LA MÉTHODE D'ARBOGAST POUR DÉVELOPPER LA k–ième PUISSANCE D'UNE SÉRIE FORMELLE

Dominique Dumont
E.E.S. Sciences, B.P. 906, Antananarivo-101, Madagascar

1. — Introduction

Dans ses précédents articles de l'Ouvert, et dans la thèse qu'il vient de soutenir [F], Jean-Pierre Friedelmeyer a remis à l'honneur les travaux du mathématicien alsacien Arbogast, et en particulier son *Calcul des dérivations* [Ar], qui était encore connu et cité par les membres de l'Ecole britannique de calcul symbolique au XIXe siècle (Cayley [Ca] etc.), mais qui depuis était, semble-t-il, tombé dans l'oubli. Dans cet article, nous voudrions rappeler comment Arbogast calcule directement les termes successifs du développement de $(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_ix^i + \cdots)^k$ sans supposer qu'il a préalablement calculé ceux du développement de la même série portée à la puissance $k-1$ (ce que tout un chacun aurait tendance à faire) et sans supposer non plus la moindre connaissance des coefficients dits *multinomiaux*.
La méthode d'Arbogast présente plusieurs avantages : d'abord on ignore les coefficients numériques, on calcule seulement sur les a_i en les traitant comme des variables formelles, et en utilisant des règles de différentiation et de substitution, ce qui d'ailleurs se pratique de plus en plus de nos jours en Combinatoire (cf. [Ch] et le paragraphe 4 du présent article). En outre il n'est pas exclu que la méthode d'Arbogast présente un intérêt du point de vue de la complexité algorithmique, qu'elle puisse constituer un outil supplémentaire pour les algorithmes de calculs formels actuellement implantés sur ordinateurs, car elle est très économe de mémoire, et très performante en temps de calcul.
Pour introduire la méthode d'Arbogast il nous suffira d'exploiter une notion combinatoire bien classique [An] [Co] [MM] quoique peu enseignée, celle de *composition* de l'entier n.

2. — Compositions de l'entier n.

Définition. *Etant donnés deux entiers n et k tels que $1 \leq k \leq n$, on appelle composition de l'entier n en k parts un k–uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ d'entiers $x_i \geq 1$ tels que*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n.$$

Par exemple, $1 + 3 + 1 = 5$ est une composition de l'entier $n = 5$ en $k = 3$ parts. Le k–uplet étant ordonné, on considère par exemple la composition $3 + 1 + 1 = 5$ comme distincte de la précédente.
Lorsqu'on impose la condition supplémentaire de croissance des parts : $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_k$ la composition porte le nom de *partition*.

© L'OUVERT **73** (1993)

On dira de deux compositions qu'elles sont équivalentes si elles se déduisent l'une de l'autre par permutation des parts (nos deux exemples sont donc deux compositions équivalentes). Il est clair que chaque classe d'équivalence contient une partition et une seule, dans le cas présent cette partition est $1+1+3=5$.
A une composition $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ de l'entier n on associe le monôme $a_{x_1}a_{x_2}\cdots a_{x_k}$ de degré total k. Par exemple, on associe à $1+3+1$ le monôme $a_1a_3a_1$. Mais ce monôme sera considéré comme commutatif, une composition équivalente conduira donc au même monôme, qui, dans notre exemple, s'écrit $a_1^2a_3$, quand il est ordonné selon les indices croissants.

Proposition 1. *Dans le développement de* $(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_ix^i + \cdots)^k$, *le coefficient* $A_{n,k}$ *de* x^n *est égal à la somme des monômes associés aux compositions de l'entier* n *en* k *parts.*

Exemple.— Considérons les compositions de l'entier 5 en 3 parts. On a d'une part $1+1+3$, $1+3+1$ et $3+1+1$, et d'autre part $1+2+2$, $2+1+2$ et $2+2+1$. La somme des monômes associés est $A_{5,3} = 3a_1^2a_3 + 3a_1a_2^2$, et on a :

$$(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_ix^i + \cdots)^3 = \cdots + (3a_1^2a_3 + 3a_1a_2^2)x^5 + \cdots.$$

Démontrons cette proposition. Pour calculer le produit de k exemplaires de la série $a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_ix^i + \cdots$, il faut par distributivité additionner tous les produits possibles obtenus en multipliant k facteurs : un terme choisi dans le premier exemplaire, de rang i_1, un terme choisi dans le deuxième exemplaire, de rang i_2, etc. et un terme choisi dans le $k-$ième exemplaire, de rang i_k. En faisant le produit, on obtient $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}x^{i_1+i_2+\cdots+i_k}$. En rassemblant tous les termes comportant x^n, on obtient exactement tous les monômes associés aux compositions $(i_1, i_2, \ldots i_k)$ de l'entier n en k parts, d'où le résultat.
Voici les premières valeurs des polynômes $A_{n,k}$:

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6
1	a_1					
2	a_2	a_1^2				
3	a_3	$2a_1a_2$	a_1^3			
4	a_4	$2a_1a_3 + a_2^2$	$3a_1^2a_2$	a_1^4		
5	a_5	$2a_1a_4 + 2a_2a_3$	$3a_1^2a_3 + 3a_1a_2^2$	$4a_1^3a_2$	a_1^5	
6	a_6	$2a_1a_5 + 2a_2a_4 + a_3^2$	$3a_1^2a_4 + 6a_1a_2a_3 + a_2^3$	$4a_1^3a_3 + 6a_1^2a_2^2$	$5a_1^4a_2$	a_1^6

Table des coefficients d'Arbogast $A_{n,k}$

La proposition nous permet de calculer les $A_{n,k}$ en dénombrant les compositions dans chaque classe d'équivalence, ce qui se fait assez facilement tant que n et k sont assez petits. Mais si nous voulons poursuivre le calcul, il va se compliquer. Par exemple supposons qu'on veuille pousser assez loin le calcul de $(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_ix^i + \cdots)^5$. Le coefficient de x^{12} est déjà une somme de 13 monômes, car il existe 13 partitions de l'entier 12 en 5 parts (parmi ces 13 monômes figure par exemple $60a_1a_2^2a_3a_4$, car le nombre de compositions équivalentes à $1+2+2+3+4$ est égal à 60, et aussi $20a_1a_2a_3^3$, car le nombre de compositions équivalentes à $1+2+3+3+3$ est égal à $\frac{5!}{3!}=20$).

La question qui se pose est la suivante : si l'on veut obtenir la suite des coefficients de la 5−ième colonne, doit-on recommencer tout le calcul à chaque étape, ou existe-t-il une récurrence permettant de calculer un coefficient à partir du précédent et de bénéficier ainsi des calculs déjà faits? Dans le cas présent, il y a 10 monômes dans le coefficient de x^{11}, peut-on les utiliser pour calculer nos 13 monômes à la 12−ième ligne? C'est à ce problème que répond la règle d'Arbogast énoncée plus loin.

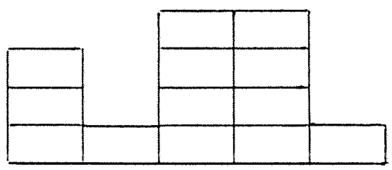
3. — Représentations graphiques des compositions.

Nous en retiendrons deux (le lecteur en trouvera une troisième, fort intéressante pour d'autres usages, dans [An][MM]) :
- la représentation "linéaire", qui consiste à dessiner n points sur une ligne, puis à délimiter les parts à l'aide de barres de séparation. Comme il y a k parts, on met $k-1$ barres de séparation. Par exemple,

$3+1+4+4+1$ donne o o o | o | o o o o | o o o o | o

- la représentation en "histogramme" :

$3+1+4+4+1$ donne



Proposition 2. *Le nombre des compositions de l'entier n en k parts est égal au coefficient binomial $\binom{n-1}{k-1}$ (ou C_{n-1}^{k-1} dans l'ancienne notation).*

En effet, dans la représentation linéaire il existe $n-1$ interstices entre les n points, et la composition est définie par le choix de $k-1$ d'entre eux où l'on met une barre de séparation, d'où le résultat.
Cette proposition nous conduit à considérer le tableau d'Arbogast comme une extension polynomiale du triangle de Pascal, puisqu'on obtient le triangle de Pascal quand on remplace tous les a_i par 1.

4. — Prolongements des compositions.

Le problème posé à la fin du paragraphe 2 peut se reformuler de la manière suivante : comment peut-on, connaissant les compositions de l'entier $n-1$ en k parts, en déduire les compositions de l'entier n en k parts? On conçoit qu'il suffit d'ajouter 1 à l'une des parts. Mais nous devons définir une application (à *quelle* part ajoute-t-on 1?) qui soit injective (plusieurs compositions de $n-1$ peuvent aboutir à la même composition de n). Nous devons donc être plus précis. Etant donnée une composition $\gamma=(x_1,x_2,\dots x_k)$, posons $m=max\{x_1,x_2,\dots x_k\}$. Une part x_l est dite *maximale* si $x_l=m$, et *sous-maximale* si $x_l=m-1$.
Exemples : parmi les compositions de l'entier 12 en 5 parts,

$3+1+3+3+2$ contient trois parts maximales et une sous-maximale.
$1+4+3+1+3$ contient une part maximale et deux sous-maximales.
$2+2+2+4+2$ contient une part maximale et aucune sous-maximale.

A présent, nous définissons deux types de prolongements d'une composition γ de l'entier $n-1$ en k parts contenant q parts maximales de taille m et p parts sous-maximales en une composition γ' de l'entier n en k parts (penser à l'histogramme) :
- *prolongement maximal* : on choisit une part maximale x_l de γ et on l'augmente de 1, on obtient ainsi une composition γ' possédant une seule part maximale de taille $(m+1)$ et $q-1$ parts sous-maximales de taille m.
- *prolongement sous-maximal* : on choisit une part sous-maximale de γ et on l'augmente de 1, on obtient ainsi une composition γ' possédant $(q+1)$ parts maximales de taille m et $p-1$ parts sous-maximales.
Le prolongement maximal établit une bijection entre les couples (γ, x_l) formés d'une composition γ de l'entier $n-1$ en k parts et d'une part maximale x_l, et les compositions γ' de l'entier n en k parts ne possédant qu'une seule part maximale. Le monôme associé à γ s'écrit $\cdots a_m^q$, c'est-à-dire se termine par la lettre maximale a_m à la puissance q, donc il existe q prolongements maximaux de γ aboutisant à q compositions γ' ayant chacune un monôme associé se terminant par $a_m^{q-1}a_{m+1}$. En revanche, le prolongement sous-maximal établit une bijection entre deux ensembles de couples : les couples (γ, x_l) formés d'une composition γ de l'entier $n-1$ en k parts et d'une part sous-maximale x_l de γ, et les couples (γ', x_l') formés d'une composition γ' de l'entier n en k parts dont au moins deux sont maximales, et d'une part maximale x_l' de γ'. Le monôme associé à γ se termine par $\cdots a_{m-1}^p a_m^q$, il existe p prolongements sous-maximaux de γ aboutisant à p compositions γ' ayant chacune un monôme se terminant par $a_{m-1}^{p-1}a_m^{q+1}$. Mais une composition γ' contribue à $(q+1)$ couples (γ', x_l'), c'est-à-dire qu'elle est atteinte $(q+1)$ fois par des prolongements sous-maximaux issus de compositions de l'entier $n-1$ en k parts. Nous devons donc diviser par $q+1$ pour trouver le nombre exact de compositions γ' dont le monôme se termine par $a_{m-1}^{p-1}a_m^{q+1}$.
En résumé nous aboutissons au résultat suivant :

Proposition 3 (Règle d'Arbogast). *Soit D_a l'opérateur défini sur chaque monôme de la manière suivante :*

$$D_a(a_1^i a_2^j \cdots a_{m-1}^p a_m^q a_{m+1}^0) = q a_1^i a_2^j \cdots a_{m-1}^p a_m^{q-1} a_{m+1}^1 + p a_1^i a_2^j \cdots a_{m-1}^{p-1} \frac{a_m^{q+1}}{q+1} a_{m+1}^0,$$

autrement dit on additionne le monôme qu'on obtient en dérivant par rapport à la lettre a_m et en intégrant par rapport à la lettre a_{m+1}, et le monôme qu'on obtient en dérivant par rapport à la lettre a_{m-1} et en intégrant par rapport à la lettre a_m. On prolonge D_a aux polynômes par linéarité. Dans ces conditions, on a

$$A_{n,k} = D_a(A_{n-1,k}).$$

Remarques.— 1) Bien entendu, on peut si l'on préfère supprimer dans cette écriture le terme a_{m+1}^0 et énoncer qu'on multiplie par a_{m+1}, et non qu'on intègre par rapport à la lettre a_{m+1}, mais alors l'énoncé perd en symétrie.

2) L'opérateur D_a n'est pas à proprement parler un opérateur de dérivation, car il ne satisfait pas la formule de Leibniz. On a par exemple $D_a(a_1a_2) \neq D_a(a_1)a_2 + a_1D_a(a_2)$.
3) Le résultat qu'énonce cette proposition (semble-t-il tombé dans l'oubli?) était bien connu de Cayley [Ca] qui l'appelait *Arbogast's rule of the last and the last but one.*

Exemple d'application.— Revenons au problème formulé à la fin du paragraphe 2. Supposons qu'on connaisse le coefficient de x^{11}, qui contient en particulier le monôme $30a_1a_2^2a_3^2$. On obtient directement

$$D_a(30a_1a_2^2a_3^2) = 60a_1a_2^2a_3a_4 + 20a_1a_2a_3^3$$

(car $30.2/3 = 20$). La règle d'Arbogast permet donc de calculer successivement les termes d'une colonne du tableau par une récurrence qui n'utilise que le terme précédent. En outre on a le résultat suivant :

Proposition 4 (Arbogast). *En prenant la dérivée partielle par rapport à a_1 de $A_{n,k}$ on obtient*

$$\frac{\partial}{\partial a_1}A_{n,k} = kA_{n-1,k-1}.$$

Démonstration.— Nous dirons qu'une part x_l est minimale si $x_l = 1$. Considérons la bijection $(\gamma, l) \mapsto (\delta, l)$ qui, à tout couple formé d'une composition γ de l'entier n en k parts possédant au moins une part minimale et de l'indice l d'une part minimale x_l de γ, fait correspondre le couple formé de la composition δ de l'entier $n-1$ en $k-1$ parts obtenue en supprimant x_l, et du même entier l. C'est bien une bijection, car l'entier l représente pour δ le numéro de la place où l'on insère une part minimale pour retrouver γ. Le monôme associé à γ commence par $a_1^ia_2^j\cdots$ (avec $i \geq 1$) et celui de δ commence par $a_1^{i-1}a_2^j\cdots$. Chaque γ contribue i fois à un couple (γ, l), donc chaque monôme $a_1^ia_2^j\cdots$ donne $ia_1^{i-1}a_2^j\cdots = \frac{\partial}{\partial a_1}a_1^ia_2^j\cdots$. Mais chaque composition δ de l'entier $n-1$ en $k-1$ parts correspond à k couples (δ, l), car comme elle possède $k-1$ parts, il y a k places d'insertion de numéro l pour une nouvelle part minimale. D'où le résultat.

Exemple.— $(1+1+2, 1) \mapsto (1+2, 1)$, $(1+1+2, 2) \mapsto (1+2, 2)$, $(1+2+1, 1) \mapsto (2+1, 1)$, $(1+2+1, 3) \mapsto (1+2, 3)$, $(2+1+1, 2) \mapsto (2+1, 2)$, $(2+1+1, 3) \mapsto (2+1, 3)$. Dans cet exemple, $n = 4$, $k = 3$, $i = 2$. Chacune des trois compositions γ correspond à deux couples (γ, l) et chacune des deux compositions δ correspond à trois couples (δ, l). On a bien : $\frac{\partial}{\partial a_1}(3a_1^2a_2) = 3(2a_1a_2)$.

Ce résultat permet de calculer deux lignes successives du triangle d'Arbogast sans supposer connue les précédentes, en procédant de droite à gauche en zigzag :

Corollaire (deuxième règle d'Arbogast). *L'entier n étant donné, on déduit les $A_{n-1,k}$ et $A_{n,k}$ en faisant décroître k de $n-1$ à 1 et en utilisant :*

$$A_{n,n} = a_1^n, \quad A_{n-1,n-1} = a_1^{n-1}, \quad A_{n,k} = D_a(A_{n-1,k}), \quad A_{n-1,k-1} = \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial a_1}A_{n,k}.$$

Exemple.— Voici comment on calcule les 4–ième et 5–ième lignes. On part de a_1^5 à droite sur la 5-ième ligne, et de a_1^4, puis $D_a(a_1^4) = 4a_1^3a_2$, puis $\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial a_1}(4a_1^3a_2) = 3a_1^2a_2$, puis $D_a(3a_1^2a_2) = 3a_1^2a_3 + 3a_1a_2^2$, puis $\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial a_1}(3a_1^2a_3 + 3a_1a_2^2) = 2a_1a_3 + a_2^2$, puis $D_a(2a_1a_3 + a_2^2) = 2a_1a_4 + 2a_2a_3$, etc.
L'intérêt de calculer les coefficients d'une ligne provient de la question dont est parti Arbogast originellement, celle du développement d'une fonction composée, question que nous allons aborder à présent.

4. — Le développement d'une fonction composée

Soient

$$x(t) = x_1t + x_2\frac{t^2}{2!} + \cdots + x_n\frac{t^n}{n!} + \cdots \qquad y(x) = y_0 + y_1x + y_2\frac{x^2}{2!} + \cdots + y_n\frac{x^n}{n!} + \cdots$$

deux séries formelles sous forme dite exponentielle (on met des $n!$ en dénominateurs). Nous substituons la première, qui est sans terme constant, à la variable de la seconde. Nous obtenons ainsi la composée des deux séries

$$y(x(t)) = y_0 + y_1x(t) + y_2\frac{x(t)^2}{2!} + \cdots + y_n\frac{x(t)^n}{n!} + \cdots$$

Nous cherchons un algorithme simple pour calculer le développement de cette série selon les puissances croissantes de t. Récemment, William Chen [Ch] a proposé la méthode suivante. Considérons $x^{(k)}(t)$, la dérivée k–ième de $x(t)$, que nous notons simplement X_k. De même, notons simplement Y_k pour désigner la fonction obtenue en substituant $x(t)$ à x dans $y^{(k)}(x)$. A présent, calculons les dérivées successives de $Y_0 = y(x(t))$ par rapport à t, en appliquant la règle bien connue pour une dérivée de fonction composée :

$$\frac{d}{dt}y(x(t)) = y'(x(t))x'(t) = Y_1X_1$$
$$\frac{d^2}{dt^2}y(x(t)) = y'(x(t))x''(t) + y''(x(t))x'(t)^2 = Y_1X_2 + Y_2X_1^2$$
$$\frac{d^3}{dt^3}y(x(t)) = Y_1X_3 + Y_2(3X_1X_2) + Y_3X_1^3$$

Il est clair que

$$\frac{d}{dt}X_k = X_{k+1}, \quad \frac{d}{dt}Y_k = \frac{d}{dt}y^{(k)}(x(t)) = y^{(k+1)}(x(t)).x'(t) = Y_{k+1}X_1.$$

Pour obtenir le développement cherché nous devons, d'après la formule de Taylor-Mac Laurin, porter $t = 0$ dans les dérivées successives de $y(x(t))$. Or les X_k et Y_k sont des fonctions de t telles que $X_k(0) = x_k$ et $Y_k(0) = y_k$. Considérons alors l'opérateur différentiel D défini sur l'alphabet

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots, y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots\}$$

par $D(x_1) = x_2$, $D(x_2) = x_3$, $D(x_3) = x_4$, etc., $D(y_0) = y_1x_1$, $D(y_1) = y_2x_1$, $D(y_2) = y_3x_1$, $D(y_3) = y_4x_1$, etc. Nous étendons cet opérateur aux monômes à l'aide de la règle de Leibniz : $D(uv) = D(u).v + u.D(v)$, puis aux polynômes par linéarité. Voici les dérivées successives de la lettre y_0 selon cet opérateur :

$$\begin{aligned}
D^0(y_0) &= y_0 \\
D^1(y_0) &= y_1x_1 \\
D^2(y_0) &= y_1x_2 + y_2x_1^2 \\
D^3(y_0) &= y_1x_3 + y_2(3x_1x_2) + y_3x_1^3 \\
D^4(y_0) &= y_1x_4 + y_2(4x_1x_3 + 3x_2^2) + y_3(6x_1^2x_2) + y_4x_1^4
\end{aligned}$$

Nous sommes ainsi conduits au résultat suivant, qui est la forme que Chen propose pour la formule dite de Faa di Bruno [Co, p.148].

Proposition 5 (W Chen)[Ch]. *On a l'identité*

$$y(x(t)) = y_0+y_1x_1t+(y_1x_2+y_2x_1^2)\frac{t^2}{2!}+(y_1x_3+y_2(3x_1x_2)+y_3x_1^3)\frac{t^3}{3!}+\cdots+D^n(y_0)\frac{t^n}{n!}+\cdots$$

où D est l'opérateur différentiel défini ci-dessus.

Les polynômes $D^n(y_0)$ s'appellent les polynômes de Bell, mais la définition qu'en donne Chen est beaucoup plus agréable que la définition classique ([Co] p.144 et 184) car elle permet d'éviter d'avoir à écrire les coefficients numériques. Notons en passant que l'interprétation combinatoire classique des polynômes de Bell en termes de partitions d'ensembles s'obtient également de manière immédiate ([Ch]). Ce calcul littéral est assez apparenté à celui d'Arbogast. Nous allons d'ailleurs retranscrire le calcul de Chen dans le contexte des séries formelles ordinaires, qui est celui étudié par Arbogast.

Posons en effet $a_k = \frac{x_k}{k!}$ et $b_k = \frac{y_k}{k!}$. Par suite, le calcul de $y(x(t))$ devient celui de

$$y(x(t)) = b_0+b_1(a_1t+a_2t^2+\cdots)+b_2(a_1t+a_2t^2+\cdots)^2+\cdots+b_k(a_1t+a_2t^2+\cdots)^k+\cdots$$

Soit A_n le coefficient de t^n dans ce développement. D'après la proposition 5, $A_n = \frac{D^n(y_0)}{n!}$. D'après la proposition 1,

$$A_n = b_1a_n + \cdots + b_kA_{n,k} + \cdots + b_na_1^n.$$

Faisons le changement de variables pour l'opérateur D. On a

$$D(a_k) = D(\frac{x_k}{k!}) = \frac{x_{k+1}}{k!} = (k+1)a_{k+1} \quad \text{et} \quad D(b_k) = D(\frac{y_k}{k!}) = \frac{y_{k+1}}{k!}x_1 = (k+1)b_{k+1}a_1.$$

En outre,

$$D(A_n) = D(\frac{D^n(y_0)}{n!}) = \frac{D^{n+1}(y_0)}{n!} = (n+1)A_{n+1}.$$

Nous aboutissons ainsi au résultat suivant que nous appellerons formule de Chen-Faa di Bruno pour les séries ordinaires :

Proposition 6. *Soit l'alphabet* $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots\}$ *et soit* D *l'opérateur différentiel défini sur cet alphabet par* $D(a_1) = 2a_2$, $D(a_2) = 3a_3$, $D(a_3) = 4a_4$, *etc.,* $D(b_0) = b_1a_1$, $D(b_1) = 2b_2a_1$, $D(b_2) = 3b_3a_1$, $D(b_3) = 4b_4a_1$, *etc. Alors, on a*

$$b_0+b_1(a_1t+a_2t^2+\cdots)+b_2(a_1t+a_2t^2+\cdots)^2+\cdots+b_k(a_1t+a_2t^2+\cdots)^k+\cdots = \sum A_nt^n$$

où A_n *est donné par la récurrence :*

$$A_0 = b_0 \qquad \text{et} \qquad A_n = \frac{1}{n}D(A_{n-1}).$$

Remarques.— 1) On peut donner une preuve combinatoire directe de ce résultat en utilisant la représentation linéaire des compositions, avec points et barres de séparation (en ajoutant une barre à chaque extrémité), que voici, schématiquement sur un exemple :

$$|\circ\circ\circ|\circ|\circ\circ\circ\circ|\circ\circ\circ\circ|\circ| \qquad \text{donne} \qquad b_5a_3a_1a_4a_4a_1$$

(b_5 parce qu'il y a 5 parts, donc 6 barres) Il y a deux types d'insertion d'un nouveau point : soit *au sein* d'une part x_l de taille j (il y a $j+1$ places d'insertion dans cette part et il faudra remplacer a_j par a_{j+1} dans le monôme) soit en tant que *nouvelle* part et à la place d'une barre, ce qui signifie qu'on remplace une barre $|$ par $|\circ|$: il y a $k+1$ places d'insertion de ce type, et il faut remplacer b_k par $b_{k+1}a_1$. Notons enfin qu'une composition de l'entier n sera atteinte n fois, car elle possède n points.

2) Du point de vue du calcul, cet algorithme est plus facile à programmer que celui d'Arbogast car il comportera moins d'instructions conditionnelles, la loi de dérivation étant uniforme. Mais le fait qu'on doive différentier par rapport à toutes les variables de l'alphabet, au lieu de se contenter de le faire par rapport aux variables maximales et sous-maximales, rend le temps de calcul plus long. L'algorithme est également moins économe de mémoire, car on doit opérer ligne par ligne et non coefficient par coefficient comme on le fait par la méthode d'Arbogast.

BIBLIOGRAPHIE

[An] ANDREWS G.E., The theory of partitions, Encycl. of Math. and Its Applic., vol 2, Addison Wesley

[Ar] ARBOGAST L.F.A., Du Calcul des Dérivations, Imp. Levrault Frères, An VIII (1800)

[Ca] CAYLEY A., On an extension of Arbogast's method of Derivations, Philos. Transactions of the Royal Soc. London, vol. 151 (1861), 37 – 43

[Ca] CAYLEY A., Specimen of a litteral Table for binary quantics, otherwise a partition table, Amer. Jour. of Math. vol. IV (1881), 248 – 255

[Ch] CHEN W.Y.C., Context-free Grammars, Differential Operators and Formal Power Series, Actes Coll. Séries formelles et Combinatoire algébrique, LABRI, Bordeaux (1991)

[Co] COMTET L., Analyse Combinatoire, vol. 1, P.U.F.

[F] FRIEDELMEYER J.P., Un mathématicien alsacien pendant la Révolution, Louis Arbogast, l'Ouvert $n°53$

[F] FRIEDELMEYER J.P., Le calcul des dérivations d'Arbogast, l'Ouvert $n°54$, Mars 1989

[F] FRIEDELMEYER J.P., Le calcul des dérivations d'Arbogast dans le projet d'algébrisation de l'Analyse à la fin du XVIIIe siècle, Thèse de Doctorat, Université de Nantes, Strasbourg, Juin 1993

[MM] MAC MAHON P.A., Collected papers, vol I, chap. 5, M.I.T. Press, Cambridge 1978, 581–756.