SUR LES POLYGONES ENTIERS OU RATIONNELS

Eugène EHRHART

Minkowski est connu surtout pour avoir introduit son espace-temps à quatre dimensions, utile en théorie de la relativité. Mais vers 1900 il crée aussi de toutes pièces la "*géométrie des nombres*". De nos jours le jumelage fécond de l'arithmétique et de la géométrie s'est considérablement développé et s'appelle maintenant l'*arithmo-géométrie*. Elle a récemment donné naissance à de nombreux travaux.

Nous limitant en gros à la géométrie plane, nous abordons un chapitre de cette jeune branche mathématique, qui s'occupe des *systèmes diophantiens linéaires homothétiques*. Nous exposons quelques résultats essentiels, éclairés par des exemples numériques simples. Pour les démonstrations, trop longues pour figurer ici, on peut consulter nos publications [1], [2] et [3].

Dans un plan rapporté à des axes orthonormés un point est dit *entier* ou *rationnel* si ses coordonnées sont des nombres entiers ou rationnels. Un polygone (convexe ou non) est dit entier ou rationnel si ses sommets le sont.

I.– Polygones entiers

Un résultat classique est la *formule de Pick* :

$$S = i + \frac{p}{2} - 1$$

où i et p sont les nombres de points entiers intérieurs ou périphériques du polygone entier P. Cette relation ramène la mesure de l'aire S de P à deux dénombrements. Nous en avons déduit une formule qui ramène par contre un dénombrement à deux mesures.

Soit P_n le dilaté de P par rapport à l'origine dans le rapport n, entier positif. Soient i_n et j_n les nombres de points entiers de P_n ouvert (sans le bord) ou fermé (avec le bord). Alors

$$i_n = Sn^2 - \frac{\ell}{2}n + 1 \qquad j_n = Sn^2 + \frac{\ell}{2}n + 1(*)$$

(*) où S est l'aire de P et ℓ la "*longueur réticulaire*" de son bord, obtenue en comptant pour 1 la distance de deux points entiers consécutifs.

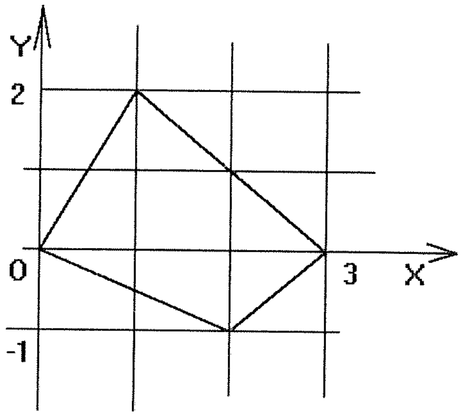
(*) NDLR : On a $S = i + \frac{p}{2} - 1 = j - \frac{p}{2} - 1$ dans une homothétie de centre O et de rapport n, $p \to np$ et $S \to n^2 S$.

Or on a : $i = S - \frac{p}{2} + 1 \qquad j = S + \frac{p}{2} + 1$

donc : $i_n = S_n^2 - \frac{p}{2}n + 1 \qquad j_n = S_n^2 + \frac{p}{2}n + 1.$

Exemple :

$$\begin{aligned} 2X - Y &> 0 \\ X + Y &< 3n \\ X - Y &< 3n \\ X + 2Y &> 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 2X - Y &\geq 0 \\ X + Y &\leq 3n \\ X - Y &\leq 3n \\ X + 2Y &\geq 0. \end{aligned}$$

Le trinôme i_n *ou* j_n *donne le nombre de solutions entières du système strict ou large* :

$$i_n = \frac{9}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 1 \qquad j_n = \frac{9}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + 1.$$

Pour tout polygone entier on a aussi

$$S = \frac{i_2 - 2i_1 + 1}{2} = \frac{j_2 - 2j_1 + 1}{2}(**).$$

II.— Polygones rationnels

P étant un polygone rationnel, le nombre i_n de points entiers de P_n est alors un "*trinôme arithmétique*" en n :

(1) $$i_n = Sn^2 - bn + a.$$

S est encore l'aire de P, mais a et b peuvent présenter des "*nombres périodiques*". Un nombre de période 3, par exemple, s'écrit

$$[a, b, c] = \begin{cases} a & \text{si } n = 1 \bmod 3 \\ b & \text{si } n = 2 \bmod 3 \\ c & \text{si } n = 0 \bmod 3 \end{cases}$$

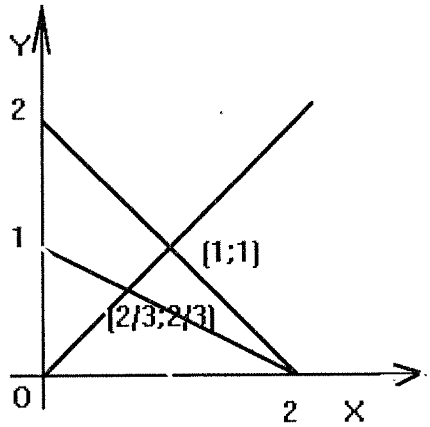
Si les droites supports de côtés du polygone sont toutes "réticulaires" (c'est-à-dire passent par deux points entiers et donc par une infinité), *le coefficient b dans* (1) *est constant.*

(**) NDLR :

$$\begin{aligned} & i_2 = 4S - p + 1 & & j_2 = 4S + p + 1 \\ & i_1 = S - \tfrac{p}{2} + 1 & & j_1 = S + \tfrac{p}{2} + 1 \\ \text{donc } & S = \tfrac{i_2 - 2i_1 + 1}{2} & & = \tfrac{j_2 - 2j_1 + 1}{2}. \end{aligned}$$

Exemple 1 :

$$X > Y$$
$$X + Y < 2n$$
$$X + 2Y > 2$$



Le domaine primitif P_1 est un triangle, dont un sommet rationnel a pour dénominateur 3. Son aire est $S = \frac{1}{3}$ et les supports des côtés sont des droites réticulaires. Par suite i_n est de la forme (***)

(2) $$i_n = \frac{n^2}{3} - bn + [\alpha, \beta, \gamma].$$

(***)

On dénombre directement $i_1 = i_2 = 0, i_3 = 1, i_4 = 2$. En écrivant (2) pour n de 1 à 4, on obtient quatre équations pour calculer b, α, β, γ. D'où

$$i_n = \frac{n^2}{3} - n + \frac{[2,2,3]}{3} = ||\frac{(n-1)(n-2)}{3}||$$

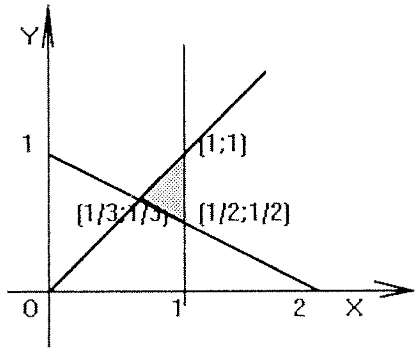
où $||A||$ désigne l'entier le plus proche de A.

La "*loi de réciprocité*" $j_n = i(-n)$ donne immédiatement le nombre de solutions entières du système large (les $\geq$ remplacent les $>$) :

$$j_n = ||\frac{(n+1)(n+2)}{3}||.$$

Exemple 2:

$$X > Y$$
$$X < n$$
$$X + 2Y > 2n$$



(***) NDLR : On comprend mieux l'apparition d'un nombre périodique dans l'expression quand on réfléchit au fait que si d est le pgcd des sommets rationnels, alors le dilaté de rapport kd ($k \in \mathbb{N}$) est à sommets entiers. On peut lui appliquer la formule de Pick.
Si on a toujours $S_n = n^2 S$ et $p_n = np$, les formules trouvées dans le cas des polygônes entiers ne sont valables que pour n multiple de d sinon il faudra sans doute modifier le terme constant ce qui fait apparaître un nombre périodique de période d.

Le domaine primitif est un triangle P_1, dont deux sommets rationnels ont pour dénominateurs 2 et 3, de sorte que le dénominateur de P_1 est 6. Son aire est $S = \frac{1}{12}$ et les supports des côtés sont des droites réticulaires. Par suite le trinôme i_n est de la forme

$$i_n = \frac{n^2}{12} - bn + [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6]. \tag{3}$$

On dénombre directement $i_1 = i_2 = i_3 = i_4 = i_5 = 0, i_6 = i_7 = 1$. En écrivant (3) pour n de 1 à 7, on obtient sept équations pour calculer b et les six a_r. D'où

$$i_n = \frac{n^2 - 6n + [5, 8, 9, 8, 5, 12]}{12} = ||\frac{(n-3)^2}{12}||.$$

Par la loi de réciprocité le nombre de solutions entières du système large est donc

$$j_n = ||\frac{(n+3)^2}{12}||.$$

Généralisation. Pour un polyèdre entier on peut également calculer le volume V par des dénombrements :

$$V = \frac{i_3 - 3i_2 + 3i_1 - 1}{6}.$$

*Suivant que le polyèdre est entier ou seulement rationnel les dénombrants i_n et j_n sont des polynômes ou des polygômes arithmétiques débutant par Vn^3. Ils vérifient une "***loi de réciprocité***" élégante et efficace :*

$$\boxed{j_n = -i(-n)}$$

$$i_n = -j(-n).$$

Bibliographie

[1] Thèse, "*Sur un problème de géométrie diophantienne linéaire*", Journal de Crelle, t. 226 et 227 (1967).

[2] "*Polynômes arithmétiques et méthode des polyèdres en combinatoire*", Birkhäuser Verlag (1977)

[3] "*Histoire et leçons d'une recherche*", in : Articles de Mathématiques, Cédic/Nathan (1985).