A VOS STYLOS

PROBLÈME 25

Énoncé

Etant donné un triangle, trouver tous les centres
a) des ellipses inscrites dans le triangle,
b) des ellipses ex-inscrites dans le triangle,
c) des hyperboles dont une branche est tangente aux trois côtés du triangle,
d) des hyperboles dont une branche est tangente à deux côtés du triangle et l'autre branche au troisième.

Solution

M. Dautrevaux nous a fait parvenir deux solutions très complètes et détaillées, qu'il nous a promis de synthétiser en une véritable petite monographie sur les coniques à centre tangentes aux trois côtés d'un triangle. Nous espérons être en mesure de vous en faire profiter dès le prochain numéro.

Voici en attendant une très élégante solution de M. Renfer (Strasbourg), qui se situe dans le cadre de la géométrie projective.

I.– Détermination du centre d'une conique tangente aux droites du triangle

Pour obtenir des calculs élégants et symétriques, on plonge le plan affine dans le plan projectif.
On choisit le repère projectif de sorte que les sommets A, B, C aient pour coordonnées homogènes $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ respectivement et que la droite de l'infini ait pour équation : $x+y+z=0$.
Une conique a une équation du type :

$$a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + 2ayz + 2bzx + 2cxy = 0.$$

Si elle est tangente à la droite (AB), d'équation $z = 0$, elle a un unique point d'intersection avec cette droite, donc : $c^2 - a'b' = 0$ (c'est le discriminant de l'équation : $a'x^2 + b'y^2 + 2cxy = 0$). En utilisant les relations analogues avec les tangentes (BC) et (CA), on obtient : $a'a^2 = b'b^2 = c'c^2 = a'b'c'$.
Si la conique est non dégénérée, le produit $a'b'c'$ est non nul ; car si a', par exemple, était nul, alors b et c seraient nuls aussi, ainsi que le déterminant de la matrice de la conique, dont la première ligne est (a', b, c).
Quitte à diviser tous les coefficients de l'équation de la conique par la racine cubique de $a'b'c'$, on peut donc supposer $a'b'c' = 1$.
Alors : $a' = \frac{1}{a^2}$; $b' = \frac{1}{b^2}$; $c' = \frac{1}{c^2}$ avec $abc = \pm 1$.

On peut exclure le cas : $abc = 1$, qui correspond à une conique dégénérée, car, en multipliant la première ligne de son déterminant par a, sa seconde ligne par b et sa troisième par c, on obtient :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & c & b \\ c & \frac{1}{b^2} & a \\ b & a & \frac{1}{c^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \end{vmatrix} = 0.$$

Au contraire si $abc = -1$, alors la conique est non dégénérée, car :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & c & b \\ c & \frac{1}{b^2} & a \\ b & a & \frac{1}{c^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-1}{b} & \frac{-1}{c} \\ \frac{-1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{-1}{c} \\ \frac{-1}{a} & \frac{-1}{b} & \frac{1}{c} \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Le centre d'une ellipse ou d'une hyperbole est le pôle de la droite de l'infini. La polaire d'un point (x, y, z) a pour équation en X, Y, Z :

$$\frac{x}{a^2}X + \frac{y}{b^2}Y + \frac{z}{c^2}Z + a(yZ + zY) + b(zX + xZ) + c(xY + yX) = 0.$$

C'est la droite de l'infini si les coefficients de X, Y, Z sont égaux, c'est-à-dire si :

$$\frac{x}{a^2} + cy + bz = \frac{y}{b^2} + az + cx = \frac{z}{c^2} + bx + ay.$$

En posant : $u = \frac{x}{a}, v = \frac{y}{b}, w = \frac{z}{c}$, le système s'écrit :

$$\frac{1}{a}(u - v - w) = \frac{1}{b}(v - w - u) = \frac{1}{c}(w - u - v),$$

ou encore :

$$\begin{cases} (a+b)u - (a+b)v + (a-b)w = 0 \\ (b+c)v - (b+c)w - (b-c)u = 0. \end{cases}$$

En éliminant w, on obtient : $(a+c)u = (b+c)v$.
Par permutation circulaire, on obtient donc, comme pôle de la droite de l'infini, le point (x, y, z), avec :

$$x = a(b+c),\ y = b(c+a),\ z = c(a+b).$$

En posant : $\alpha = \frac{-1}{a}$, $\beta = \frac{-1}{b}$, $\gamma = \frac{-1}{c}$, on peut écrire : $x = \gamma + \beta$, $y = \alpha + \gamma$, $z = \beta + \alpha$, avec $\alpha\beta\gamma = 1$.

II.– Nature de la conique

La conique est une hyperbole, une parabole ou une ellipse, suivant que la droite de l'infini la coupe en 2, 1 ou 0 point(s).

Pour obtenir les points (x, y, z) à l'infini sur la conique on remplace z par $-(x+y)$ dans l'équation de la conique et l'on obtient :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0 \text{ avec } :$$
$$A = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} - 2b,\ C = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - 2a,\ B = \frac{1}{c^2} - a - b + c.$$

Le calcul du discriminant Δ' donne :

$$\begin{aligned}\Delta' = B^2 - AC &= (\frac{1}{c^2} - a - b + c)^2 - (\frac{1}{a} + \frac{1}{c})^2(\frac{1}{b} + \frac{1}{c})^2 \\ &= (\frac{1}{c^2} - a - b + c)^2 - (-c - b - a + \frac{1}{c^2})^2 \\ &= 4c(\frac{1}{c^2} - a - b) = 4(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) = -4(\alpha + \beta + \gamma).\end{aligned}$$

La conique est donc :
- une ellipse, si $\alpha + \beta + \gamma > 0$,
- une parabole, si $\alpha + \beta + \gamma = 0$,
- une hyperbole si $\alpha + \beta + \gamma < 0$.

III.– Régionnement

Soit $M = (x, y, z)$ un point du plan affine.
On peut supposer : $x+y+z = 1$ (M est alors le barycentre de $(A, x), (B, y), (C, z)$).
Le point M est centre d'une conique tangente aux côtés du triangle ABC, si l'on peut trouver α, β, γ tels que $\beta + \gamma, \gamma + \alpha, \alpha + \beta$ soient proportionnels à x, y, z et tels que $\alpha\beta\gamma = 1$.
La proportionnalité s'exprime par :

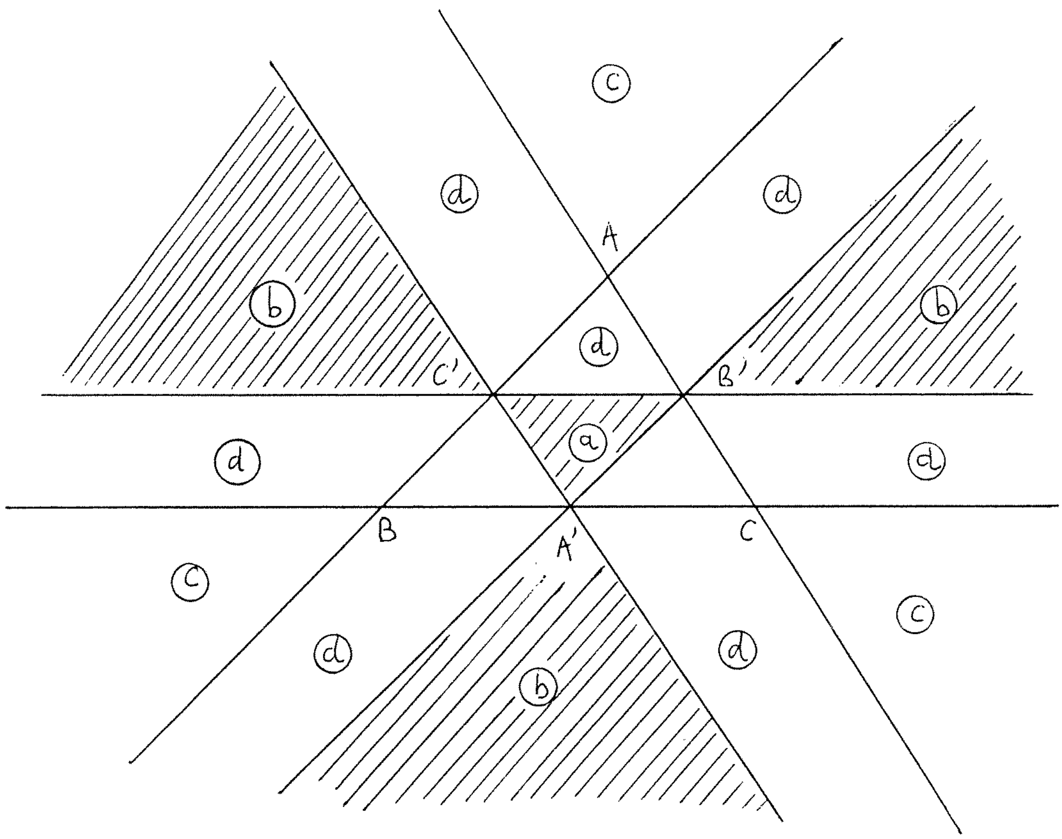
$$\begin{cases} x(\gamma + \alpha) = y(\beta + \gamma) \\ y(\alpha + \beta) = z(\gamma + \alpha). \end{cases}$$

En additionnant, on obtient : $(x + y - z)\alpha = (-x + y + z)\gamma$. Par permutation circulaire, on trouve :
Si $E = (-x + y + z)(x - y + z)(x + y - z)$ est non nul alors :

$$\begin{cases} \alpha = & \lambda(-x + y + z) & = \lambda(1 - 2x) \\ \beta = & \lambda(x - y + z) & = \lambda(1 - 2y) \quad \text{avec } : \lambda^{-3} = E \\ \gamma = & \lambda(x + y - z) & = \lambda(1 - 2z) \end{cases}$$

Tout point est donc centre d'une et d'une seule conique, sauf les points des trois droites d'équations $2x = 1$, $2y = 1$, $2z = 1$ (il s'agit des droites $(B'C')$, $(C'A')$, $(A'B')$, où A', B', C' sont les milieux de $[B'C']$, $[C'A']$, $[A'B']$).
La somme $\alpha + \beta + \gamma$ est égale à λ. Son signe est celui de E.
La zone hachurée est celle des centres d'ellipses ($E > 0$) (on discerne facilement les ellipses inscrites et exinscrites). La zone non hachurée est celle des centres d'hyperboles ($E < 0$).

zone a : ellipses inscrites,
zone b : ellipses exinscrites,
zone c : hyperboles, dont une branche est tangente aux trois côtés,
zone d : hyperboles, dont une branche est tangente à deux côtés et l'autre au troisième.



Pour distinguer les deux zones c et d du cas hyperbolique, on remarque qu'**une hyperbole tangente aux trois côtés a les trois points de contact sur une même branche si et seulement si le centre de l'hyperbole est dans un angle opposé par le sommet à l'un des angles du triangle**. En effet, si l'on trace trois tangentes T_1, T_2, T_3 à une même branche d'hyperbole, les points de contact M_1, M_2 et M_3 se suivant dans cet ordre, le centre est dans l'angle limité par T_1 et T_3 qui ne contient pas la branche, et c'est l'angle opposé par le sommet à l'un des angles du triangle limité par T_1, T_2 et T_3. Réciproquement, si une hyperbole tangente à BC, CA et AB a son centre dans l'angle opposé par le sommet à l'angle A, la branche tangente à BC (respectivement CA, AB) est dans le demi-plan P_a (respectivement P_b, P_c) limité par BC (respectivement CA, AB) ne contenant par A (respectivement : contenant B, contenant C). Si les trois côtés n'étaient pas tangents à la même branche, la branche non tangente à BC serait dans P_b ou P_c, par exemple P_b et dans le demi-plan symétrique de P_a par rapport au centre; par symétrie par rapport au centre, l'autre branche (tangente à BC)

serait dans l'angle opposé par le sommet à l'angle C du triangle; mais aucune branche ne pourrait donc rencontrer la droite AB, ce qui est absurde.

PROBLÈME 26

Énoncé

Etant donnés n points distincts sur un cercle, on trace un polygone ayant ces points pour sommets. On suppose que p couples de côtés, et p seulement, ont un point commun autre qu'un sommet, et qu'aucun triplet de côtés n'a de point commun.

1) Ce polygone partage l'intérieur du cercle en r régions. Calculer r en fonction de n et de p.

2) Pour un nombre n donné de côtés, déterminer la valeur maximum du nombre p des points d'intersection des côtés.

Indication

Deux cas, selon que n est pair ou impair

PROBLÈME 27

Énoncé

Soient α et x_0 des nombres strictement positifs. On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\alpha}{x_n}.$$

Donner un équivalent de x_n quand n tend vers l'infini.

PROBLÈME 28

Énoncé

Etant donné un ensemble fini S à n éléments (sommets) et l'ensemble A des parties de S à deux éléments (arêtes), trouver l'effectif maximal d'une partie G de A telle que, pour tous x, y et z de S,

$$\{x, y\} \in G \text{ et } \{y, z\} \in G \Longrightarrow \{x, z\} \notin G.$$

Autrement dit, exprimer, en fonction du nombre n de sommets, le nombre maximal d'arêtes d'un graphe sans triangle.