

DANS NOS GROUPES I.R.E.M.

Cette rubrique donne la parole aux groupes de l'I.R.E.M. de Strasbourg qui pourront y présenter le compte rendu de leurs activités, des extraits de leurs brochures, etc ..., en un mot tout ce qui peut aider à mieux faire connaître une recherche souvent très riche et variée, mais insuffisamment connue des collègues. Aujourd'hui, place au groupe d'histoire des mathématiques.

A partir de quand un élève fait-il, et a-t-il conscience de faire des mathématiques? Où se situe la frontière entre, d'une part **l'observation et le fait constaté**, et d'autre part **le raisonnement et le fait démontré**? Beaucoup de nos jeunes élèves ont des difficultés à comprendre la nécessité de démontrer des propriétés qui leur paraissent évidentes, et à franchir le pas décisif entre l'observation et la démonstration. En géométrie, ils sont soulagés lorsqu'ils disposent des outils analytiques qui leur permettent de remplacer le raisonnement géométrique par un calcul. Le caractère automatique et précis du calcul les sécurise, là où le raisonnement de géométrie pure les oblige à une initiative et à une recherche dont ils se sentent la plupart du temps incapables. L'apprentissage de la rigueur pourrait se faire en analyse, mais le caractère abstrait et formel des définitions qui l'accompagne nécessairement, a conduit à renoncer à cet apprentissage au lycée. L'enseignement de l'analyse y dépasse rarement le stade d'un bon usage de l'outil-informatique. Comme le remarque G. Kuntz (1) : *"Il suffit d'observer une classe de terminale technologique au cours d'un devoir en temps limité, pour se persuader que le travail sur machine a remplacé en grande partie le raisonnement mathématique. Ces élèves accordent à l'outil informatique une confiance totale, confortée par l'expérience : la calculatrice utilisée habilement leur permet de résoudre au moins 80 % d'un problème d'analyse proposé au baccalauréat."* Faut-il s'étonner alors de ce que beaucoup d'élèves quittent le lycée avec un baccalauréat scientifique en poche, sans pourtant savoir organiser et rédiger un raisonnement correct, particulièrement en analyse, au grand désespoir des professeurs d'université ou de classe préparatoire?

Or historiquement, l'analyse s'est constituée et développée principalement autour du thème de la **mesure des grandeurs**. La notion d'irrationalité, de réel, le calcul différentiel et intégral, sont nés de problèmes de mesure de longueurs, d'aires, de volumes. Ces problèmes ont leur ancrage dans une réalité physique, mais ont conduit très tôt à des découvertes qui dépassent très largement la simple intuition. Ils sont donc exemplaires pour mettre en évidence la frontière entre le **fait constaté** et le **fait démontré** : leur ancrage dans la réalité physique les rend accessibles à l'intuition de l'élève, mais l'incapacité de cette intuition à rendre compte de la situation et à résoudre le problème, l'oblige à dépasser le stade

(1) Repères IREM n° 11, avril 1993.

empirique pour accéder au stade théorique de la démonstration mathématique.

Le groupe d'histoire des mathématiques travaille actuellement à repérer cette problématique dans l'histoire à travers l'étude de trois thèmes qui paraîtront prochainement dans une brochure I.R.E.M. :

- incommensurabilité et irrationnalité,
- aires et quadratures sans calculs ni intégrales
- un cheminement historique vers l'élaboration du calcul différentiel et intégral.

Il vous livre ici un aperçu du premier thème : incommensurabilité et irrationnalité.

COMPARAISON N'EST PAS RAISON

Le bon sens veut que l'on peut toujours mesurer un segment. Ainsi, un vieux cours d'arithmétique (2) écrit : “*Deux segments de droite exactement superposables sont égaux. Ils ont même longueur. On peut mesurer cette longueur*”. Mais que signifie **mesurer**? D'après le dictionnaire de Stella Baruk (3), mesurer c'est “*évaluer une grandeur par comparaison avec une unité*”. Le problème de la mesure des grandeurs se ramène donc à un problème de comparaison. Etant donné un segment $[AB]$ et un segment $[OI]$ pris comme unité, on comptera “combien de fois” on peut reporter le segment $[OI]$ sur le segment $[AB]$, à partir de l'une de ses extrémités, par exemple A . Dans la pratique, avec une règle, on est dispensé de compter, car le segment $[OI]$ est répété une fois pour toutes un certain nombre de fois, et il suffit de lire le nombre qui mesure le segment $[AB]$ en face du point B (fig. 1)

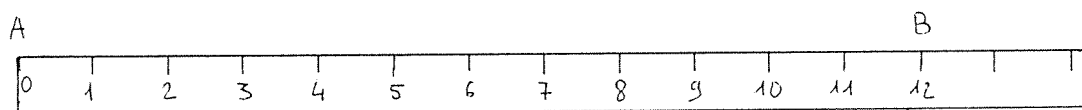


Figure 1

“Si l'on a de la chance”, on trouvera un nombre juste en face de B , par exemple 12. On dira que $[AB]$ est égal à douze fois $[OI]$ ou que $[AB]$ mesure 12 cm si l'unité $[OI]$ mesure 1 cm. Mais en général, “on n'a pas de chance”, le point B ne coïncide exactement avec aucune des graduations de la règle. Une solution consiste alors à subdiviser l'unité $[OI]$ selon une sous-unité, le millimètre, le micron, etc... jusqu'à ce qu'enfin, le point B coïncide avec une de ces nouvelles graduations, ce qui ne peut manquer d'arriver tôt ou tard, compte tenu des limites de nos instruments de mesure, aussi perfectionnés soient-ils. Les Grecs eux, avaient imaginé une autre solution, qui permet de comparer deux segments, indépendamment d'une unité choisie **a priori** : ils l'appelaient antyphairèse, que l'on peut traduire par soustraction réciproque.

(2) Cours d'arithmétique de Ch. Pugibet : Cours moyen 1ère et 2ème année, 1953, Armand Colin.

(3) Stella Baruk : Dictionnaire de mathématiques élémentaires, éd. du Seuil, 1992.

La soustraction réciproque

Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux segments, et supposons que ce soit $[AB]$ le plus petit.
De deux choses l'une :

— ou bien $[AB]$ mesure $[CD]$ (au sens défini plus haut)

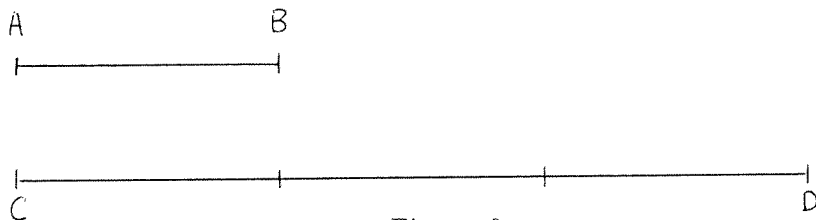


Figure 2

alors $[AB]$ est une mesure commune à $[AB]$ et $[CD]$, et c'est même la plus grande mesure commune.

On a alors une relation entre les longueurs du type : $CD = 3AB$

— ou bien $[AB]$ ne mesure pas $[CD]$:

il reste un segment $[A_1B_1]$ inférieur à $[AB]$.

Par exemple $CD = 4AB + A_1B_1$ avec $A_1B_1 < AB$

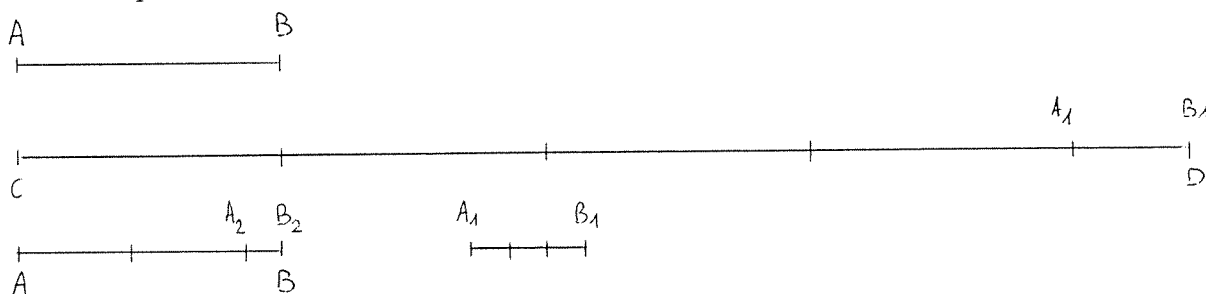


Figure 3

Mesurons de même $[AB]$ à l'aide de $[A_1B_1]$ puis $[A_1B_1]$ à l'aide de $[A_2B_2]$ etc ... jusqu'à ce que le dernier reste mesure exactement l'avant dernier reste.

Sur l'exemple de la figure 3 on a ainsi successivement

$$CD = 4AB + A_1B_1 ; AB = 2A_1B_1 + A_2B_2 ; A_1B_1 = 3A_2B_2.$$

Au total $AB = 7A_2B_2$ et $CD = 31A_2B_2$.

Ce procédé a mis en évidence une mesure commune entre $[AB]$ et $[CD]$, et même la plus grande mesure commune : A_2B_2 (4). Nous dirons comme les Grecs, que $[AB]$ et $[CD]$ ont une plus grande commune mesure, ou qu'ils sont **commensurables**, et que le segment $[AB]$ est au segment $[CD]$ comme 7 est à 31, ou encore, qu'ils ont entre eux la raison que le nombre 7 a avec le nombre 31.

Le procédé peut se généraliser à d'autres grandeurs : aires, volumes. Il est décrit exactement par Euclide dans la Proposition 3 du Livre X des **Eléments**. C'est

(4) car s'il y en avait une plus grande que A_2B_2 , elle mesurerait AB et CD donc aussi A_1B_1 et donc aussi A_2B_2 ce qui est absurde.

pourquoi ce procédé est resté dans le langage mathématique sous la dénomination d'**algorithme d'Euclide**. Il s'applique aussi bien à des grandeurs qu'à des nombres ou à des polynômes. Il a donné la théorie des anneaux euclidiens.

Pour en revenir aux segments, nous pouvons essayer de l'appliquer à la comparaison de segments intervenant dans des figures géométriques usuelles ou remarquables : carrés, polygones. Nous sommes ainsi amenés à poser le problème suivant :

Problème 1 :

Trouver la plus grande mesure commune entre la diagonale $[AC]$ d'un carré $ABCD$ et le côté $[AB]$, à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

Soit le carré $ABCD$ de côté a et de diagonale d . Par les constructions suivantes, cherchons à mettre en évidence une mesure commune à la diagonale et au côté.

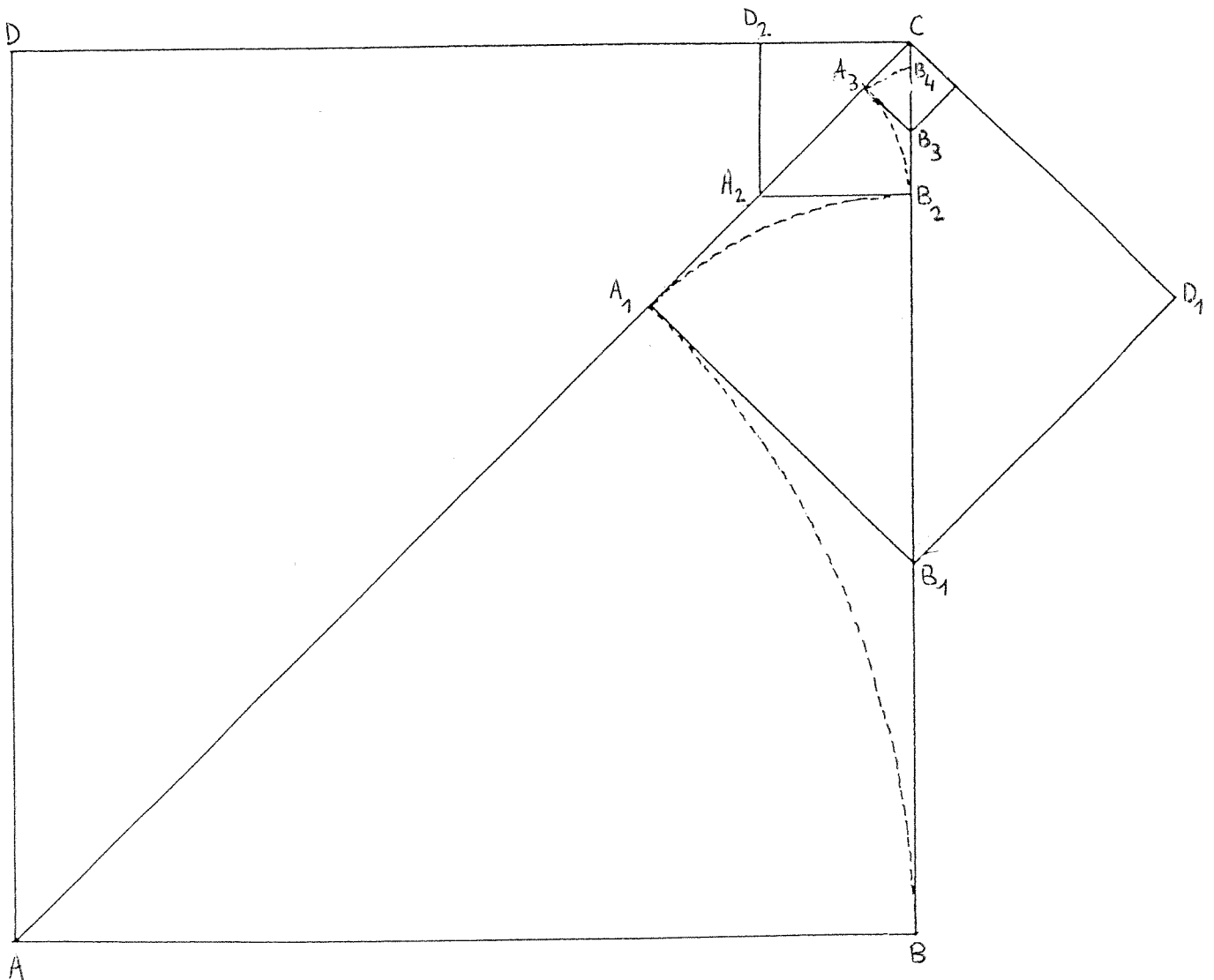


Figure 4

Dans le carré $ABCD$:

— Sur la diagonale $[AC]$, plaçons A_1 de façon que $AA_1 = AB$.

La perpendiculaire à $[AC]$ en A_1 coupe $[BC]$ en B_1 . (B_1A_1) et (B_1B) sont donc tangentes au cercle de centre A et de rayon $AB (= a)$, et $BB_1 = B_1A_1$.

— Le triangle A_1B_1C est rectangle et isocèle en A_1 (l'angle $\hat{A}_1$ est droit et l'angle $\hat{C}$ mesure 45°), donc $A_1C = A_1B_1$.

Notons a_1 le côté du carré $B_1A_1CD_1$ de diagonale B_1C .

$$a_1 = BB_1 = A_1B_1 = A_1C \text{ et } a_1 < a.$$

— **Réitérons la construction dans le carré $A_1B_1D_1C$ de côté A_1B_1 et de diagonale B_1C .** $B_1A_1 = B_1B_2$ et l'angle $\widehat{A_2B_2B}$ est droit.

Soient $a_2 = A_2A_1 = A_2B_2$ et $a_2 < a_1$.

$\widehat{A_2B_2C}$ est droit, le triangle A_2B_2C est rectangle isocèle et $A_2B_2C_2D_2$ est un carré (de côté $A_2B_2 = a_2$ et de diagonale A_2C).

— **Réitérons la construction dans le carré $A_2B_2CD_2$ etc ...**

Soit $a_0 = a$ et posons $a_1 = A_1B_1$ et

$$\begin{aligned} a_n &= A_nA_{n-1} \\ &= A_nB_n \text{ pour } n \geq 2 \end{aligned}$$

$AC = AA_1 + A_1C$	soit (1) $d = a_0 + a_1$	et $a_1 < a_0$
$BC = 2BB_1 + B_2C$	soit (2) $a_0 = 2a_1 + a_2$	et $a_2 < a_1$
$A_1C = 2A_1A_2 + A_3C$	soit (3) $a_1 = 2a_2 + a_3$	et $a_3 < a_2$
$B_2C = 2B_2B_3 + B_4C$	soit (4) $a_2 = 2a_3 + a_4$	et $a_4 < a_3$
$\vdots$	$\vdots$	
	$(n+2) a_n = 2a_{n+1} + a_{n+2}$	et $a_{n+2} < a_{n+1}$

A ce niveau là on “sent bien” que contrairement à l'exemple de la figure 3, il n'y aura jamais de mesure commune qui permette d'arrêter le processus de l'algorithme d'Euclide, en tombant sur un dernier reste a_{n+2} qui mesurerait exactement a_{n+1} . En effet à chaque étape nous nous retrouvons dans la situation initiale de comparer la diagonale d'un carré avec son côté (certes de plus en plus petit). C'est là qu'il y a un pas essentiel à franchir et la nécessité de proposer une démonstration qui arrive à gérer en **termes finis** le caractère infinitésimal de la situation. Les Grecs ne nous ont pas laissé une telle démonstration (5) utilisant la soustraction réciproque à propos du carré, mais nous trouvons dans les **Eléments** d'Euclide toutes les propositions nécessaires pour la réaliser.

Supposons qu'il existe une mesure u commune à a et d .

(5) La démonstration “par le pair et l'impair” mettant en évidence l'impossibilité de trouver des entiers p et q tels que $p^2 = 2q^2$ se trouve chez Euclide à la fin du livre X. Elle a d'autres caractéristiques que nous analysons plus loin.

a)

$$a_1 = d - a_0 = d - a$$

$$a_2 = a_0 - 2a_1$$

$$a_3 = a_1 - 2a_2$$

$\vdots$

$$a_{n+2} = a_n - 2a_{n+1}$$

Si u mesure a et d , il mesure leur différence,
 u mesure donc également $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$.

b) $d - a_0 = a_1$: de d , on enlève une quantité a_0 plus grande que sa moitié car $d^2 = 2a_0^2$ donc $a_0 < d < 2a_0$

donc $\frac{d}{2} < a_0$

(voir fig. 5).

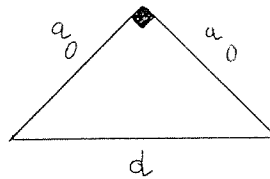


Figure 5

$(d - a_0) - 2a_2 = a_1 - 2a_2 = a_3$ du reste a_1 , on enlève une quantité $2a_2$ plus grande que sa moitié car

$$a_1 = 2a_2 + a_3 < 3a_2 < 4a_2 \text{ car } a_3 < a_2$$

$$\text{donc } \frac{a_1}{2} < 2a_2$$

$d - a_0 - 2a_2 - 2a_4 = a_3 - 2a_4 = a_5$ du reste a_3 , on enlève une quantité plus grande que sa moitié $\frac{a_3}{2} < 2a_4$.

Pour l'entier p , nous pourrions écrire de façon analogue

$$a - a_0 - 2a_2 - 2a_4 - \dots - 2a_{2p} = a_{2p+1} \text{ et } \frac{a_{2p+1}}{2} < 2a_{2p}.$$

(du reste on enlève encore une quantité plus grande que sa moitié).

Or, Euclide dit : (Prop. I du Livre X) : "deux grandeurs inégales étant proposées (ici la diagonale d et la mesure u), si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées".

Nous finirons par obtenir un reste a_{2n+1} inférieur à la mesure u (u pouvant avoir été choisie même très petite).

$$a_{2p+1} < u$$

ce qui est impossible puisque nous avons démontré que u mesure a_n et donc a_{2p+1} ; u ne saurait mesurer une grandeur qui lui est inférieure.

D'où la conclusion : il n'existe pas de mesure commune au côté d'un carré et à sa diagonale : ils sont incommensurables, c'est-à-dire que leur rapport n'est pas comme celui d'un nombre à un nombre. Autrement dit encore, il n'y a pas de raison numérique qui puisse exprimer ce rapport : celui-ci est $\alpha\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$, **irrationnel**.

Problème 2 :

Le lecteur pourra s'exercer à démontrer par le même procédé l'incommensurabilité de la diagonale et du côté d'un pentagone régulier convexe (voir fig. 6). La

réurrence s'établit plus facilement pour le pentagone que pour le carré à partir du moment où l'on dispose des propriétés du pentagone : essentiellement l'existence de triangles isocèles dont l'angle à la base est le double de l'angle au sommet :

$$ACD, ABE', BE'D', \text{ etc...}$$

Si nous posons $AC' = d$, $AB = a_0 = AE'$; $AD' = a_1 = D'A'$; $D'E' = a_2$; $D'B'' = a_3$ etc ...

nous avons les relations :

$$d = a_0 + a_1; a_0 = a_1 + a_2; a_1 = a_2 + a_3; \text{ etc ...}$$

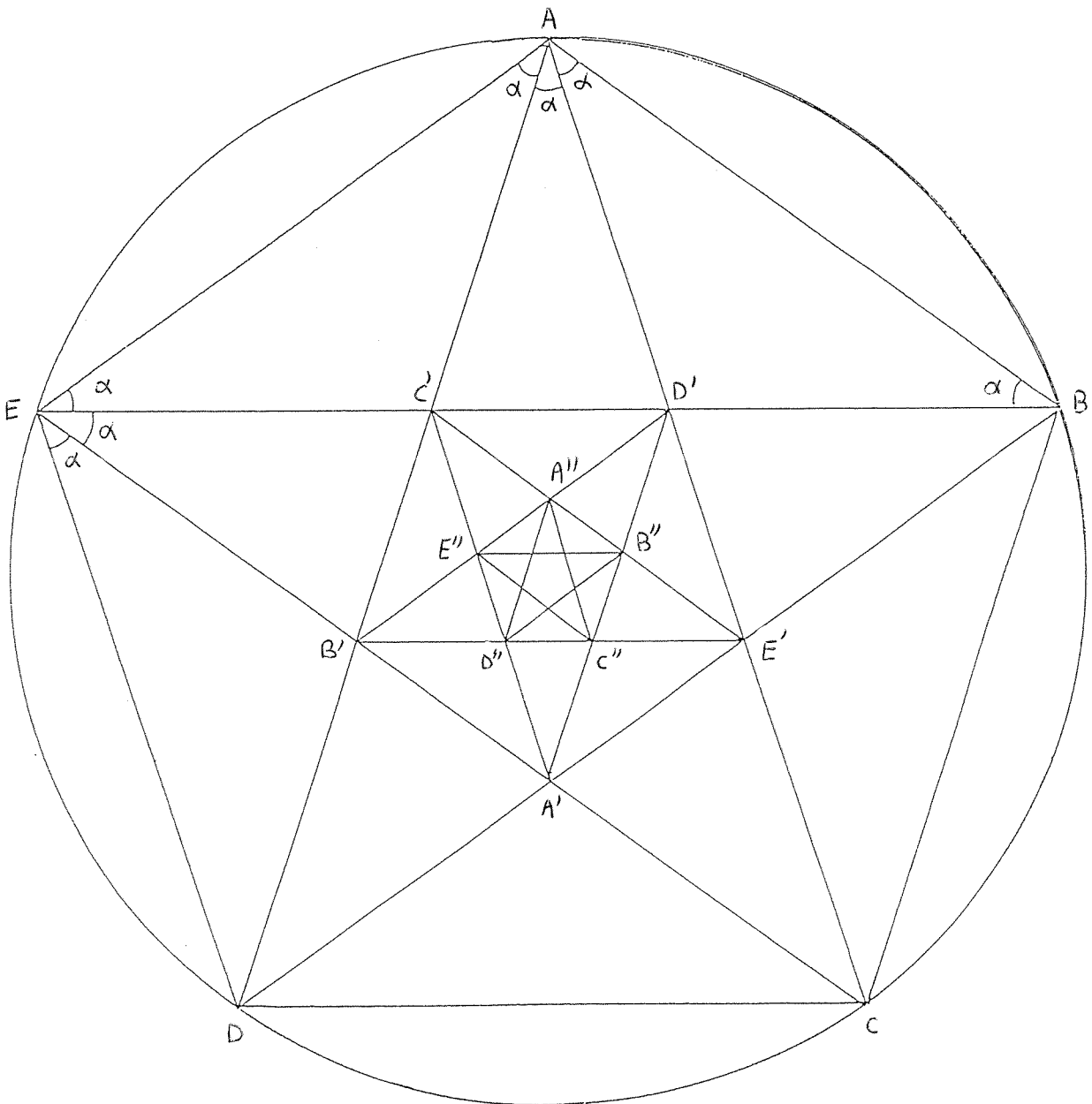


Figure 6

Problème 3

Démontrer à l'aide de l'algorithme d'Euclide l'incommensurabilité de la hauteur et du côté d'un triangle équilatéral, ou, ce qui revient au même, l'incommensurabilité du côté d'un triangle équilatéral avec le rayon du cercle circonscrit. On pourra s'appuyer sur la récurrence amorcée dans la figure 7.

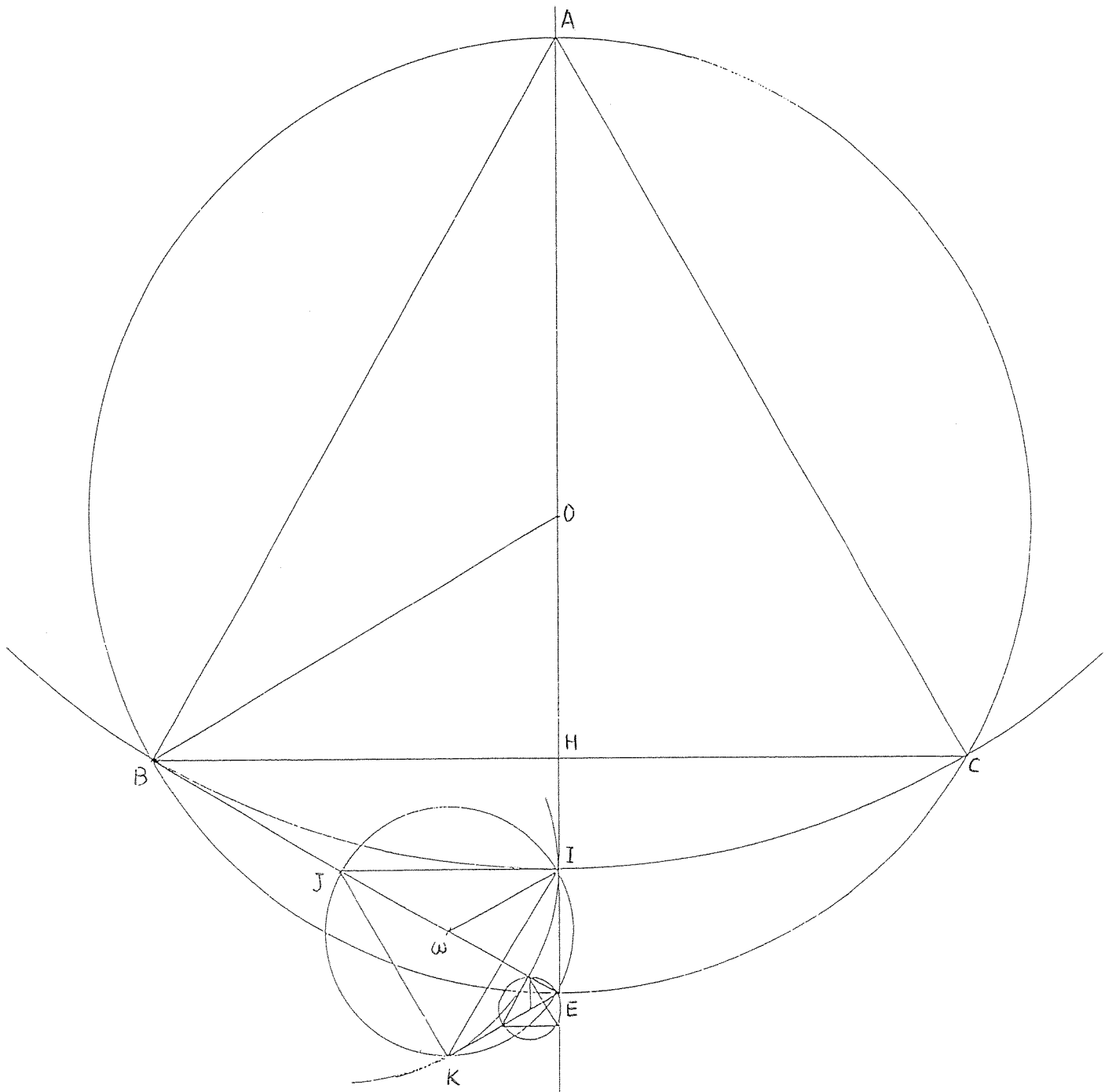


Figure 7

Eclairer ou convaincre : deux conceptions de la démonstration (6)

Pour démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$, on procède généralement d'une façon différente de celle proposée plus haut, en reprenant un raisonnement par l'absurde placé comme scholie dans certaines éditions des **Eléments** d'Euclide, à la fin du Livre X. Nous pouvons transcrire cette démonstration en termes actuels, de la façon suivante. Reportons nous à la figure 4 et supposons qu'il existe des entiers m et n tels que AB soit à AC comme m est à n (on peut supposer m et n premiers entre eux). Par le théorème de Pythagore $AC^2 = 2AB^2$ ou encore $n^2 = 2m^2$. Puisque n^2 est pair n l'est aussi et m est donc impair. Posons $n = 2k$ alors $m^2 = 2k^2$ et donc m est pair. Mais un nombre ne peut être à la fois pair et impair, il y a contradiction. Conclusion : AB et AC ne sont pas commensurables.

Quelle est la valeur et la signification de cette démonstration ?

Françoise Van Dieren-Thomas du G.E.M. (7) de Louvain-la-Neuve (Belgique) a présenté cette démonstration dans une classe de 3^e, en s'arrêtant juste avant la conclusion, et a demandé aux élèves : "*Que peut-on en conclure ?*" Les élèves ont répondu : "*Le théorème de Pythagore est faux*". Evelyne Barbin explique très bien la réaction des élèves. Ceux-ci ont bien compris le principe du raisonnement par l'absurde : "*Puisque nous arrivons à quelque chose d'absurde, c'est que l'un des arguments de la démonstration est faux. Examinons les trois arguments qui interviennent : AB et AC sont commensurables, le théorème de Pythagore et l'argumentation sur la parité. Lequel abandonner ? Exposer la situation en ces termes peut paraître provoquant au mathématicien car seule la commensurabilité des segments était mise en jeu*".

En fait, pour les élèves comme pour les Pythagoriciens à l'origine, il n'est pas question de mettre en doute la commensurabilité des segments $[AB]$ et $[AC]$. Pour rendre manifeste leur incommensurabilité il faut avoir dépassé la mesure empirique donnée par l'observation, il faut avoir idéalisé ces segments, il faut avoir cherché leur mesure commune par un processus théorique où le segment est un objet pensé et abstrait. En ce sens, les démonstrations d'incommensurabilité au moyen de l'algorithme d'Euclide nous paraissent infiniment plus éclairantes que la démonstration par le pair et l'impair. Celle-ci peut nous convaincre, dit E. Barbin, mais elle force notre entendement. Nous constatons le résultat mais, comme l'écrit Bachelard à propos de la démonstration mathématique, "*il ne suffit pas d'en constater le résultat pour en saisir le sens*". Nous pouvons encore ne pas saisir pourquoi on ne peut vraiment pas trouver de mesure commune.

Un autre argument nous fait préférer l'algorithme d'Euclide que nous ne faisons qu'esquisser ici mais que l'on trouvera plus développé dans la brochure : il donne des approximations rationnelles (et en un certain sens les meilleures approxima-

(6) Nous reprenons ici une idée développée par E. Barbin dans les Actes de l'Université d'Eté de La Rochelle sur l'histoire des mathématiques (1988) : "*La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques*".

(7) Groupe d'Enseignement des Mathématiques.

tions rationnelles) des nombres irrationnels considérés. Dans le cas du carré les relations :

$$d = a_0 + a_1 ; a_0 = 2a_1 + a_2 ; a_1 = 2a_2 + a_3 ; a_2 = 2a_3 + a_4 \text{ etc...}$$

donnent successivement :

$$\frac{d}{a_0} = 1 + \frac{a_1}{a_0} ; \frac{a_0}{a_1} = 2 + \frac{a_2}{a_1} ; \frac{a_1}{a_2} = 2 + \frac{a_3}{a_2}$$

ou encore :

$$\sqrt{2} = \frac{d}{a_0} = 1 + \frac{a_1}{a_0} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{a_2}{a_1}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{a_3}{a_2}}} \text{ etc...}$$

D'où les approximations obtenues si nous négligeons le dernier reste : $3/2$; $7/5$; $17/12$ etc...

Au total, nous ne pouvons que reprendre le commentaire que fait Stella Baruk dans son Dictionnaire de Mathématiques élémentaires à l'article "Commensurable-incommensurable" :

"Il est tout à fait dommage, pour des raisons pédagogiques et culturelles, que ces mots et les notions qu'ils évoquent ne figurent pas au programme des collèges :

- *ils rendent compte, en effet, (...) de distinctions essentielles entre des rapports de grandeurs : ceux auxquels on a affaire de manière courante, tant en mathématiques que dans ses utilisations dans les sciences ou les techniques, sont toujours commensurables, ceux de la théorie non ;*
- *ils éclairent, par l'importance accordée aux notions de **rapport** et de **proportion**, qui étaient essentielles, plus de vingt siècles d'histoire des mathématiques, mais aussi d'histoire de la pensée et rendent compte encore aujourd'hui, de la "résistance" qu'elle peut opposer à des notions toujours difficiles, qui mettent en jeu le **continu**, l'**infini** d'une écriture pour un nombre, lui, fini,*
- *ils permettent, au niveau des collèges, de justifier explicitement l'introduction des nombres réels – réels irrationnels qui autrement sont parfaitement inutiles".*

ERRATA :

Dans l'article de M. Ehrhart : "Sur les polygones entiers ou rationnels" (cf. n° précédent)

page 26, dernière ligne, lire : $i_n = Sn^2 - \frac{p}{2}n + 1, j_n = Sn^2 + \frac{p}{2}n + 1$;

page 28, troisième ligne, lire : $X + 2Y > 2n$

dans la seconde figure :

au lieu de $[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ lire : $[1; \frac{1}{2}]$

au lieu de $[\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$ lire : $[\frac{2}{3}; \frac{2}{3}]$

page 29, il faut lire :

$$V = \frac{i_3 - 3i_2 + 3i_1 + 1}{6} = \frac{j_3 - 3j_2 + 3j_1 - 1}{6}.$$