LEGENDRE ET LE POSTULAT DES PARALLELES

Gerardo AVILA

1.— INTRODUCTION

Bien des gens pensent que les mathématiciens les plus compétents sont assez sûrs dans leurs activités professionnelles et ne commettent pas d'erreurs. Ceci est faux; les mathématiciens qui s'adonnent à la recherche font fréquemment des erreurs qui restent enregistrées dans leurs écrits et sont découvertes et corrigées plus tard soit par eux-mêmes soit par d'autres mathématiciens dans de nouvelles publications. Ceci est très naturel puisque le progrès scientifique ne suit pas une trajectoire rectiligne faite seulement d'avancées. Au contraire, le chemin des découvertes est tortueux, plein de réussites et d'échecs. Et l'étude de l'évolution des idées, du développement des connaissances qui amènent aux découvertes est très souvent riche d'enseignement.

L'objet de cet article est justement de décrire l'un des épisodes dont le mathématicien **Legendre** fut le protagoniste et qui renferme quelques leçons de grande valeur pédagogique. Le fait que nous allons exposer est une belle tentative de démonstration de ce qu'on appelle "le postulat des parallèles". Pendant de nombreuses années **Legendre** publia et republia ses "démonstrations", réparant sempiternellement ses erreurs antérieures alors qu'en vérité ce qu'il tentait de démontrer était indémontrable. Cependant, suivre son raisonnement dans une de ces "démonstrations" est une tâche intéressante autant à cause des arguments de son génie créateur qu'à cause des savantes leçons que nous pouvons en tirer.

2.— QUI FUT LEGENDRE?

Adrien Marie Legendre (1752-1833) fut un illustre mathématicien français des XVIII^{e} et XIX^{e} siècles. Bien qu'il ne fut pas tellement riche, il possédait des ressources suffisantes pour se consacrer à l'étude et à la recherche sans avoir à se préoccuper de "gagner sa vie". Mais il ne resta jamais sans avoir un emploi rémunéré puisqu'il occupa différents postes publics comme professeur, enseignant ou assistant scientifique. Il fit partie, par exemple, de la commission chargée de proposer un système rationnel de poids et mesure dont le travail aboutit au système métrique comme nous le connaissons aujourd'hui.

Legendre effectua de nombreuses études de grande importance en mathématique pure et appliquée. C'est ainsi que son nom est lié aussi bien à des questions d'astronomie, de mécanique et de physique mathématique qu'à des questions d'analyse, d'équations différentielles et de théorie des nombres.

Avec l'aimable autorisation de la "Sociedade Brasileira de Matemática" qui a publié cet article dans la 'Revista do Professor de matemática' n° 22 (3° trimestre 1992). Traduction de Jean Lefort

En plus d'être un scientifique de grand mérite, Legendre fut aussi un véritable "professeur" qui alla jusqu'à se préoccuper des questions relatives à l'enseignement élémentaire. Dans ce domaine, son travail le plus important fut un livre intitulé "*Eléments de Géométrie*" publié à la fin du XVIII^{e} siècle et qui domina l'enseignement de la géométrie pendant près de 100 ans. Ce livre fut très populaire, car il était bien plus accessible aux étudiants que l'antique et difficile traité original d'**Euclide**. A tel point que le livre de Legendre, outre son usage dans les écoles françaises fut traduit dans différents pays y compris le Brésil où il fut largement utilisé, atteignant plus de 25 éditions.

Les diverses tentatives que fit Legendre pour démontrer le postulat des parallèles apparaissent, de 1794 à 1833, dans diverses éditions successives de son livre cité ci-dessus. En 1833, année de sa mort, on voit également apparaître sa monographie : "*Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles d'un triangle*".

3.— EUCLIDE ET LE POSTULAT DES PARALLÈLES

Il existe plusieurs formulations équivalentes du postulat des parallèles parmi lesquelles nous donnerons d'abord une des plus simples et celle qui est le plus souvent donnée dans les livres. Bien qu'elle ait été déjà connue de Proclus (410-485) dans l'antiquité, elle ne fut vulgarisée aux temps modernes que par un livre du mathématicien écossais **John Playfair** (1748-1819) dont elle porte le nom :

Postulat de Playfair : *Par un point extérieur à une droite on ne peut tracer qu'une droite parallèle à la droite donnée.*

Le postulat des parallèles est aussi connu comme "le 5^{e} postulat d'Euclide" puisqu'il occupe justement la dernière place d'un groupe de cinq postulats énoncés dans "les éléments d'Euclide".

Parlons un peu des **Eléments** d'Euclide, écrits aux alentours de l'année 300 av. J.-C. Cette œuvre est un ensemble de treize unités ou chapitres, chacun d'eux étant appelé "livre". Livre I, Livre II, Livre III etc...jusqu'au livre XIII. Il s'agit d'une des œuvres les plus réputées de l'histoire des sciences qui rassemble presque tout ce qui se savait en mathématiques à l'époque où il fut écrit, non seulement en géométrie mais aussi en arithmétique et en algèbre bien que la présentation de ces disciplines soit aussi faite en un langage fortement géométrique. Cet ouvrage fut largement utilisé dans les écoles jusqu'il y a à peu près 200 ans.

Ce livre donne une présentation admirablement bien faite de la géométrie, très bien organisée sur le plan de la logique. Les résultats apparaissent comme "propositions" (nous dirions aujourd'hui "théorèmes") chacune d'elles étant démontrée en utilisant les précédentes. Ainsi chaque proposition dépend d'une ou plusieurs propositions antérieures de sorte que, pour que le processus puisse commencer, il est nécessaire de formuler quelques propositions initiales que l'on donne sans démonstrations. Ce sont ce qu'on appelle des "postulats" ou "axiomes". Euclide formule cinq postulats, dont les quatre premiers traduits et interprétés dans le

langage actuel peuvent être énoncés ainsi :

1) *Par deux points passe une droite et une seule.*

2) *A partir d'un point quelconque d'une droite donnée, il est possible de construire un segment de longueur donnée sur la droite donnée.*

3) *Il est possible de tracer un cercle de centre et de rayon donnés.*

4) *Tous les angles droits sont égaux.* (Euclide définit l'angle droit comme étant égal à l'angle formé par deux droites qui se coupent de manière à former quatre angles égaux.)

Finalement le 5^{e} postulat est ainsi énoncé par Euclide :

Postulat d'Euclide : *Si une droite t coupe deux autres droites r et s (toutes coplanaires) de manière à former d'un même côté de t deux angles internes dont la somme est inférieure à deux angles droits, alors les droites r et s, prolongées suffisamment se rencontrent de ce même côté de t où la somme des angles internes est moindre que deux droits.*

Bien que plus compliqué que le postulat de Playfair, cet énoncé est clair si on l'accompagne d'une observation attentive de la figure 1.

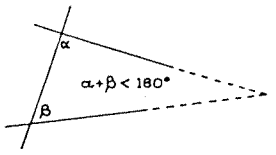

Figure 1

Dorénavant nous indiquerons par (P) et (E) les énoncés respectifs de Playfair et d'Euclide du postulat des parallèles. Nous démontrerons qu'ils sont équivalents. Pour cela nous aurons besoin des propositions 16, 17 et 27 d'Euclide. Nous allons les énoncer et les démontrer.

Proposition 16 (Théorème de l'angle externe). *Tout angle externe d'un triangle est plus grand que l'un quelconque des angles internes non adjacents (à l'angle externe considéré).*

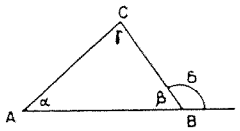

Figure 2

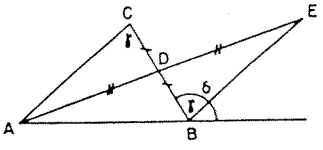

Figure 3

Cela signifie, en se reportant à la figure 2 que $\delta > \alpha$ et $\delta > \gamma$. Observez que nous ne pouvons pas écrire $\delta = \alpha + \gamma$ ce qui n'a pas encore été prouvé. D'autant plus que c'est une autre façon de formuler le postulat des parallèles que nous appellerons (P3) plus loin.

Démonstration : Dans le triangle ABC (fig. 3), soit D le milieu du segment BC. Prolongeons AD d'une largeur $DE = AD$ (ce qui est possible d'après le

2^e postulat). Les triangles ACD et EBD sont égaux, ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux (4^e proposition d'Euclide), ce qui prouve en particulier que l'angle γ est égal à l'angle EBC et par suite $\delta > \gamma$, ce que nous voulions démontrer.

Reste à prouver que $\delta > \alpha$. Ce que l'on fait par le même raisonnement appliqué cette fois à l'égalité des triangles ACD et BED (fig. 4) à cause de la construction des points $D(AD = BD)$ et $E(CD = DE)$.

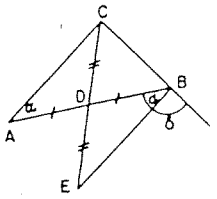

Figure 4

Proposition 17 *La somme de deux angles d'un triangle est toujours moindre que deux droits.*

Démonstration : D'après la figure 5 et en utilisant la proposition précédente, $\alpha < \delta$, et comme $\beta + \delta = \varpi$ (ϖ signifie toujours deux angles droits ou un angle plat), nous avons $\alpha + \beta < \delta + \beta = \varpi$; ce que nous voulions démontrer.

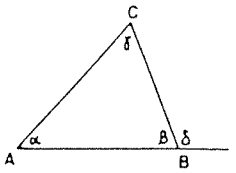

Figure 5

Proposition 27 *Soient deux droites r et s (coplanaires) coupées par une troisième t. Si les angles alternes-internes α et β sont égaux (fig. 6) les droites r et s sont parallèles.*

Démonstration : Supposons que r et s se coupent, disons en un point C. Nous aurions alors un triangle ABC donc les angles γ et β auraient une somme inférieure à deux droits (d'après la proposition 17), c'est-à-dire $\gamma + \beta < \varpi$.

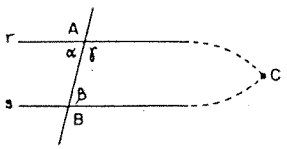

Figure 6

Mais $\beta = \alpha$ d'où nous tirons $\gamma + \alpha < \varpi$; ce qui est absurde. Nous sommes ainsi conduit à conclure que r et s ne se coupent pas; par suite elles sont parallèles comme nous voulions le démontrer.

Il est intéressant d'observer que cette proposition 27 garantit que *par un point P extérieur à une droite r on peut mener une parallèle à cette droite.* Pour cela, il suffit de construire par P une droite t rencontrant r en Q (fig. 7) et une droite s faisant avec t un angle α tel que $\alpha + \beta = \varpi$.

Comme $\alpha + \gamma = \varpi$; nous voyons que $\gamma = \beta$. Alors r et s ne peuvent se couper sous peine de contredire la proposition 27.

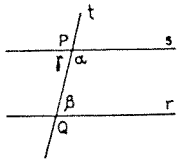

Figure 7

Ce que nous venons d'observer est important. Euclide savait qu'il n'avait pas besoin de postuler la possibilité de *tracer une parallèle à une droite donnée par un point extérieur à cette droite.* Il savait que cela pouvait être démontré comme de fait il le démontra!

Euclide n'utilise le postulat des parallèles que dans sa proposition 29 où il démontre que *deux parallèles coupées par une transversale forment des angles alternes-internes égaux.* Ici seulement il a besoin du postulat des parallèles! La géométrie avait déjà atteint un grand degré de développement et de sophistication au temps d'Euclide.

Observez encore, cher lecteur, que l'énoncé de Playfair ne dit pas que "par un point extérieur à une droite *on peut tracer une*" mais qu'il dit que "par un point extérieur à une droite **on ne peut tracer qu'une** ...". La possibilité de tracer une parallèle, nous y insistons à nouveau, est déjà garantie par la proposition 27.

4.— L'EQUIVALENCE DE (P) ET DE (E)

Nous pouvons maintenant établir l'équivalence de (P) et de (E).

La preuve de (P) $\Longrightarrow$ (E). Nous supposons vraie la proposition (P) et nous voulons démontrer la proposition (E). Soient r et s deux droites coupées par une transversale t (fig. 8) avec $\alpha+\beta < \varpi$. Nous voulons prouver qu'elles se rencontrent en un point P. Par le point A traçons une droite r' telle que les angles alternes-internes α' et γ soient égaux, de sorte que, à cause de la proposition 27, r' et s sont parallèles. Comme $\alpha' = \gamma$, $\gamma + \beta = \varpi$, nous avons $\alpha' + \beta = \varpi$. De ceci et de $\alpha + \beta < \varpi$ nous en concluons que $\alpha < \alpha'$. Alors r et r' sont des droites distinctes passant par le même point A et comme r' est parallèle à s, d'après (P), r ne peut pas être parallèle à s et par suite rencontre s en un certain point P, comme nous voulions le démontrer.

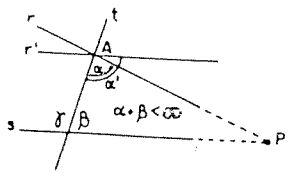

Figure 8

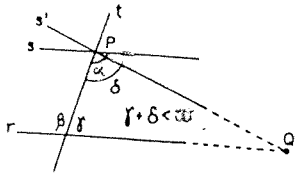

Figure 9

La preuve de (E) $\Longrightarrow$ (P). Etant donnés une droite r et un point P non sur r, nous voulons prouver que par P on ne peut mener qu'au plus une parallèle à la droite r. Nous savons déjà que par P il passe une droite s parallèle à la droite r, que l'on construit comme nous l'expliquons juste après la démonstration de la proposition 27 (fig. 9), avec $\alpha = \beta$ de manière que $\alpha + \gamma = \varpi$. Toute autre droite passant par

P, telle que s' fera un angle $\delta < \alpha$, où $\delta + \gamma < \varpi$. En conséquence, à cause de (E), s' devra couper r en un point Q. Ce qui prouve que par P il ne passe qu'au plus une parallèle à la droite r ce que nous voulions démontrer.

5.— LA "DEMONSTRATION" DE LEGENDRE

Nous allons noter (P3) un autre énoncé du postulat des parallèles, équivalent à (P) et qui sera utilisé dans la "démonstration" de Legendre.

Enoncé (P3) *La somme des angles intérieurs d'un triangle quelconque vaut* ϖ.

Il est facile de vérifier que (P) $\Longrightarrow$ (P3). En effet, étant donné un triangle quelconque ABC traçons par son sommet C une droite r parallèle au côté AB (fig. 10).

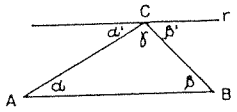

Figure 10

De cette façon, nous formons les angles α' et β' respectivement égaux aux angles α et β du triangle ABC. Nous obtenons ainsi $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma = \varpi$; cqfd.

La démonstration du fait que (P3) $\Longrightarrow$ (P) est plus longue et nous ne la ferons pas ici. (Le lecteur intéressé pourra la trouver dans [1] page 103 et suivantes. Dans cette référence, l'auteur appelle le postulat de Playfair "Postulat de Hilbert".)

Avec le théorème suivant (que nous énonçons sous forme de "lemme") nous entrons dans la "démonstration" de Legendre du postulat des parallèles.

Lemme de Legendre *Etant donné un triangle quelconque, il est toujours possible de construire un nouveau triangle dont la somme des angles intérieurs est égal à la somme des angles intérieurs du triangle donné et dans lequel un des angles est inférieur ou égal à la moitié d'un angle donné du triangle initial.*

Explication : L'idée est la suivante : étant donné un triangle quelconque ABC, nous souhaitons montrer qu'il est possible de construire un nouveau triangle $A_1B_1C_1$ tel que

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha + \beta + \gamma \text{ et } \alpha_1 \leq \alpha/2.$$

Une fois ceci démontré, nous pouvons construire un deuxième triangle $A_2B_2C_2$ tel que :

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \text{ et } \alpha_2 \leq \alpha_1/2$$

et en reportant

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = \alpha + \beta + \gamma \text{ et } \alpha_2 \leq \alpha/2^2.$$

En continuant ce processus de construction de triangles successifs, nous arrivons à un triangle $A_nB_nC_n$ tel que

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = \alpha + \beta + \gamma \text{ et } \alpha_n \leq \alpha/2^n \qquad (1).$$

De cette manière nous pouvons obtenir un angle α_n aussi petit que nous voulons, en prenant n assez grand, de façon que dans la somme $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n$ l'angle α_n ne compte que très peu, la contribution essentielle provenant de $\beta_n + \gamma_n$ que nous savons être moindre que ϖ d'après la proposition 17. Voilà l'idée qui permet d'arriver à la démonstration que la somme $\alpha + \beta + \gamma$ est inférieure ou égale à ϖ.

Démonstration du lemme de Legendre :

Etant donné un triangle quelconque ABC d'angles α, β et γ (voir fig. 11 où $\alpha = \alpha_1 + \alpha'$), répétons la construction faite figure 2, nous obtenons deux triangles égaux ADC et EDB. Alors $\alpha' = \beta_1$ et $\gamma = \delta$ de sorte que $\alpha + \beta + \gamma = (\alpha_1 + \alpha') + \beta + \delta = \alpha_1 + \beta_1 + \beta + \delta = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1$.

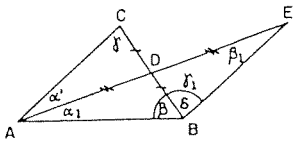

Figure 11

D'autre part, comme $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha$, nous devons avoir $\alpha_1 \leq \alpha/2$ ou $\beta_1 \leq \alpha/2$. Si nous nous trouvons dans ce dernier cas, il suffit d'échanger les symboles α_1 et β_1 pour nous ramener dans tous les cas à $\alpha_1 \leq \alpha/2$. Ceci achève la démonstration du lemme.

> **Théorème de Legendre.** *La somme des angles d'un triangle quelconque n'est jamais supérieure à deux droits.*

Démonstration. Soit ABC un triangle quelconque, d'angles α, β et γ. Nous allons démonter que $\alpha + \beta + \gamma \leq \varpi$, en démontrant que $\alpha + \beta + \gamma > \varpi$ nous conduit à une contradiction. Supposons donc que $\alpha + \beta + \gamma = \varpi + \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$.

En procédant comme dans l'explication ci-dessus donnée après l'énoncé du lemme de Legendre, nous construisons un triangle $A_nB_nC_n$ d'angles α_n, β_n et γ_n avec n tel que $\alpha/2^n < \varepsilon$. Ceci joint à (1) implique $\alpha_n < \varepsilon$ et en reportant, comme nous avons aussi $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = \alpha + \beta + \gamma = \varpi + \varepsilon$, nous obtenons $\beta_n + \gamma_n = \varpi + (\varepsilon - \alpha_n) > \varpi$. Ceci est en contradiction avec la proposition 17, ce qui achève la démonstration du théorème.

Nous sommes finalement en état de voir comment Legendre procéda dans sa tentative de démontrer le postulat des parallèles. Pour cela, en prenant en compte l'énoncé (P3) il suffit de démontrer que **la somme des angles d'un triangle quelconque est** ϖ. C'est cela que Legendre se proposa de faire. En raisonnant par l'absurde nous supposons que ABC est un triangle dont la somme des angles intérieurs est inférieur à ϖ et donc égal à $\varpi - \varepsilon$ où $\varepsilon > 0$.

Par le sommet C traçons $CP = AB$ de façon que l'angle PCB soit égal à l'angle ABC et que le point P soit du même côté de la droite AC que le point B (fig. 12). Les triangles ABC et PCB sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux et par suite ils possèdent la même somme des angles : $S_1 = S_2 = \varpi - \varepsilon$.

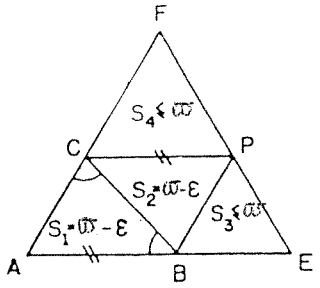

Figure 12

Par le point P traçons une droite qui coupe les droites AB et AC respectivement en E et F formant ainsi les triangles BEP et CPF. Les sommes S_3 et S_4 des angles de ces triangles sont telles que $S_3 \leq \varpi$ et $S_4 \leq \varpi$. Par suite

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \leq 4\varpi - 2\varepsilon \qquad (2).$$

Remarquez que la somme S des angles du triangle AEF est $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ moins les angles des sommets B, C et P. Maintenant, la somme des angles en chacun de ces sommets vaut ϖ de sorte que nous devons soustraire $3\,\varpi$ de $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ pour obtenir la somme S cherchée. Et par suite, d'après (2) nous pouvons conclure que $S \leq \varpi - 2\varepsilon$.

Ceci montre que s'il existait un triangle ABC dont la somme des angles soit $\varpi - \varepsilon$, nous arriverions à construire un triangle plus grand AEF dont la somme des angles serait $\varpi - 2\varepsilon$. En poursuivant, nous pourrions construire un autre triangle, plus grand encore dont la somme des angles serait inférieure ou égale à $\varpi - 4\varepsilon$ et ainsi de suite. Maintenant nous arriverions ainsi à construire un n-ième triangle dont la somme des angles serait inférieure ou égale à $\varpi - n\varepsilon$. Et il est clair que ceci est absurde puisque, n pouvant être aussi grand que l'on veut, $\varpi - n\varepsilon$ deviendrait négatif. Nous sommes ainsi amenés à conclure que la somme des angles d'un triangle quelconque ne peut pas être moindre que ϖ. Comme nous avons déjà démontré qu'elle ne peut pas être non plus supérieure à ϖ, nous en concluons qu'elle vaut exactement ϖ.

Comme le lecteur le voit, Legendre, par ce raisonnement aurait prouvé le postulat des parallèles dans sa version (P3). Maintenant, comme nous l'avons dit, il est impossible de prouver ce postulat comme cela fut clairement établi par les inventeurs des géométries non-euclidiennes. Il doit donc y avoir une erreur dans le raisonnement de Legendre que nous venons de présenter. En fait, si erreur il y a, elle est assez subtile et par là même échappa à la perspicacité de Legendre. Comme nous le verrons ci-après, elle se trouve dans ce que les logiciens appellent "tautologie" ou "cercle vicieux" et qui consiste à supposer vrai cela même que l'on désire prouver. Ceci est bien sûr inadmissible!

A une certaine étape du raisonnement ci-dessus, en rapport avec la figure 12, nous avons dit : "Par le point P traçons une droite qui coupe les droites AB et AC respectivement en E et F". Enonçons cette proposition sous la forme générale :

Enoncé (P4). *Par un point P intérieur d'un angle quelconque BAC, il est toujours possible de tracer une droite qui coupe les deux côtés de l'angle en E et F respectivement.*

Bien que Legendre ne s'en soit pas aperçu, cet énoncé est équivalent au postulat des parallèles comme nous allons le démontrer. Bien sûr, s'il est équivalent, on ne peut, comme le fit Legendre, l'utiliser dans une quelconque démonstration de ce postulat.

La démonstration de (P4) $\Longrightarrow$ (P) est exactement celle que nous avons faite ci-dessus, dans le raisonnement relatif à la figure 12. Pour démontrer que (P) $\Longrightarrow$ (P4), supposons (P) vraie. Soit BAC un angle quelconque et P un point intérieur à cet angle. Nous devons montrer qu'il existe une droite passant par P et rencontrant les deux côtés de l'angle.

Par P traçons la droite t parallèle au côté AC (fig. 13). Elle doit couper le côté AB, sinon nous aurions deux droites AB et AC passant par le point A et parallèles à t ce qui contredit (P). Soit D le point de rencontre de t et de AB. Soit E un point du côté AB tel que D soit entre A et E. Démontrons que la droite PE coupe le côté AC en un point F.

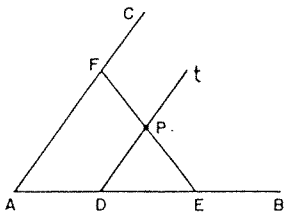

Figure 13

Sinon par P il passerait deux droites PE et t toutes deux parallèles à la même droite AC ce qui à nouveau contredit (P). Ceci achève la démonstration du fait que (P4) est équivalent à (P).

6.— UNE REFLEXION CRITIQUE

Des épisodes comme celui que nous venons de décrire montrent que, bien que la visualisation géométrique soit un puissant auxiliaire dans l'apprentissage de la géométrie, elle peut, très souvent, nous conduire à des conclusions ou des raisonnements faux. En outre, avant même Legendre, d'autres mathématiciens commirent des erreurs analogues, l'une d'elles ayant eu pour acteur Girolamo Saccheri (1667-1733) qui fut également l'auteur d'un écrit dont l'objectif était la démonstration du postulat des parallèles. Ce fut à cause d'erreurs de ce type que les mathématiciens commencèrent à percevoir qu'ils étaient mal guidés par la façon dont ils avaient visualisé les entités géométriques – essentiellement la ligne droite – tout au long des siècles. Et ils finirent par découvrir que cette visualisation était seulement **une façon d'être** de ces entités. D'autres **modèles** devaient exister, obéissant aux mêmes quatre premiers postulats d'Euclide mais non au cinquième. Ainsi naquirent ce que l'on appela les géométries non-euclidiennes. Au lecteur qui s'intéresse à de plus amples renseignements sur ces géométries nous conseillons de consulter l'article du professeur Waldyr Oliva dans '*Revista do professor de matemática 2*' et celui du professeur Manfredo do Carmo dans [2].

Les expériences de Saccheri, Legendre et autres mathématiciens stimulèrent les études critiques des fondements tant en géométrie qu'en analyse et dans d'autres parties des mathématiques. Dans le domaine de la géométrie, ces études culminèrent en 1899 avec la parution du livre de Hilbert : '*Fondements de la géométrie*' qui fut le premier travail complet sur l'organisation axiomatique de la géométrie.

Hilbert et d'autres mathématiciens du siècle passé finirent par découvrir que l'œuvre d'Euclide, malgré son admirable structure et son organisation, contenait différentes failles; bien des démonstrations étaient incomplètes, car elles s'appuyaient fréquemment sur la vision géométrique et non uniquement sur les postulats comme cela devrait être. Bien plus, ils constatèrent que les cinq postulats d'Euclide étaient insuffisants et que bien d'autres étaient nécessaires pour construire l'édifice de la géométrie.

Du point de vue de l'enseignement secondaire ceci renferme une leçon très importante : si les mathématiciens les plus éminents mettent tant de temps pour découvrir les failles de l'enchaînement logico-déductif de la géométrie et les "pièges" de l'intuition, comment alors attendre qu'un élève du 2^e cycle ait assez de sensibilité pour ces subtilités! Le collège ou le lycée ne sont pas des lieux adéquats pour l'étude des fondements et de l'axiomatique et cela même parce qu'il est impossible d'apprécier ces études et de comprendre leur nécessité sans une solide connaissance des faits géométriques et des processus de déductions. Le professeur doit d'abord s'occuper de l'enseignement de ces derniers puisque sans eux l'élève ne peut développer son esprit critique et se mettre en condition de percevoir les failles et les lacunes de certaines démonstrations. Et même alors cette perception ne sera possible qu'avec l'aide du professeur, puisqu'il serait tout de même surprenant que quelqu'un ayant si peu d'expérience puisse découvrir la faille d'un raisonnement comme celui de Legendre que nous venons d'exposer.

L'axiomatisation de la géométrie est une longue tâche qui requiert suffisamment de temps et qui ne peut s'achever au lycée. Importuner l'élève avec des subtilités pour lesquelles il n'est pas encore prêt est un contresens pédagogique. Par contre, le professeur de lycée doit être informé sur ce qu'il enseigne, y compris sur les fondements et l'axiomatique, justement pour qu'il puisse acquérir le sens critique qui l'aide à décider avec bon sens ce qu'il doit enseigner et comment.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] GREENBERG M.-J. *Euclidean and non-euclidean geometries*, New Yord, W.-H. Freeman and Co., 1980.

[2] CARMO M.-P. *Do geometrias não-euclidianas* 'Revista matematica universitaria', Rio de Janeiro (6) dez. 1987.