset \tilde{K}$, donc $\tilde{L} \supset \tilde{K}$ et $K \prec L$. Nous avons ainsi montré que L est un majorant de $\mathcal{A}$; il en résulte que l'ordre $\prec$ sur $\mathcal{P}'$ est inductif.

Le lemme de Zorn affirme donc que $\mathcal{P}'$ a un élément maximal, M. C'est un compact non vide. Si Ω était une composante connexe bornée de l'ouvert M^c et y un point de Ω, l'élément de $\mathcal{P}$ passant par y serait inclus dans Ω (sinon il rencontrerait la frontière de Ω, donc M), ce serait donc un compact N tel que $\tilde{n} \supset \Omega^c \supset \tilde{M}$. Comme en outre $\Omega^c \neq \tilde{M}$, ceci contredirait la maximalité de M. La seule composante connexe de M^c est donc $\tilde{M}$ et le théorème est établi.

PROBLÈME 25

Énoncé

Etant donné un triangle, trouver tous les centres
a) des ellipses inscrites dans le triangle,
b) des ellipses ex-inscrites dans le triangle,
c) des hyperboles dont une branche est tangente aux trois côtés du triangle,
d) des hyperboles dont une branche est tangente à deux côtés du triangle et l'autre branche au troisième.

Indication

On peut prendre comme paramètres les points de contact de la conique avec deux des côtés.

PROBLÈME 26

Énoncé

Etant donnés n points distincts sur un cercle, on trace un polygone ayant ces points pour sommets. On suppose que p couples de côtés, et p seulement, ont un point commun autre qu'un sommet, et qu'aucun triplet de côtés n'a de point commun.

1) Ce polygone partage l'intérieur du cercle en r régions. Calculer r en fonction de n et de p.

2) Pour un nombre n donné de côtés, déterminer la valeur maximum du nombre p des points d'intersection des côtés.

PROBLÈME 27

Énoncé

Soient α et x_0 des nombres strictement positifs. On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\alpha}{x_n}.$$

Donner un équivalent de x_n quand n tend vers l'infini.

La nouvelle algèbre de Viète (traduction de Vaulézard)

Il est possible de quelque poinct donné mener une ligne droicte, de laquelle le segment compris entre deux autres lignes donnees soit donné.

Cecy est une concession tres fameuse, mais elle est seulement αιτημα *demande et* δυσμηχανον *de difficile invention, laquelle jusques à present a esté dite* αλογα *sans raison ; elle solut* εντεχνῶς *artificiellement le probleme mesographic, comprenant la section de l'angle en trois parties egales, l'invention du costé de l'heptagone, et autres quelconques problemes tombant és formules d'equations, ausquelles les cubes sont comparés aux solides, le quarré-quarré, au plans-plans, soient purs, soient avec affection.*

Que l'angle puisse estre divisé en trois parties egales, si une ligne droite est menée d'un point donné, de laquelle le sequent compris entre deux autres donnés soit donné, il est evident et sera demonstré.

Soit l'angle donné DBC sur le costé prolongé DB, et au poinct B estant elevée la perpendiculaire BH ; et du mesme poinct B, comme centre descrit le cercle AED, je dis que si du point C ou le costé BC est coupé par la circonference du cercle est menée une ligne droite de laquelle le segment compris entre les lignes BA BF, est egal au diametre, ED, je dis que l'angle BFH est egal au tiers de l'angle DBC.