

FRACTALS ARITHMÉTIQUES (*)

Jean-Pierre REVEILLÈS

Strasbourg, U.F.R. de Mathématique et d'Informatique

1. Introduction

Les fractals sont souvent présentés à partir de l'une de leurs caractéristiques essentielles: leur comportement étrange vis-à-vis de la dimension. Ils semblent — intuitivement — avoir une dimension différente de leur dimension topologique. Nous exposerons ici une classe d'ensembles qui méritent ce qualificatif mais qui sont engendrés par un processus très simple : l'itération d'applications *quasi-affines*, composées d'une transformation affine rationnelle et de la partie entière. Cette simplicité cache des propriétés très complexes et peu connues; la littérature mathématique est peu loquace sur ce sujet.

Nous montrerons que les applications quasi-affines de \mathbb{Z}^2 dans lui-même apparaissent naturellement dans la question des systèmes de numération de l'anneau des entiers de Gauss, nous donnerons quelques résultats élémentaires sur leur dynamique et nous montrerons qu'elles apportent une réponse au problème des rotations discrètes. Nous terminerons cet article par un bref commentaire sur la notion — difficilement évitable dès qu'on parle de fractals — de dimension.

2. Notations

Avant de continuer, fixons les notations. Soient x un rationnel et n un entier positif :

- $[x]$ désigne comme d'habitude la *partie entière* de x . On a donc l'inégalité $[x] \leq x < [x] + 1$.
- $\{x/n\}$ désigne le nombre $x - n[x/n]$. On a donc $0 \leq \{x/n\} < n$ et l'égalité

$$x = \left[\frac{x}{n} \right] n + \left\{ \frac{x}{n} \right\}.$$

On remarquera que lorsque x est entier, $[x/n]$ et $\{x/n\}$ sont le quotient et le reste de la division euclidienne de x par n .

(*) Conférence IREM de Strasbourg - Régionale APMEP d'Alsace donnée le 14 avril 1993.

3. Bases de numération de l'anneau des entiers de Gauss

La question des systèmes de numération a été périodiquement abordée dans la littérature dans l'espoir d'en découvrir qui soient mieux adaptés aux architectures récentes d'ordinateurs (cf. Knuth [8], Gilbert [3] et [4], Muller [9]). Un aspect intéressant de ces travaux est leur tentative d'extention des systèmes de numération de l'anneau \mathbb{Z} à des anneaux plus généraux, par exemple l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss.

3.1 Division euclidienne dans l'anneau des entiers de Gauss

Il est bien connu que $\mathbb{Z}[i]$ possède une *division euclidienne* que nous rappelons brièvement. Soit $\rho = a + ib \neq 0$ un entier de Gauss donné et posons $N = a^2 + b^2$.

Soit $\xi = x + iy$ un entier quelconque et considérons le nombre complexe $\xi/\rho = X + iY$, où X, Y sont des *rationnels*. En considérant l'entier de Gauss $\chi = [X] + i[Y]$, on voit immédiatement qu'il existe un entier de Gauss $\sigma = s + it$ qui vérifie les deux conditions :

$$\xi = \chi\rho + \sigma, \quad s^2 + t^2 < N.$$

Cependant, ces conditions n'assurent pas l'unicité du quotient χ et du reste σ . En effet, lorsque X et Y sont de la forme $n + \frac{1}{2}$, il y a encore trois autres valeurs possibles pour σ .

Nous allons examiner s'il est possible de définir une division euclidienne dans laquelle le quotient et le reste sont uniques.

Nous supposons désormais que a et b sont premiers entre eux. En notant a^{-1} l'inverse de a dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, il est alors facile de vérifier que l'application

$$\mathbb{Z}[i]/\rho\mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$$

définie par

$$(1) \quad \xi \longmapsto a^{-1}(ax + by) \pmod{N}$$

est un isomorphisme d'anneaux dont l'inverse est :

$$(2) \quad k \longmapsto k - \left[\frac{ak}{N}\right](a + ib) - \left[\frac{bk}{N}\right](b - ia) \pmod{\rho}.$$

Soit \mathcal{R} l'ensemble des entiers de Gauss qui vérifient les deux conditions :

$$(3) \quad \left[\frac{ax + by}{N}\right] = 0, \quad \left[\frac{-bx + ay}{N}\right] = 0.$$

Cet ensemble est formé des points à coordonnées entières appartenant au carré de sommets $0, \rho, \rho + i\rho$ et $i\rho$.

On vérifie sans difficulté que les éléments de \mathcal{R} forment un *système complet* de résidus de l'anneau quotient $\mathbb{Z}[i]/\rho\mathbb{Z}[i]$.

En utilisant les formules (1) et (2), il est possible de montrer que l'unique élément de \mathcal{R} qui représente la classe résiduelle de $\xi \pmod{\rho}$ est :

$$\sigma = x + iy - \left[\frac{ax + by}{N} \right] (a + ib) - \left[\frac{-bx + ay}{N} \right] (-b + ia).$$

En d'autres termes, l'entier de Gauss $(\xi - \sigma)$ est nul modulo ρ , ce qui veut dire que c'est un multiple de ρ . Nous avons donc muni $\mathbb{Z}[i]$ d'une division euclidienne en le sens suivant :

PROPOSITION.— *Soit $\rho \neq 0$ un entier de Gauss donné tel que $(a, b) = 1$. Pour tout entier de Gauss ξ , il existe un couple (χ, σ) et un seul tel que l'on ait :*

$$\xi = \chi\rho + \sigma, \quad \sigma \in \mathcal{R}.$$

Cette division présente encore un défaut : *elle n'est pas canonique* car elle dépend du choix du système complet de restes \mathcal{R} . Or il existe beaucoup d'autres systèmes complets de restes ! En effet, on peut obtenir un nouveau système de restes en translatant par exemple l'ensemble \mathcal{R} . Plus généralement, si $\varphi : \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{Z}[i]$ est une bijection telle que $\xi \not\equiv \xi' \pmod{\rho}$ implique $\varphi(\xi) \not\equiv \varphi(\xi') \pmod{\rho}$, l'ensemble $\varphi(\mathcal{R})$ fait encore l'affaire.

Ceci précisé, le phénomène n'est pas nouveau. Nous utilisons couramment dans \mathbb{Z} deux divisions euclidiennes : la division *canonique* et la division au *plus petit reste*, qui consiste à translater l'intervalle $[0, n - 1]$.

Examinons maintenant d'un peu plus près ce qui se passe quand on translate \mathcal{R} par l'un de ses éléments $\varepsilon = u + iv$. Posons :

$$\mathcal{R}_\varepsilon = \mathcal{R} - \varepsilon, \quad e = -(au + bv), \quad f = bu - av.$$

Comme \mathcal{R} est contenu dans le disque $|z| < N$, nous avons $|\varepsilon| < N$, ce qui implique $-N \leq e < N$ et $-N \leq f < N$.

Un calcul simple montre alors que l'unique élément $\sigma_\varepsilon \in \mathcal{R}_\varepsilon$ qui est équivalent modulo ρ à l'entier ξ est

$$\sigma_\varepsilon = x + iy - \left[\frac{ax + by + e}{N} \right] (a + ib) - \left[\frac{-bx + ay + f}{N} \right] (-b + ia),$$

le quotient correspondant étant

$$\chi_\varepsilon = \left[\frac{ax + by + e}{N} \right] + i \left[\frac{-bx + ay + f}{N} \right].$$

Pour chaque $\epsilon \in \mathcal{R}_\epsilon$, nous obtenons ainsi une division euclidienne qui s'exprime de manière remarquablement simple.

3.2 Bases de numération

Un sous-produit de l'unicité du quotient et du reste de la division euclidienne de \mathbb{Z} est l'existence de bases de numération.

Soit \mathcal{R} un système complet quelconque de restes modulo ρ . Est-il possible d'écrire tout entier de Gauss ξ de façon unique sous la forme

$$(4) \quad \xi = c_k \rho^k + c_{k-1} \rho^{k-1} + \cdots + c_1 \rho + c_0, \quad c_i \in \mathcal{R}_\epsilon ?$$

DÉFINITION.— Nous dirons que ρ est une *base de numération* et que les éléments de \mathcal{R} sont les *chiffres* de cette base si tout entier de Gauss s'écrit de manière unique sous la forme (4).

Remarque.— Dans les systèmes de numération usuels que nous pratiquons, nous pouvons considérer qu'un «nombre à deux chiffres» est aussi un «nombre à trois chiffres», etc. Cette propriété n'est plus vraie si 0 n'appartient pas à \mathcal{R} .

Lorsque a et b sont premiers entre eux, Gauss a démontré que l'intervalle $[0, N[$ est un système complet de restes de l'anneau $\mathbb{Z}[i]/\rho\mathbb{Z}[i]$. Mais ceci ne suffit pas encore à assurer que le couple $(\rho, [0, N[)$ est un système de numération comme le prouve le résultat suivant.

THÉORÈME (Kataï et Szabo, 1975).— Soit $\rho = a + ib \neq 0$ un entier de Gauss donné où $(a, b) = 1$ et posons $N = a^2 + b^2$. Le couple $(\rho, [0, N])$ est un système de numération de $\mathbb{Z}[i]$ si et seulement si on a :

$$a < 0 \quad \text{et} \quad b = \pm 1.$$

Plus généralement, demandons-nous quels sont les couples $(\rho, \mathcal{R}_\epsilon)$ qui forment un système de numération. A l'heure actuelle, on ne dispose pas de condition nécessaire et suffisante. Nous pouvons cependant dégrossir le problème en introduisant la transformation $\Phi : (x, y) \mapsto (x', y')$ de \mathbb{Z}^2 dans lui-même définie par :

$$(5) \quad x' = \left[\frac{ax + by + e}{N} \right], \quad y' = \left[\frac{-bx + ay + f}{N} \right].$$

D'après la définition du quotient de la division euclidienne, il est clair que l'on a $\mathcal{R}_\epsilon = \Phi^{-1}(0)$ et que l'ensemble des nombres de la forme $c_1 \rho + c_0$ avec c_1 et c_0 dans \mathcal{R}_ϵ sont exactement les éléments de l'ensemble $\Phi^{-1}(\mathcal{R}_\epsilon)$. Plus généralement, il est facile de montrer par récurrence que l'ensemble des entiers qui ont au plus k chiffres coïncide avec l'ensemble $\Phi^{-k}(0)$ (Fig. 1).

FRACTALS ARITHMÉTIQUES

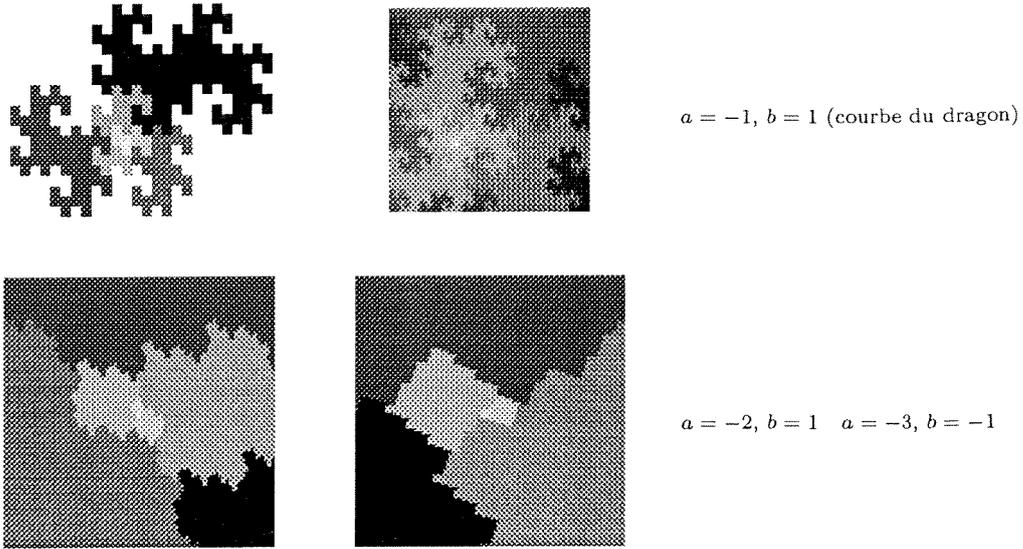


Figure 1. Bases complexes de Kataï et Szabo. Les régions $\Phi^{-k}(0)$ sont représentées par des gris de plus en plus foncés lorsque k augmente.

Il résulte de ces considérations que si $(\rho, \mathcal{R}_\varepsilon)$ est un système de numération de $\mathbb{Z}[i]$ alors les images réciproques $\Phi^{-k}(0)$ doivent recouvrir $\mathbb{Z}[i]$ tout entier, autrement dit, on doit avoir :

$$(6) \quad \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Phi^{-k}(0) = \mathbb{Z}[i].$$

Cette condition nécessaire se prête assez bien à une vérification sur ordinateur. Nous verrons un peu plus loin un énoncé plus précis donnant une condition suffisante (cf. M.-A. Jacob. [6]).

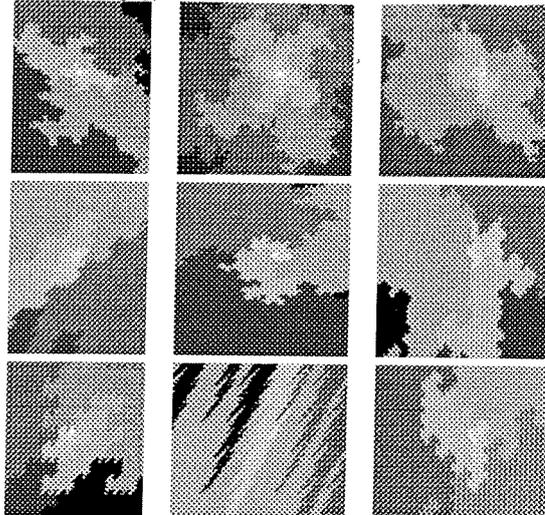


Figure 2. Neufs bases complexes de M.-A. Jacob. Les régions $\Phi^{-k}(0)$ sont représentées par des gris de plus en plus foncés lorsque k augmente.

3.3. Les propriétés élémentaires des aqas

DÉFINITION.— Nous appellerons *aq*a (application quasi-affine) une application de \mathbb{Z}^2 dans lui-même définie par la formule (5).

Posons

$$(7) \quad A = \begin{pmatrix} a/\omega & b/\omega \\ c/\omega & d/\omega \end{pmatrix}.$$

Si X est un vecteur quelconque, nous désignerons par $[AX]$ l'image de ce vecteur par la transformation (5) (avec $e = f = 0$). Nous dirons que les transformations $X \mapsto AX$ et $X \mapsto [AX]$ sont *associées*.

Il est intéressant de mettre en parallèle les propriétés des aqas et celles des transformations affines associées. Pour cela, posons

$$\|A\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|},$$

où $\|AX\|$ et $\|X\|$ sont les normes euclidiennes usuelles.

Considérons l'itération d'une aqa en nous restreignant au cas où la matrice A est *contractante*, ce qui veut dire $\|A\| < 1$.

- Si nous considérons A comme une transformation de \mathbb{R}^2 dans lui-même, tout point est attiré par l'origine : la dynamique *réelle* est triviale.
- Pour l'aqa associée $[A]$, la dynamique est extrêmement compliquée. Des cycles apparaissent en général. En outre, on constate que chaque cycle \mathcal{C} possède un *bassin d'attraction* $\mathcal{B}(\mathcal{C})$, c'est-à-dire le sous-ensemble des points de \mathbb{Z}^2 qui sont attirés par \mathcal{C} (i.e. qui finissent par aboutir dans \mathcal{C}).

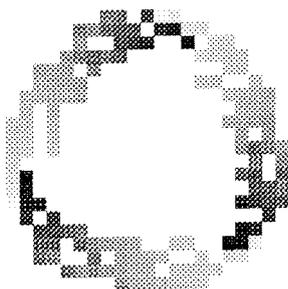


Figure 3. Exemple de bassin d'un 3-cycle ($a = -8$, $b = -15$, $c = 15$, $d = -8$, $e = f = 0$ et $\omega = 17$). Le 3-cycle est formé des points noirs de coordonnées $(3, 8)$, $(-9, -2)$ et $(6, -7)$. Les autres points sont les points du bassin associé; leur couleur décroît avec leur «éloignement» itératif.

Néanmoins, nous pouvons énoncer quelques résultats. Montrons par exemple qu'une aqa associée à une matrice contractante est effectivement contractante au

voisinage de l'infini. La norme euclidienne du vecteur $R = AX - [AX]$ vérifie $\|R\| < \sqrt{2}$, d'où l'inégalité :

$$\frac{\|[AX]\|}{\|X\|} < \|A\| + \frac{\sqrt{2}}{\|X\|}.$$

Ceci montre que si X_0 est de module assez grand, la suite des normes des vecteurs $X_{i+1} = [AX_i]$ commence par être strictement décroissante.

Ensuite, la situation se dégrade. Lorsque X_n ne vérifie plus la condition $\|[AX_n]\| < \|X_n\|$, l'itéré X_n s'éloigne de l'origine. Si les itérés suivants s'éloignent trop, ils sont de nouveau attirés par l'origine, d'où un jeu de va-et-vient.

L'aqa $[A]$ n'est pas contractante dans un voisinage compact de l'origine. Comme ce voisinage ne contient qu'un nombre fini de points à coordonnées entières, des cycles apparaissent.

Lorsque l'aqa $[A]$ possède au moins deux cycles, il est très difficile de prévoir si un point éloigné est attiré par l'un ou l'autre de ces cycles. Ceci explique la structure compliquée des frontières des bassins.

3.4 Majoration de la taille des cycles d'une aqa

Les considérations précédentes montrent qu'une aqa associée à un opérateur contractant ne possède qu'un nombre fini de cycles et donc un nombre fini de bassins, chacun étant constitué d'arbres attachés à son cycle limite. Nous allons préciser cela en majorant la taille des cycles d'une aqa associée à un opérateur A de norme euclidienne inférieure à 1.

Posons $R_0 = AX - [AX]$. Comme AX et $[AX]$ appartiennent à un même carré, nous avons l'inégalité $\|R_0\| < \sqrt{2}$. En prenant l'image de R_0 par A , nous obtenons $AR_0 = A^2X - A[AX]$, soit encore

$$A[AX] = A^2X - AR_0.$$

Posons ensuite $R_1 = A[AX] - [A[AX]]$. Nous avons encore $\|R_1\| < \sqrt{2}$. En procédant comme ci-dessus, nous obtenons :

$$[A[AX]] = A^2X - AR_0 - R_1.$$

Plus généralement, en convenant de désigner par $[AX]^k$ le k -ième itéré de X par l'aqa $[A]$, nous voyons qu'il existe k vecteurs R_0, \dots, R_{k-1} de norme $\|R_i\| < \sqrt{2}$ pour lesquels nous avons la relation

$$[AX]^k = A^kX - (A^{k-1}R_0 + A^{k-2}R_1 + \dots + R_{k-1}).$$

L'inégalité triangulaire montre alors que l'on a :

$$\|[AX]^k\| \leq \|A\|^k \|X\| + \sqrt{2} (\|A\|^{k-1} + \|A\|^{k-2} + \dots + 1).$$

Si X appartient à un k -cycle, nous avons $[AX]^k = X$, d'où la majoration :

$$(1 - \|A\|^k)\|X\| \leq \sqrt{2} (\|A\|^{k-1} + \|A\|^{k-2} + \dots + 1).$$

En résumé, si X appartient à un cycle, nous avons :

$$\|X\| \leq \frac{\sqrt{2}}{1 - \|A\|}.$$

Cette majoration montre qu'une aqa contractante (i.e. $\|A\| < 1$) ne peut avoir qu'un nombre fini de cycles.

Remarque. — Si nous remplaçons la norme euclidienne par la norme du sup, nous obtenons la majoration analogue :

$$\|X\|_\infty \leq \frac{1}{1 - \|A\|_\infty}.$$

3.5 Aqas connexes

Revenons aux bases de numération de $\mathbb{Z}[i]$. La formule (6) montre que l'origine est un point fixe de l'aqa associée, point fixe qui attire tous les points (l'origine est donc un «trou noir»).

Plus généralement, si $e = f = 0$, l'origine est un point fixe. Si l'aqa ne possède qu'un seul bassin, le cycle associé à ce bassin est réduit à l'origine.

DÉFINITION.— Une aqa qui ne possède qu'un seul bassin est appelée une *aqa connexe*.

Exemples.— Les aqas associées aux systèmes de numération de $\mathbb{Z}[i]$ sont connexes. Le théorème de Kataï-Szabo nous fournit d'autres exemples d'aqas connexes, de matrices

$$A = \frac{1}{n^2 + 1} \begin{pmatrix} -n & \pm 1 \\ \mp 1 & -n \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, si l'aqa associée à une matrice de la forme

$$A = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

est connexe, celle-ci fournit un système de numération des entiers de Gauss.

Il est donc très intéressant de savoir s'il existe d'autres aqas connexes que celles qui sont associées aux matrices de Kataï-Szabo. M.-A. Jacob [6] a réussi à caractériser ces aqas.

THÉORÈME (M.-A. Jacob, 1993).— Une aqa de matrice A qui vérifie $\|A\|_\infty < 1$ est connexe si et seulement l'une des quatre conditions suivantes est vérifiée :

$$\begin{aligned} a > 0, c > 0, a + b \leq 0, d < 0; & \quad a \leq 0, c \leq 0, d \leq 0; \\ a \leq 0, b > 0, c + d \leq 0, d > 0; & \quad a \leq 0, b \leq 0, d \leq 0. \end{aligned}$$

Ce théorème fournit — au passage — un très grand nombre de nouvelles bases complexes de l’anneau des entiers de Gauss.

3.6 Aqas et rotations

En traitement d’image, on est confronté au problème suivant : comment faire tourner une image composée de pixels ? Mathématiquement parlant, existe-t-il des bijections de \mathbb{Z}^2 qui sont des rotations «au pixel près»? La solution naïve

$$x' = [x \cos \theta - y \sin \theta], \quad y' = [x \sin \theta + y \cos \theta],$$

qui consiste à «tronquer» une rotation réelle n’est pas satisfaisante car elle s’accompagne de pertes d’informations gênantes. En effet, cette application n’est pas injective (certains pixels se confondent) et elle n’est pas surjective (présence de «dislocations» visibles à l’œil nu).

Plusieurs solutions purement discrètes existent (cf. [10]). Examinons une solution fournie par les aqas. Il paraît naturel d’imposer les conditions suivantes :

- Une solution parfaite est bijective. Comme cette condition est très exigeante et comme une image est nécessairement bornée — pour ne pas faire le «héron» — nous nous contenterons d’aqas bijectives dans un voisinage (le plus grand possible) de l’origine.
- L’aqas idéale doit posséder un nombre infini de cycles et les bassins associés sont réduits à leurs cycles. Mais cette condition est elle aussi trop exigeante. En effet, une application qui ne possède que des cycles est manifestement bijective. Nous nous contenterons donc d’approximations : aqas dont les bassins sont aussi proches que possibles de leur cycle au voisinage de l’origine.

Essayons de réaliser ce programme en considérant la matrice (7) avec $c = -b$ et $d = a$. Cette matrice représente une similitude d’angle $\arctan b/a$ et de norme euclidienne

$$\|A\| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\omega}.$$

Nous en déduisons que les cycles de l’aqas $[A]$ sont contenus dans le disque de rayon

$$(8) \quad R = \frac{2\sqrt{2}\omega}{\omega^2 - a^2 - b^2}.$$

Appelons *triplet pythagoricien* un triplet (a, b, ω) qui vérifie la condition

$$a^2 + b^2 = \omega^2.$$

- Si le triplet (a, b, ω) n’est pas pythagoricien, l’égalité (8) n’autorise pas l’aqas $[A]$ à posséder un nombre infini de cycles. Nous sommes donc loin d’une rotation.
- Si le triplet (a, b, ω) est pythagoricien, on peut vérifier que l’aqas $[A]$ possède une infinité de cycles dont les bassins associés sont petits tant que l’on ne s’éloigne pas trop de l’origine. Nous dirons que cette aqas est *pythagoricienne*.

Soit α un angle donné. Est-il possible de trouver une aqa pythagoricienne qui «approche» arbitrairement la rotation d'angle α ? Autrement dit, nous nous intéressons aux solutions $a, b \in \mathbb{Z}$ approchées de l'équation

$$\frac{b}{a} = \tan \alpha.$$

Ces solutions ne fournissent pas — en général — une aqa pythagoricienne car la somme $a^2 + b^2$ n'est que très rarement un carré. Pour obtenir de bonnes aqas, souvenons-nous du paramétrage classique des triplets pythagoriciens, ce qui nous conduit à calculer la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}$$

ce qui fournit l'aqa pythagoricienne associée à la matrice

$$A = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons une réponse en associant l'aqa précédente à des solutions approchées de l'équation

$$\frac{b}{a} = \tan \frac{1}{2}\alpha.$$

Les réduites du développement en fraction continue de $\tan \frac{1}{2}\alpha$ fournissent naturellement de telles solutions. Pour un α fixé, on constate expérimentalement que les aqas obtenues en prenant des réduites d'ordre croissant sont des permutations locales de \mathbb{Z}^2 dans des disques dont les rayons tendent vers l'infini. Bien que l'étude détaillée de cette convergence reste à faire, la considération des dynamiques induites sur \mathbb{Z}^2 est fascinante. Nous ne pouvons qu'encourager les lecteurs à découvrir ces phénomènes au travers des petits programmes qu'ils écriront facilement.

4. La dimension des fractals

La dimension topologique — qui vaut 1 pour les courbes régulières — ne paraît pas bien adaptée dès que celles-ci deviennent chaotiques, lorsqu'elles remplissent l'espace et semblent donner l'impression d'avoir un «volume». Pour remédier à cette carence, d'autres dimensions à *valeurs non-entières* ont été introduites et étudiées depuis fort longtemps. L'une des plus efficaces est la dimension de Hausdorff; mais sa technicité rend souvent impossible son évaluation et a conduit progressivement à son remplacement par d'autres dimensions plus faciles à calculer.

La littérature abonde en excellentes présentations (cf. [1], [2], [5]). Rappelons brièvement la *dimension de similitude* qui est très bien adaptée aux ensembles fractals de la classe I.F.S.

FRACTALS ARITHMÉTIQUES

Considérons l'ensemble \mathcal{X} des compacts du plan (traduction : l'ensemble des images noires et blanches). Donnons-nous n applications continues u_1, \dots, u_n du plan dans lui-même et associons-leur la fonction $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ définie par

$$\Phi(K) = u_1(K) \cup u_2(K) \cup \dots \cup u_n(K).$$

Un exercice classique — qu'on infligeait autrefois aux étudiants de topologie — consiste à montrer que l'on peut munir l'ensemble \mathcal{X} d'une métrique (la *métrique de Hausdorff*) qui en fait un espace complet.

Si les applications u_1, \dots, u_n sont contractantes, on sait montrer que l'application Φ est elle-même contractante pour la métrique de Hausdorff. Cette remarque anodine prend tout son sens si l'on se rappelle qu'une application contractante possède un point fixe et un seul (que l'on obtient d'ailleurs par itération).

Traduisons : si K est l'unique compact du plan qui est le point fixe de Φ , nous pouvons *coder* ce compact à l'aide des applications u_1, \dots, u_n . Un magnifique exemple a été popularisé par Barnsley avec sa célèbre fougère (codée à l'aide de quatre applications affines, soit 24 nombres réels!).

Cette théorie porte le nom de *iterated functions system*, d'où l'appellation I.F.S.

Supposons maintenant que les applications u_1, \dots, u_n sont des similitudes contractantes de rapports (r_1, r_2, \dots, r_n) . On attribue au compact codé par ces similitudes la *dimension de similitude* s qui est l'unique solution de l'équation

$$r_1^s + r_2^s + \dots + r_n^s = 1.$$

Voici quelques exemples de dimension de similitude :

- Triangle de Sierpinski: $\frac{\ln 3}{\ln 2} \sim 1,585$.
- Courbe de von Koch: $\frac{\ln 4}{\ln 3} \sim 1,2618$.
- Courbe du dragon $\frac{2 \ln \lambda}{\ln 2} \sim 1,5235$ où λ est l'unique zéro réel du polynôme $\lambda^3 - \lambda^2 - 2 = 0$.

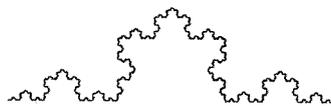


Figure 4. Les premières étapes de la construction de la courbe de von Koch.1

Soit φ une aqa connexe. On constate que les frontières des ensembles $\varphi^{-k}(0)$ «tendent» vers un fractal du plan. La courbe du dragon s'obtient par exemple à partir de l'aqa de matrice

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'étude des frontières des ensembles $\varphi^{-k}(0)$ et un théorème de passage à la limite permettent un calcul efficace de la dimension de similitude de l'ensemble limite.

5. Bibliographie

- [1] EDGAR (G.A.).- *Measure, topology, and fractal geometry*. Undergraduate texts in mathematics, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [2] FALCONER (K.J.).- *The geometry of fractal sets*, Cambridge tracts in mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [3] GILBERT (W.J.).- Geometry of radix representation, *The Geometric Vein : Essays presented to H.S.M. Coxeter*, Springer, New York.
- [4] GILBERT (W.J.).- *Fractal geometry derived from complex bases*, Math. Intell. tome 4, p. 78-86, 1982.
- [5] HUTCHINSON (J.).- *Fractals and self-similarity*, Indiana Univ. Journ. of Math. tome 30, p. 713-747, 1981.
- [6] JACOB (M.-A.).- *Applications quasi-affines*, Thèse U.L.P. (Strasbourg), 1993.
- [7] KATAI (I.) and ZSABO (J.).- *Canonical number systems for complex integers*, Acta Sci. Math. (Szeged), 37, p. 255-260, 1975.
- [8] KNUTH (D.E.).- *The art of computer programming, vol. 2 : Seminumerical Algorithms*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.
- [9] MULLER (J.M.).- On-line computing: A survey and some new results. in *Algorithms and Parallel VLSI Architectures II*, P. Quinton and Y. Robert éd., Elsevier Science Publishers, 1992.
- [10] REVEILLÈS (J.P.).- *Géométrie discrète, algorithmique et calcul en nombres entiers*, Thèse U.L.P. Strasbourg, 1991.