A VOS STYLOS

PROBLÈME 23

Énoncé (proposé par J.-M. Nagel)

Dans un jeu de 52 cartes battu, quelle est la probabilité pour qu'une dame et un roi soient voisins immédiats?

Solution

On peut parvenir à des algorithmes qui permettent le calcul de cette probabilité avec plus ou moins de difficulté. La méthode qui suit, proposée indépendamment par O. Adelman et M. Krier, donne facilement le résultat avec l'aide d'une calculatrice non programmable effectuant seulement les quatre opérations.

Le jeu comporte d dames, r rois et a autres cartes, en tout $n = d + r + a$ cartes (ici $n = 52$, $d = r = 4$, $a = 44$). Toutes les cartes sont deux-à-deux distinctes.

Appelons **couple** une paire consécutive dame-roi ou roi-dame; chaque dame ou roi contribue à au plus deux couples. Notons X le nombre de couples du paquet et Y le nombre de couples que l'on observe après avoir retiré du paquet les a autres cartes; il est clair que $Y \geq X$. Nous allons calculer pour tout i la probabilité $P[X = i]$ (l'énoncé demande de calculer $1 - P[X = 0]$ ou $P[X = 1]$ selon la manière dont on l'interprète). On écrit

$$P[X = i] = \sum_{k \geq i} P[X = i | Y = k] P[Y = k];$$

nous allons calculer séparément $P[Y = k]$ et $P[X = i | Y = k]$.

Pour le calcul de $P[Y = k]$ (qui revient à résoudre le problème avec $a = 0$), remarquons que le nombre de manières de ranger p cartes en q paquets ordonnés et non vides est $p!\binom{p-1}{q-1}$; il y a en effet $p!$ manières de les aligner sur la table, puis, parmi les $p - 1$ intervalles ainsi formés, $\binom{p-1}{q-1}$ manières de placer les $q - 1$ séparations entre paquets.

Pour k impair, le nombre de manières de placer nos $d + r$ cartes de façon à former exactement k couples en commençant à gauche par une dame est

$$d!\binom{d-1}{\frac{k-1}{2}} r!\binom{r-1}{\frac{k-1}{2}}$$

car il faut partager les dames en $\frac{k+1}{2}$ paquets, ainsi que les rois, et alterner les paquets de dames et de rois. On en déduit, toujours pour k impair,

$$P[Y = k] = 2\frac{\binom{d-1}{\frac{k-1}{2}}\binom{r-1}{\frac{k-1}{2}}}{\binom{d+r}{d}}$$

(le 2 vient de ce qu'on peut aussi commencer à gauche par un roi et $(d+r)!$ au dénominateur est le nombre total de placements des $d+r$ cartes).

De façon analogue, pour k pair

$$P[Y=k]=\frac{\binom{d-1}{\frac{k}{2}}\binom{r-1}{\frac{k}{2}-1}+\binom{r-1}{\frac{k}{2}}\binom{d-1}{\frac{k}{2}-1}}{\binom{d+r}{d}}.$$

Avec les valeurs $d=r=4$, le calcul se fait à la main et donne

k	1	2	3	4	5	6	7
$P[Y=k]$	$\frac{2}{70}$	$\frac{6}{70}$	$\frac{18}{70}$	$\frac{18}{70}$	$\frac{18}{70}$	$\frac{6}{70}$	$\frac{2}{70}$

Pour calculer $P[X=i|Y=k]$, nous partons d'une configuration des $d+r$ dames et rois présentant k couples et, en intercalant les a autres cartes de toutes les façons possibles, nous allons calculer la probabilité de réduire à i le nombre de couples; ceci ne dépendra que de k et non de la configuration choisie, fournissant ainsi $P[X=i|Y=k]$.

Le nombre total de manières de placer les a autres cartes est

$$(d+r+1)(d+r+2)\dots(d+r+a)=\frac{(d+r+a)!}{(d+r)!}.$$

Le nombre de manières de les placer de façon à séparer $k-i$ couples et à en conserver i est

$$\binom{k}{i}\frac{a!}{(a-k+i)!}(d+r-i+1)\dots(d+r-i+a-k+i);$$

$\binom{k}{i}$ vient du choix des couples qui seront séparés, $\frac{a!}{(a-k+i)!}$ est le nombre de choix possibles pour les $k-i$ cartes commençant (à gauche) les $k-i$ blocs séparant les couples existant, et $(d+r-i+1)\dots(d+r-i+a-k+i)$ le nombre de manières de placer les $a-k+i$ autres cartes restantes. Il ne reste qu'à diviser le nombre de cas favorables par le nombre total pour obtenir, après regroupement,

$$P[X=i|Y=k]=\frac{\binom{k}{i}\binom{n-k}{d+r-i}}{\binom{n}{d+r}}.$$

Avec une calculatrice et un peu de patience on obtient, au millième près,

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$P[X=i]$	0,514	0,372	0,100	0,013	0,001	0,000	0,000	0,000

Remarques : Lorsque $d=r$, la loi de Y présente une symétrie : $P[Y=k]=P[Y=d+r-k]$. Ceci peut-il se voir sans calcul grâce à des bijections bien choisies?

La formule obtenue pour $P[X = i|Y = k]$ n'est autre que la probabilité d'obtenir i dames ou rois en tirant au hasard k cartes du paquet (loi hypergéométrique). Est-ce une coïncidence ?

PROBLÈME 24

Énoncé

Un faisceau de droites parallèles fournit un exemple de partition du plan en droites.

a) Existe-t-il une partition du plan en cercles (non dégénérés, c'est-à-dire de rayon ni nul ni infini) ?

b) Existe-t-il une partition du plan en figures formées chacune de deux cercles (distincts et non dégénérés) tangents intérieurement ou extérieurement ?

Indication

a) Non. b) Non.

PROBLÈME 25

Énoncé

Etant donné un triangle, trouver tous les centres
a) des ellipses inscrites dans le triangle,
b) des ellipses ex-inscrites dans le triangle,
c) des hyperboles dont une branche est tangente aux trois côtés du triangle,
d) des hyperboles dont une branche est tangente à deux côtés du triangle et l'autre branche au troisième.

PROBLÈME 26

Enoncé (proposé par R. Iss)

Etant donnés n points distincts sur un cercle, on trace un polygone ayant ces points pour sommets. On suppose que p couples de côtés, et p seulement, ont un point commun autre qu'un sommet, et qu'aucun triplet de côtés n'a de point commun.

1) Ce polygone partage l'intérieur du cercle en r régions. Calculer r en fonction de n et de p.

2) Pour un nombre n donné de côtés, déterminer la valeur maximum du nombre p des points d'intersection des côtés.