

**L'INTERPRÉTATION DE L'ANALYSE
EN TERMES D'ORDRES DE GRANDEUR :
FONDEMENTS POUR UNE NOUVELLE PÉDAGOGIE**

Robert LUTZ - Abdenacer MAKHLOUF - Etienne MEYER

L'enseignement de l'analyse mathématique dans les classes de lycée se heurte à de multiples difficultés dues essentiellement au hiatus profond entre l'idée intuitive d'approximation et la notion formelle de convergence, selon le sens qui a prévalu au 19^e siècle après une longue maturation. Une manière scientifique cohérente d'atténuer ce hiatus consiste à donner un statut mathématique précis à la vieille et féconde notion leibnizienne de nombre "petit" ou "grand". On sait que, par un curieux détour de l'histoire, la quête d'un tel statut n'a abouti qu'il y a une trentaine d'années, dans le contexte de l'Analyse non standard d'Abraham Robinson fondée sur les acquis de la logique mathématique au cours de la première moitié du 20^e siècle. Mise sous forme syntaxique par Edward Nelson en 1977, la solution est suffisamment simple et naturelle pour que la tentation de l'aménager en vue d'une pédagogie renouvelée de l'analyse élémentaire devienne irrésistible. Encouragés par une telle demande de la part de nos collègues et les incitations enthousiastes de notre ami André Deledicq (IREM de Paris) qui mène depuis plusieurs années une expérimentation sur le terrain dans cet esprit, nous avons voulu réfléchir sur les aspects essentiels d'une telle tentative.

Deux d'entre nous sont des praticiens de l'ANS au niveau de la recherche mathématique, où elle a permis des outils nouveaux d'une grande fécondité; le troisième est un professeur rompu à la pédagogie des classes de lycée.

Nous pensions initialement à une simple amélioration de la pédagogie, où l'évidente facilité que donne le calcul des limites à l'aide des quantités infinitésimales rendrait aux élèves le service d'une approche directement en prise avec l'intuition. Mais, chemin faisant, nous nous sommes aperçus que, malgré le charme de la chose, il n'était pas possible d'échapper à un certain bricolage si l'on n'allait pas jusqu'au bout de la tentative; il fallait reprendre radicalement la base des mathématiques enseignées, en ce qui concerne les nombres (des entiers aux réels), les suites et les fonctions. Dès lors l'objectif premier est devenu une didactique de l'analyse, en tant que *préalable* à une nouvelle pédagogie. Et nous avons rapidement été entraînés vers une réflexion de fond où le dialogue permanent entre mathématiques intuitives et mathématiques axiomatisées apparaît comme le moteur de cette future pédagogie. Le fruit de nos efforts, non dénués de passion et de plaisir esthétique, se concrétisera à la rentrée 93 sous la forme d'une brochure de l'APMEP où nous offrirons les bases d'un débat que nous espérons fécond et animé.

Dans ce petit article, dont l'objectif est de susciter l'intérêt de nos collègues envers notre tentative, nous évoquons les grandes lignes du projet assorties de quelques échantillons typiques qui en donnent la tonalité générale.

1. Les fondements de l'approche que nous proposons : version faible

L'idée générale, inspirée de la version axiomatique de l'Analyse non standard, est d'enrichir les mathématiques en y introduisant, sans rien enlever, une modélisation axiomatique du concept *intuitif* d'objet mathématique “véritable”. Il s'agit d'un concept informel, qui ne peut pas être défini par rapport à des concepts plus primitifs. Intuitivement, un objet mathématique est “véritable” si on peut en décrire explicitement le mode de construction à partir des objets de base des mathématiques. Ainsi les nombres entiers 0, 1, 2, 3, 1993, 187654328976543, 10^{1000} sont “véritables”. Les réels $e, \pi, \ln(\sin 9)$ sont “véritables” (bien que leur mode de construction soit compliqué); les ensembles N, Q, Z, R, C sont des objets “véritables”, de même que les fonctions $\sin, \cos, \tan, \cot, \exp, \ln$ et, par exemple, la suite définie par la relation de récurrence $U_{n+1} = \frac{2U_n+6}{4U_n+7}, U_0 = 1$.

Il est clairement impossible *d'écrire* un entier qui ne soit pas “véritable”, aussi est-on tenté de croire que tout objet mathématique est “véritable”. Mais il n'est pas possible d'exprimer une telle affirmation sans disposer d'une définition de ce concept. A défaut il faudrait dresser la liste de tous les objets “véritables”, ce qui est exclu pour des raisons matérielles.

Cette impossibilité laisse la porte ouverte à une extension des mathématiques axiomatisées dans laquelle le concept de “véritable” objet serait introduit dans le langage formel et assorti d'axiomes inspirés de ses propriétés informelles. Nous proposons pour cela d'introduire le qualificatif *bien déterminé* (car il est plus évocateur que *standard*). Nous noterons en abrégé “bd”.

La version faible de ce processus d'extension des mathématiques consiste à le restreindre aux entiers naturels et à définir à partir de là une hiérarchie des nombres qui permette une version infinitésimale de l'Analyse en termes d'ordres de grandeur et d'approximation absolue portant sur les nombres réels. La version forte permet d'établir le lien de cette Analyse avec l'Analyse des limites de suites et de fonctions. La distinction de ces deux niveaux de l'Analyse – le numérique et le fonctionnel – ouvre des perspectives vraiment nouvelles en matière pédagogique. En effet, dans la situation actuelle on pense intuitivement l'Analyse en termes numériques et on l'exprime formellement en termes fonctionnels. Ici nous pouvons l'exprimer en termes numériques et *ensuite* l'insérer dans le contexte fonctionnel, lorsque cela devient utile pour établir des théorèmes généraux sur les limites, la continuité etc ..., mais pas pour étudier une expression particulière.

Pour exprimer les axiomes de la version faible, il faut distinguer les *propriétés arithmétiques pures* (en un sens qui rappelle le désir de pureté classique “à la manière des anciens”, cher aux analystes du 18^e siècle) concernant les entiers naturels de leurs *propriétés élargies* à des phrases où intervient le qualificatif *bien déterminé* ou des qualificatifs dérivés que nous définirons ultérieurement. Les premières

ne contiennent dans leur expression que les opérations et la relation d'ordre. Ce sont les propriétés relatives à l'arithmétique classique. Nous ne changeons rien aux théorèmes de celle-ci, mais adjoignons les axiomes (ou principes) suivants qui régissent le qualificatif "bd".

Principes

(bd₁) *L'entier 1 est bien déterminé.*

(bd₂) *Tout entier défini de manière unique par une propriété purement arithmétique à partir d'un ou plusieurs entiers "bien déterminés" est "bien déterminé".*

(bd₃) *Pour chaque propriété arithmétique élargie P_n indexée par un entier variable n , si pour tout n bien déterminé à partir de n_0 , P_n implique P_{n+1} (propriété héréditaire), et si P_n est vraie pour $n = n_0$, alors P_n est vraie pour tout n bien déterminé supérieur à n_0 .*

(bd₄) *Il existe un entier qui n'est pas bien déterminé.*

Le dernier principe est la clé de voûte de tout l'édifice. Sa justification intuitive est l'impossibilité d'écrire formellement le contraire ... Le troisième est le *principe de récurrence élargie*.

Voici quelques conséquences de ces principes.

— *Si n est bien déterminé alors $n + 1$ est bien déterminé.*

Appliquer (bd₁) et (bd₂). Noter que ceci ne contredit pas le principe de récurrence usuel, qui s'applique seulement aux propriétés arithmétiques pures.

— *Tout entier inférieur à un entier bien déterminé n est bien déterminé.*

En effet, appliquons le principe (bd₃) à la propriété "tout entier inférieur à n est bd". Elle est vraie pour $n = 0$ puisqu'il n'existe pas d'entier inférieur à 0, et elle est héréditaire, d'après la conséquence précédente.

— *La somme et le produit de deux entiers bien déterminés sont bien déterminés.*

— *Si n et p sont bien déterminés alors $n!$ et n^p le sont aussi.*

— *Tout entier qui n'est pas bien déterminé est supérieur à tous les entiers bien déterminés.*

En ce sens cet entier mérite d'être appelé *très grand* et un entier non très grand est dit *modéré* (*).

Nous obtenons ainsi une nouvelle vision de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels : on y trouve des entiers modérés comme 1, 10, 100^{50} et tous ceux qu'on obtient en y ajoutant 1; on y trouve aussi des entiers très grands qui restent très grands lorsqu'on leur enlève 1. Tout entier très grand est supérieur à tout entier modéré, mais il n'y a pas de plus grand entier modéré ni de plus petit entier très grand! Cette situation surprenante n'est pas contradictoire avec les connaissances usuelles et traduit le phénomène de transition floue omniprésent dans la vie courante : à

(*) NDLR : Les termes "modéré" et "bien déterminé" sont, pour les entiers, synonymes. Le qualificatif "modéré" ne prend tout son sens qu'avec l'étude des réels.

quel moment un enfant devient-il adulte? A quel moment un tas de sable cesse-t-il d'être un tas de sable lorsqu'on lui enlève un grain? Il est rassurant que la mathématique soit à ce point humaine qu'elle intègre le flou dans ses modes opératoires.

Les principes ci-dessus sont inspirés des propriétés intuitives des entiers “véritables”. On peut montrer que toute propriété arithmétique pure qui serait un théorème dans la théorie élargie (c’est-à-dire que l’on pourrait démontrer en utilisant les principes (bd_1) à (bd_4) en plus des axiomes classiques) admet aussi une démonstration classique. Notre mathématique élargie est donc ce qu’on appelle *une extension conservative* de la mathématique classique. Il en est de même de l’extension forte que nous évoquerons plus loin. Il en résulte en particulier qu’aucune contradiction ne peut apparaître à cause de l’introduction des nouveaux principes. Ceci est proprement révolutionnaire, si l’on songe que jusque vers 1960, on a cru que les ordres de grandeur imaginés par Leibniz ne pouvaient admettre un fondement logique cohérent. Or nous pouvons les définir à partir du qualificatif “bd” de la manière suivante :

Définition

- (i) *Un réel positif est dit très grand (tg) si sa partie entière n'est pas bien déterminée.*
- (ii) *Un réel est dit modéré si sa valeur absolue n'est pas très grande (**).*
- (iii) *Un réel est dit très petit (tp) s'il est nul ou si son inverse est très grand en valeur absolue.*
- (iv) *Deux réels sont dits très proches (en abrégé $x \simeq y$) si leur différence est très petite.*

Ainsi un réel positif très petit est inférieur à $1/n$ pour n'importe quel entier explicite n , par exemple 1000000000000000000000000 . Le “très petit” formel modélise bien le très petit intuitif!

A partir de là on obtient un calcul sur les ordres de grandeur qui se déduit aisément des principes (bd₁) à (bd₃). Voici, en vrac, quelques unes de ces propriétés, écrites en langage abrégé :

— Concernant l'addition

$$\begin{aligned} \text{tp} + \text{tp} &= \text{tp}; \text{tg} + \text{modéré} = \text{tg}; \text{modéré} + \text{modéré} = \text{modéré}, \\ \text{tg positif} + \text{tg positif} &= \text{tg positif}. \end{aligned}$$

Mais il n'y a pas de résultat général pour tg positif - tg positif, ce qui ne devrait surprendre personne.

Concernant la multiplication

$\text{tp} \times \text{modéré} = \text{tp}$; $\text{modéré} \times \text{modéré} = \text{modéré}$,
 “non $\text{tp} \times \text{tg} = \text{tg}$ ” car les inverses vérifient “ $\text{modéré} \times \text{tp} = \text{tp}$ ”.

– Soient x, x', y, y' des réels modérés. Si $x \simeq x'$ et $y \simeq y'$, on a $x + y \simeq x' + y'$ et

(**) NDLR : On voit ici qu'un réel modéré peut ne pas être bien déterminé. Il peut en effet être très proche (définition IV) d'un réel bien déterminé.

$$xy \simeq x'y'.$$

A partir de là on peut développer l'Analyse sur les nombres. Elle consiste à trouver un réel explicite très proche de la valeur d'une expression où interviennent des réels très petits ou très grands dont on ne sait rien de plus, en d'autres termes à "lever des indéterminations".

Exemples

– Soit ω un entier tg. Alors $\frac{1+\omega}{2+3\omega} \simeq \frac{\frac{1}{\omega}+1}{\frac{2}{\omega}+3} \simeq \frac{1}{3}$.

– Même chose pour $\frac{1+\omega^2}{2+3\omega^2}$.

– Que peut-on dire de $\frac{1+\omega^3}{2+3\omega^3}$, $\frac{1+\omega^2}{2+3\omega^3}$ et $\omega - \frac{1+\omega^2}{2+3\omega^3}$?

– Evaluons $y = (1+x)^{1/3}$ lorsque x est très petit. Cela veut dire $y > 0$ et $y^3 = 1+x$ d'où $x = (y-1)(y^2+y+1)$, x étant très petit et y^2+y+1 non très petit, on a nécessairement $y-1 \simeq 0$. Posons $y = 1+z$ et évaluons z ; $z = y-1 = \frac{y^3-1}{y^2+y+1} = \frac{x}{y^2+y+1}$. Comme $y \simeq 1$, on a $\frac{1}{y^2+y+1} \simeq \frac{1}{3}$. Et donc $\frac{1}{y^2+y+1} = \frac{1}{3} + \varepsilon$ où $\varepsilon \simeq 0$; d'où $z = x(\frac{1}{3} + \varepsilon)$ et $y = 1 + \frac{x}{3} + x\varepsilon$.

On peut continuer le calcul pour préciser l'ordre de ε par rapport à x . On peut faire de même pour la racine n -ième lorsque n est bien déterminé. Cet exemple montre la puissance de la méthode, qui permet de préparer les élèves aux propriétés asymptotiques des fonctions en faisant seulement des petits calculs sur les nombres... En fait la plupart des exercices sur les limites que l'on pratique en première et terminale pourraient être interprétés de cette façon, plutôt qu'à travers l'utilisation d'un assortiment artificiel de règles sur les fonctions.

2. La version forte : extension aux suites et aux fonctions

Nous poursuivons le processus d'extension des mathématiques en étendant le qualificatif bien déterminé à tous les objets mathématiques. On parlera de réels bien déterminés. (Nous proposons d'ailleurs une construction de l'ensemble des réels, pour ne pas passer sous silence, comme cela est traditionnellement le cas, une certaine compréhension de ces nombres sans lesquels l'Analyse serait toute autre. Cette construction s'appuie sur les nouvelles notions et sur l'idée de place manquante.) On parlera également de suites bien déterminées et de fonctions bien déterminées, et l'on évoquera des *propriétés mathématiques pures* (celles des mathématiques classiques) et des *propriétés élargies* qui utilisent le qualificatif "bd" ou ses dérivés. La manipulation du qualificatif bien déterminé est complétée par le *principe de transfert* et le *principe de détermination*. Présentons succinctement le principe de transfert : celui-ci traduit l'idée somme toute assez naturelle, que, pour qu'une propriété pure dépendant d'une variable x soit vraie, il suffit qu'elle le soit pour toutes les valeurs bien déterminées de x . La contraposée de ce principe (appliquée à la négation d'une propriété) fournit le résultat très utile suivant : s'il existe un objet satisfaisant une propriété pure, on peut affirmer l'existence d'un tel objet qui soit bien déterminé (et par conséquent, s'il existe un

unique objet vérifiant cette propriété, il est bien déterminé : il en est de même des nombres explicites, des ensembles N, Z, Q, R , de l'ensemble des nombres premiers, etc ...).

Le fait central de l'Analyse réelle est alors le **théorème de complétude** qui peut revêtir la forme bien expressive suivante :

Pour tout réel modéré x , il existe un et un seul réel bien déterminé qui soit très proche de x . On le note ${}^\circ x$ (lire “ombre de x ”).

Le comportement de l'ombre par rapport à la relation d'ordre et aux opérations est résumé ainsi :

Théorème

Soient x et y deux réels modérés. Alors

- (i) Si $x < y$ on a ${}^\circ x \leq {}^\circ y$ et si $x < y$ et x non très proche de y on a ${}^\circ x < {}^\circ y$.*
- (ii) ${}^\circ(x + y) = {}^\circ x + {}^\circ y$.*
- (iii) ${}^\circ(xy) = ({}^\circ x)({}^\circ y)$.*
- (iv) ${}^\circ(x^y) = ({}^\circ x)^{({}^\circ y)}$.*

A partir de là on peut développer l'analyse des suites et des fonctions, le calcul des dérivées et le calcul intégral en utilisant des caractérisations dont voici quelques échantillons significatifs :

Soient $(U_n)_n$ une suite, l, a, b des réels, f, g des fonctions et I un intervalle, tous bien déterminés.

- La suite $(U_n)_n$ tend vers l si et seulement si pour tout entier n très grand U_n est très proche de l . Cette caractérisation est équivalente à : il existe n_0 très grand tel que pour tout $n > n_0$, $U_n \simeq l$.
- La suite $(U_n)_n$ a pour limite $+\infty$ si et seulement si pour tout entier n très grand U_n est très grand positif.
- La suite $(U_n)_n$ est bornée si et seulement si pour tout entier n très grand U_n est modéré.
- La fonction $f(x)$ tend vers l si et seulement si pour tout réel h très petit (non nul) $f(x + h)$ est très proche de l .
- La fonction $f(x)$ est continue sur I si et seulement si pour tout réel bien déterminé a de I et tout réel h très petit (avec $a + h$ dans I), $f(a + h)$ est très proche de $f(a)$.
- La fonction $g(x)$ est la dérivée de $f(x)$ sur l'intervalle ouvert I si et seulement si pour tout réel bien déterminé a de I et tout h très petit (non nul), $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \simeq g(a)$.
- Pour f continue sur $[a, b]$, l'intégrale de f sur $[a, b]$ est l'ombre de $\frac{b-a}{\omega} \sum_{i=1}^{\omega} f(a + i\frac{b-a}{\omega})$ (avec ω très grand).

Exemple

Nous avons vu au paragraphe 1 que pour x très petit $(1 + x)^{1/3} = 1 + \frac{x}{3} + x\varepsilon$ avec

ε tp. Ce qui signifie $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/3}-1}{x} = \frac{1}{3}$.

Précisons maintenant l'ordre de ε par rapport à x pour poursuivre le développement de la fonction $(1+x)^{1/3}$ pour x très petit.

Posons $y = (1+x)^{1/3}$. On a $y-1 = \frac{x}{y^2+y+1}$ et pour x tp, $y \simeq 1$.

D'où $\varepsilon = \frac{y-1}{x} - \frac{1}{3} = \frac{1}{y^2+y+1} - \frac{1}{3} = \frac{2-y^2-y}{3(y^2+y+1)} = -\frac{(y-1)(y+2)}{3(y^2+y+1)} = -\frac{x}{3} \frac{y+2}{(y^2+y+1)}$.

On a donc, pour x tp, $\varepsilon = -\frac{x}{9}(1+\varepsilon')$ avec $\varepsilon' \simeq 0$; ce qui signifie que pour x tp $(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + x^2\varepsilon''$ avec ε'' tp.

Pour terminer cette brève présentation, voici l'idée de quelques démonstrations particulièrement jolies concernant les suites et les fonctions dans ce contexte.

– Dans $\mathbf{R}$ toute suite croissante et majorée a une limite.

Soit $(U_n)_n$ une suite bien déterminée majorée.

D'après le principe de transfert, il existe un majorant M bien déterminé. On subdivise l'intervalle $[U_0, M]$ en un nombre très grand w de parties égales et on considère le plus grand entier i , noté s , tel que $U_0 + i \frac{M-U_0}{w}$ ne majore pas la suite. Il existe alors n_0 tel que U_{n_0} appartient à $I_s = [u_0 + s \frac{M-U_0}{w}, u_0 + (s+1) \frac{M-U_0}{w}]$.

La suite étant croissante, on a donc pour tout $n \geq n_0$, U_n appartient à I_s . Et donc, pour tout $n \geq n_0$, U_n est très proche de l'ombre l de $U_0 + s \frac{M-U_0}{w}$ (car I_s est de longueur très petite). l est par conséquent la limite de la suite $(U_n)_n$.

– Toute fonction continue sur un intervalle fermé d'extrémités a et b , négative en a et positive en b s'annule au moins une fois entre a et b .

Soient f, a, b bien déterminés.

On fixe un entier très grand ω et on considère le plus grand indice i tel que $f(a + i(b-a)/\omega) < 0$. Alors $f(a + (i+1)(b-a)/\omega) \geq 0$, de sorte que l'ombre c commune aux deux points a a une image $f(c)$ à la fois très proche d'un nombre négatif et d'un nombre positif ou nul. Comme le nombre $f(c)$ est bien déterminé, il est nul.

– Toute fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ est bornée et atteint un maximum et un minimum.

Même principe : subdivision fine qui discrétise le problème, maximum et minimum sur un ensemble fini, passage à l'ombre et comparaison avec la valeur de la fonction en tout point bien déterminé de l'intervalle.

Le lecteur qui sortira victorieux de cette démonstration aura tout compris et pourra utiliser les caractéristiques des dérivées et intégrales pour jouer avec les fonctions $\ln$ et $\exp$ qui constituent un gros morceau de l'étude développée dans notre brochure. La riche matière première que nous y proposons en vue d'une future pédagogie demandera évidemment l'élaboration de cours pour l'élève, graduels et bien pensés, pour éviter les artifices aussi bien que les délires qui peuvent naître

d'un enthousiasme excessivement mystique pour les notions infinitésimales. C'est pour cela que nous évitons dans notre vocabulaire les connotations qui pourraient y inciter.

La nouvelle algèbre de Viète (traduction de Vaulézard)

26. Mais quoy, dautant que toutes les grandeurs sont ou lignes, ou superficies, ou corps. La proportion d'une triplée ou quadruplée raison, peut suffire en l'usage des choses humaines, sinon par hazard en la section des angles, ou en la recherche des angles par les costés des figures, ou les costés par les angles.

Tous ceux qui ont traité des choses Mathématiques n'ont jamais establi (comme aussi la nature y repugne) plus de 3. genres de grandeurs, sçavoir la ligne, la superficie, et le corps outre lesquels il ne s'en rencontre point, cela peut estre démontré facilement, demeurant constant que tant la longueur, largeur, que profondeur d'une figure est mesurée par une perpendiculaire (cecy sera facilement conceu, dautant que la mesure de quelque chose doit estre toujours certaine et arrestée, ce qui ne peut estre qu'en la perpendiculaire qui est unique en la détermination de quelque chose). Or est-il qu'à un mesme point ne peuvent estre menees plus de 3. lignes perpendiculaires, lesquels ne sçauroient marquer que 3. dimensions, sçavoir longueur, largeur, et profondeur, ce qui convient au corps ou solide, et deux d'icelles, sçavoir longueur et largeur à la superficie, et une à la ligne. Cecy premis, ce que l'Autheur dit que la proportion constituée de 3. ou 4. raisons égales peut suffire aux choses qui arrivent entre les hommes est aparent, pour autant que les Equations qui arrivent en la recherche des choses solides proposées se peuvent resoudre du moins par l'invention de 2. ou 3. moyennes proportionnelles, c'est à dire par la constitution de 4. ou 5. quantités continues proportionnelles. Or est-il que 4. grandeurs continues proportionnelles constituent 3. raisons égales, et 5. grandeurs, 4. raisons égales. Donc telle proportion peut suffire ainsi que dit l'Autheur : mais en la section des angles, ou bien en la recherche des angles d'une figure par les costés d'icelle, ou les costés par les angles ils arrivent d'autres proportions comme il se peut voir en la constitution des Equations auxquelles tombent la solution en la recherche de ces choses. Il advient neantmoins en quelques-unes que ces proportions peuvent suffire, comme en la division des angles en 2, 3, 4, parties égales, etc.