Annales de Didactique et de Sciences Cognitives

Publication des travaux du séminaire de Didactique des Mathématiques de Strasbourg

Responsable de la publication : **R. DUVAL**

I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
F. 67084 STRASBOURG Cedex

Volume 5 1993

TABLE DES MATIÈRES

1. F. PLUVINAGE
Grilles et taxinomies. p. 5-17

2. G. WALDEGG
La comparaison des ensembles infinis : un cas de résistance à l'instruction. p. 19-36

3. R. DUVAL
Registres de Représentation sémiotique et Fonctionnement cognitif de la Pensée. p. 37-65

4. K. PAVLOPOULOU
Un problème décisif pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire : la coordination des registres de représentation. p. 67-93

5. J. L. DORIER
Premières approches pour l'étude de l'enseignement de l'algèbre linéaire à l'université. p. 95-123

6. E. ADAM-KOLEZA
Aspects sémantiques des traitements linéaires. p. 125-148

7. N. CORDIER
Annales de didactique : les problèmes de mise en équation, au niveau 3ème et 2nde. p. 149-176

8. J. P. FISCHER
La résolution des problèmes arithmétiques verbaux : propositions pour un enseignement pro-actif. p. 177-210

Grilles et Taxinomies

François Pluvinage

For the last thirty years the scientific approach to the phenomena of teaching has led to use a range of techniques of data analysis. But all the techniques don't take place in the same "world" and they haven't be mixed up or confused, as it happens sometimes in the didactic researches. This paper proposes to distinguish two large types of analysis, whose differences are irreducible. On the one hand, the analysis starts from the individual productions, the results of populations : their reference world is this one of grids and multidimensional coordinates. On the other hand, the analysis starts from tasks, meanings, aims of teaching : their reference world is this one of the classifications of hierarchical type.

Depuis qu'il est institutionnalisé, le système éducatif a besoin de disposer de données quantitatives. Ce qui est plus récent, mais date tout de même de plus d'une trentaine d'années, c'est que l'approche scientifique des phénomènes d'enseignement conduit à recourir à l'éventail des techniques d'analyse des données. Or il apparaît que l'utilisation de ces techniques en didactique se situe dans l'un ou l'autre de deux "mondes", qui coexistent en dépit ou peut-être à cause de leurs différences. De plus, la position que nous soutiendrons ici est celle d'une certaine irréductibilité de ces différences.

Pour les analyses qui ont pour point de départ des productions individuelles, des résultats de populations, le monde de prédilection est celui des grilles et des repérages à plusieurs dimensions. Un classique du genre est l'ouvrage de Guilford intitulé *The nature of human intelligence* (1967). Les analyses de tâches, de contenus, d'objectifs d'enseignement ont pour référence privilégiée les classifications de type hiérarchique. Citons, parmi les travaux de ce type largement connus, l'ouvrage édité par Bloom, Hastings et Madaus intitulé *Handbook on formative and summative evaluation* (1971), dans lequel un chapitre de Wilson présente la

© Annales de Didactique et de Sciences Cognitives
5 (1993) (p. 5-17) - IREM de Strasbourg

classification N.L.S.M.A. (sigle d'un organisme d'études aux Etats-Unis : National Longitudinal Studies of Mathematical Abilities).

La distinction mérite d'être bien posée d'emblée, car il n'est pas exceptionnel de rencontrer, même chez des auteurs réputés, des confusions entre ces types d'analyse nettement différents. C'est ainsi que le *Précis de Docimologie* de G. de Landsheere (1976) présente comme s'il s'agissait d'une hiérarchie le cube de Guilford, qui est pourtant un objet-type du monde multidimensionnel (ou : multivarié). Commençons donc par présenter brièvement les deux sortes d'objets mathématiques auxquels les analyses de données peuvent nous renvoyer.

1. Points d'appui mathématiques

a. Taxinomies

Le terme "taxinomie" désigne à la fois les classifications hiérarchiques et les études menées pour obtenir de telles classifications. Souvent, on entend dire que les taxinomies relèvent en mathématiques de la théorie des graphes : une classification hiérarchique correspond à des points, ou sommets, reliés par des segments orientés, organisés en une structure arborescente. Une arborescence comporte en général des ramifications, et la présence de ramifications conduit l'ordre entre les sommets à ne pas être total.

Il nous semble que le fait de présenter par exemple des contenus d'enseignement de cette façon ne s'impose pas d'emblée comme une évidence, mais mérite de donner lieu à une discussion attentive. Et en point d'appui d'une telle discussion, il convient de tenir compte des caractéristiques proprement mathématiques des descriptions proposées. Les points de vue topologique et métrique contribuent tous deux à un tel examen. Nous allons les envisager l'un après l'autre.

Pour représenter une ramification, le recours à une figure ayant la forme de la lettre Y est fréquemment employé. Mais, pour un certain nombre d'applications, cette représentation ne s'avère pas vraiment satisfaisante. C'est par exemple le cas si l'on veut, sans introduire un paramètre temps, représenter un test, du type

"si [condition], alors [traitement 1], sinon [traitement 2]".

La raison en est que la condition est destinée à conduire à deux états différents, selon qu'elle se trouvera ou non vérifiée. Or les deux branches d'un Y se rattachent au même point, et non à des points distincts. De la même manière, un aiguillage, ou un interrupteur, ou tout dispositif naturel ou artificiel susceptible de se trouver dans l'un ou l'autre de deux états, n'est qu'imparfaitement schématisé une représentation en Y. Pour se convaincre de l'inadéquation d'une telle représentation, il suffit par exemple de se référer à la représentation usuelle d'un interrupteur ou d'un inverseur dans un schéma électrique : on y figure l'élément mobile susceptible de se placer dans l'une ou l'autre de deux positions.

Au contraire, une représentation qui convient tout à fait aux situations de ramifications s'obtient par une variété de dimension 1, orientée mais en général non séparée. Rappelons ce que signifient ces termes en nous appuyant sur la situation de base, celle du branchement simple, qui se substituera à la représentation en forme de Y. Mathématiquement, il s'agit d'une structure obtenue à partir de deux droites graduées en identifiant chaque point d'abscisse négative de l'une avec le point de l'autre qui a l'abscisse de même valeur. La figure ci-dessous présente les deux droites, et il s'agit pour obtenir la structure d'identifier deux points d'abscisse x_1 et x_2 chaque fois que $x_1 = x_2 < 0$.

$x_1 < 0$ ____________|____________ $x_1 > 0$

$x_1 = 0$

$x_2 < 0$ ____________|____________ $x_2 > 0$

$x_2 = 0$

Ainsi les deux demi-droites qui correspondent à $x_1 < 0$ et à $x_2 < 0$ sont identifiées, alors que les deux points $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ ne sont pas, eux, identifiés. Dans la structure quotient, c'est à dire celle qui résulte de l'identification, ces deux points sont donc distincts. Mais on dira à leur propos qu'ils sont *non séparés*, à cause des considérations qui suivent, et par extension on dira aussi que la structure est celle d'une variété non séparée. Sur les deux droites, si deux segments contiennent chacun dans son intérieur un des deux points $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ considérés, ils contiennent forcéments des points d'abscisse négative, qui se trouveront identifiés. Par conséquent, ils donnent lieu dans la structure à deux parties d'intersection non vide. En quelque sorte, on peut dire que les deux points considérés sont arbitrairement voisins, puisque des voisinages quelconques de l'un et de l'autre respectivement sont obligés de se rencontrer.

Après cette étude d'aspects topologiques, envisageons le point de vue métrique. Après tout, aurait-on pu objecter, on n'est peut-être pas obligé de représenter une hiérarchie par un arbre ou, mieux comme nous l'avons vu, par une variété de dimension 1 orientée mais en général non séparée. En fait, le résultat suivant, que l'on peut trouver par exemple dans le tome 1, intitulé précisément *Taxinomie*, de l'ouvrage de référence de Benzécri et collaborateurs sur l'analyse des données (Dunod, 1976), conduit à attribuer un caractère somme toute canonique à un tel type de représentations. Le théorème s'énonce ainsi : *pour un ensemble E fini quelconque, toute hiérarchie indicée de parties de E est associée à une distance qui se trouve être ultramétrique* ; sans entrer dans les détails, il suffit pour le présent propos de préciser qu'une telle distance ne sera pas euclidienne sauf dans le cas où la hiérarchie établit un ordre total. C'est pourquoi il sera vain en général de chercher une représentation parfaitement satisfaisante de hiérarchies dans l'espace euclidien usuel.

De ces considérations sur la structure topologique ou métrique adaptée à la prise en charge des propriétés qui nous intéressent, il nous paraît important de retenir en définitive l'idée de complexité possible des structures de dimension 1, dites aussi unidimensionnelles. Ainsi, contrairement à ce que l'on imagine souvent, les structures unidimensionnelles auxquelles on se réfère sont loin de se réduire au seul cas linéaire. Considérées dans toute cette extension, elles n'apparaissent donc pas comme un cas particulier de structures euclidiennes de dimension supérieure, mais présentent véritablement une spécificité.

b. Analyses factorielles

Les analyses factorielles organisent un repérage dans des espaces à plusieurs dimensions, munis de distances euclidiennes. Au point de départ, on dispose de tableaux de données brutes. On peut, à titre d'exemple, penser au cas d'un tableau croisant des individus interrogés avec des questions de calcul mental, le temps de réponse t_{ij} mis par un individu a_i pour un calcul q_j figurant au croisement de la ligne de l'individu avec la colonne du calcul.

indiv.\quest.		q_j	
. :		. :	
a_i		t_{ij}	
. :		. :	

Entre deux individus d'un tel tableau, il peut certes arriver que l'un soit systématiquement plus lent que l'autre, mais le plus souvent, l'un sera plus lent que l'autre sur certaines questions et au contraire plus rapide sur d'autres. C'est pourquoi c'est non pas une hiérarchie mais une idée d'écart, ou distance, entre les individus, tenant à leurs différences de temps de réponse aux divers calculs, qui est le plus naturellement associée à un tableau de ce genre.

L'idée de base des analyses factorielles fonctionne en deux temps. Tout d'abord, on associe à un tableau de données un nuage de points pondérés dans un espace euclidien, dont la dimension correspond à la taille du tableau. Ensuite, on cherche à déterminer parmi les projections de dimension donnée, inférieure évidemment à la dimension de l'espace initial, lesquelles donnent de ces nuages une image aussi peu déformée que possible. D'un point de vue un peu différent, on peut parler de projections contenant la plus grande part possible de l'information présente dans les nuages initiaux.

2. Utilisations

a. Les analyses factorielles et les grilles comme modèles

C'est le fameux facteur *g* de Spearman, c'est à dire le fruit d'une réflexion en psychologie, qui peut être considéré comme constituant le point de départ de l'analyse factorielle. Plus tard, dans la décennie des années 50, Guilford, autre psychologue, a élaboré son modèle à partir des relevés de résultats aux tests des recrues de l'U.S. Army. Au vu de ce point de départ, on ne sera pas étonné que Guilford se soit rapporté à un modèle factoriel. Sa proposition est précisément celle d'un modèle à 120 facteurs, conduisant à exprimer le score normalisé d'un individu i à un test sous la forme :

$$n(i)=\sum_{i=1}^{120} a_{ij}x_j+\varepsilon_i,$$

où a_{ij} est l'aptitude de l'individu i en le facteur j, x_j est la coordonnée du test selon le facteur j et ε_i est un terme d'erreur ou reste (idéalement, il devrait être nul). Un test selon Guilford est ainsi un élément de l'espace $\mathbf{R}^{120}$, c'est-à-dire un vecteur à 120 composantes ; autrement dit, on peut se représenter un test comme un composé obtenu en prélevant des constituants élémentaires, en quantités relatives plus ou moins grandes, dans 120 récipients possibles. Par exemple, un test qui ne résulterait que d'un prélèvement dans un seul des récipients, c'est à dire tel que les x_j soient tous nuls sauf un seul qui vaudrait 1, serait qualifié de *pur* en l'un des facteurs. A lui seul, un tel test permettrait évidemment d'évaluer, parfaitement bien aux incertitudes de mesure près, l'aptitude d'un individu en le facteur concerné.

Même si les facteurs d'un modèle factoriel sont par principe indépendants (ou : non corrélés), Guilford présente ses 120 facteurs comme des petits cubes identiques, rangés dans un parallélépipède dont l'une des dimensions est 5 fois le côté d'un petit cube, la seconde 6 fois et la troisième 4 fois. C'est cet agencement qui est appelé le cube de Guilford, même s'il s'agit en fait d'un parallélépipède. La vérification rigoureuse complète de la théorie de Guilford exigerait une quantité de résultats si considérable qu'elle est hors de portée de l'expérimentation. Seules des essais de vérifications locales ont été entrepris, dont d'ailleurs les résultats auraient mérité d'être discutés. Cela n'empêche pas le modèle d'avoir une valeur heuristique, tant pour l'élaboration de tests que pour l'interprétation des réponses données par une population interrogée.

Toutefois, la fécondité d'un modèle factoriel pour représenter le fonctionnement humain lors de traitements mathématiques ou, plus généralement, un quelconque phénomène didactique reste problématique. L'entreprise d'élaboration de modèles généraux pour rendre compte de situations d'enseignement est d'ailleurs peut-être encore prématurée, à un moment où le caractère récent des études de didactique impose d'appuyer les quelques avancées théoriques sur des recherches à caractère essentiellement phénoménologique.

b. Le monde des classifications hiérarchiques

Dans l'enseignement des mathématiques, les idées qui viennent d'être présentées n'ont eu que des répercussions très réduites. Quels professeurs par exemple connaissent seulement le nom de Guilford ? Il n'en est pas de même pour Piaget. Son influence ne peut pas être niée, qu'on l'estime positive ou non. Compte tenu de la présentation que nous avons faite, il pourrait paraître discutable de commencer ce paragraphe en parlant de Piaget. Comment ? dira-t-on, vous citez quelqu'un dont presque toute l'œuvre réfère à des observations, pour introduire un paragraphe sur les réflexions de ceux qui envisagent des analyses de tâches, de contenus ou d'objectifs d'enseignement. Attention ! rétorquerai-je, il ne s'agit nullement ici d'opposer expérimentateurs et théoriciens. La question est celle des points d'appui que l'on choisit de privilégier. Or il est indéniable que la lecture que fait Piaget de toutes ses observations s'appuie sur une théorie, celle d'une évolution individuelle selon des stades qui correspondent d'une certaine façon au développement même des idées dans l'histoire de l'humanité. Il y a notamment un ordre bien déterminé entre les stades piagétiens.

Du point de vue taxinomique, la succession de stades piagétiens renvoie à la situation la plus élémentaire : une hiérarchie totale, sans ramifications, à part peut-être l'exception de quelques variantes de formes dans certains stades. Il en va à peu près de même dans le cas de Van Hiele. On peut trouver une présentation concise, mais néanmoins explicite, des idées de Van Hiele dans un article intitulé *la Pensée de l'Enfant et la Géométrie*, paru en mars 1959 dans le bulletin de l'APMEP. Au cours des dernières années, notamment dans le monde anglo-saxon, les idées de Van Hiele ont été très en vogue. D'une certaine façon, Van Hiele s'est opposé à Piaget, en mettant avant tout en avant le phénomène de la transmission, des échanges entre des individus, qui peuvent être un professeur et ses élèves. Il a également un point de départ théorique fort, donnant au contraire de Piaget un rôle essentiel au *langage*. Pour Van Hiele, on peut tenir sur les mêmes objets des discours qui sont susceptibles de se situer à différents niveaux. Par exemple, on peut parler d'un losange en l'envisageant d'après sa forme perceptive, qui l'oppose par exemple aux carrés, ou en le voyant comme déterminé par des propriétés caractéristiques, auquel cas un carré est un losange particulier, ou en référant au groupe des transformations qui le laissent invariant. Plus précisément, Van Hiele distingue en géométrie cinq niveaux de pensée, qui sont les suivants.

- niveau 4 : structuration globale,

- niveau 3 : déduction,
- niveau 2 : organisation des propriétés selon une succession,
- niveau 1 : perception des propriétés figurales,
- niveau 0 : appréhension des formes.

Et, selon Van Hiele, des interlocuteurs qui se situent à des niveaux de pensée différents ne se comprendront pas ; ainsi, il se pourra que le professeur ne s'imagine pas les difficultés de compréhension éprouvées à son écoute par les élèves, et que les élèves soient déroutés par le discours du professeur.

Pour l'enseignement, Van Hiele a préconisé le recours à des *phases* successives, qui méritent certainement d'être rapprochées des dialectiques introduites ultérieurement par Guy Brousseau. Il propose des phases d'information (connaître au moyen d'un matériel) et d'orientation dirigée (explorer au moyen du matériel), à rapprocher de la dialectique de l'action, une phase d'explications, à rapprocher de la dialectique de la formulation, une phase d'orientation libre (utilisation des "outils"), à rapprocher de la dialectique de la validation, et enfin une phase d'intégration, à rapprocher de l'institutionnalisation.

On voit ainsi que les points de vue de Van Hiele se distinguent de ceux de Piaget, mais qu'ils partagent les uns avec les autres un caractère très ordonné, très linéaire. Ce sont les travaux de Bloom qui ont conduit à envisager des taxinomies rompant avec la linéarité en présentant des ramifications. En effet, elles introduisent des niveaux hiérarchisés selon un ordre total, mais comportant chacun différentes catégories non nécessairement comparables. La classification NLSMA, application des travaux de l'équipe de Bloom aux besoins spécifiques des mathématiques, indiquée dans l'article de Wilson (Bloom, Hastings & Madaus, *1971*), présente bien évidemment les mêmes caractéristiques de ramification.

En France, Régis Gras a proposé, pour les besoins d'une expérimentation de géométrie au collège, conduite par plusieurs IREM et intitulée OPC (offre publique de collaboration), une classification adaptée de la taxinomie NLSMA en prenant en compte des nécessités d'organiser des progressions d'enseignement. Cela l'a amené en particulier à développer l'analyse implicative, dans laquelle des résultats d'élèves sont pris en compte pour déterminer une taxinomie d'items. Là aussi, on voit bien que l'expérimentation n'est pas nécessairement absente de l'élaboration d'une taxinomie. Mais encore une fois, il y a en quelque sorte un présupposé pour l'organisation que l'on cherche à déterminer, puisque l'on opère à l'intérieur d'un cadre de recherches de relations de dépendance. Toutefois, il n'y a plus un modèle de référence contraignant comme l'était par exemple la taxinomie NLSMA, mais seulement un archétype qui peut donner lieu à toutes sortes d'adaptations selon les observations recueillies.

c. Les grilles et les analyses factorielles comme outil

Si les modèles factoriels n'ont connu qu'une audience réduite dans le monde de l'enseignement, les méthodes factorielles ont obtenu leur incontestable succès auprès des chercheurs en tant qu'outil d'analyse des données multidimensionnelles. Ce qui en fait l'intérêt est qu'elles rassemblent les deux qualités suivantes, qui ne sont pas fréquemment réunies.

Qualité numéro 1. Dégager des grandes tendances, des lignes de forces d'un ensemble de données a priori foisonnant et d'une organisation peu apparente.

Qualité numéro 2. Fournir une localisation précise d'individus ou de variables, qui permet de pointer des particularités, des singularités.

Autrement dit, les techniques d'analyse factorielle fournissent une très bonne vue d'ensemble tout en autorisant des études locales d'une grande acuité. Quelque chose qui, pour être réel, n'est pas souvent indiqué par écrit, peut-être parce que l'on n'aime pas soulever le doute sur la qualité de la prise de données, est que les analyses factorielles constituent des instruments excellents pour détecter des erreurs de saisie. En effet, de telles erreurs ne sont jamais, fort heureusement d'ailleurs, fréquentes dans un tableau. Elles se traduisent donc par des "aberrations", que les analyses factorielles conduisent à repérer instantanément et partant à rectifier sur le tableau des données examinées. Nous connaissons peu de techniques qui, à côté de leurs qualités intrinsèques, conduisent ainsi à revenir sur des points précis du corpus de données.

Le principal intérêt reste toutefois la mise en évidence de résultats. Les exemples en sont nombreux. En nous limitant aux travaux qui ont pu être menés à Strasbourg, un répertoire important pourrait déjà être dressé. Nous ne mentionnerons ici que quelques cas, représentatifs d'une variété de situations d'analyse rencontrées en pratique. Les intitulés de ces cas sont choisis pour être évocateurs, mais il n'y a bien sûr pas de norme de désignation.

L'instantané photographique. La situation la plus élémentaire est celle de l'observation, sur un sujet donné, des réponses d'une population à un niveau d'études donné et à un instant donné. En soumettant des résultats simplement en réussite ou échec à l'analyse factorielle des correspondances multiples, on peut déjà voir apparaître des "paysages" intéressants, soit parce que des indépendances sont mise en lumière, soit parce qu'un effet Gutman (niveaux de difficulté progressifs) se manifeste. C'est ainsi qu'ont été mises évidence, dans la thèse de H. Hajri sur les représentations graphiques (1986), des difficultés non pas d'interprétation, mais de simple lecture. Un développement de cette observation sous la forme de réflexions sur les différents registres d'expression est présent dans la thèse d'Ismenia Guzmán (1990), et le sujet a largement été abordé par R. Duval.

La coupe longitudinale ou la vision synchronique. Un même ensemble de questions peut être proposé à des populations de niveaux ou de parcours d'études différents. Il y aura alors souvent intérêt à introduire dans les analyses, comme variables supplémentaires, les caractéristiques distinctives et les différents niveaux d'études considérés. Citons ainsi l'analyse factorielle des correspondances (J.P. Fischer et F. Pluvinage, 1989) sur les temps de réponse en calcul mental d'élèves de plusieurs classes primaires et de Sixième de collège. Il y apparaît que les élèves font encore des progrès sensibles après que l'apprentissage est censé avoir été mis en place. De plus, et c'est sans doute dans ce cas l'observation la plus remarquable, la simple répartition des temps de réponse dans la population interrogée permet de connaître, presque à coup sûr, la nature d'une opération (addition, multiplication, soustraction ou division) au vu de son placement dans le premier plan factoriel. Cette analyse accrédite l'hypothèse de séparation, voire de dissociation, des mémoires déclarative et procédurale et conduit à des conséquences pédagogiques sur l'apprentissage des opérations arithmétiques. Un exemple intéressant d'étude de ce type, autre que strasbourgeois, est dû à Danièle Coquin (1985) ; il porte sur l'acquisition des nombres relatifs par des élèves des différents niveaux du collège.

La perspective diachronique. On ne peut envisager d'étude didactique sans viser tôt ou tard, à repérer les effets d'enseignements. On peut soit suivre une population au cours du temps (au minimum, l'observer avant et après un enseignement déterminé), soit procéder à une comparaison entre deux ou plusieurs groupes (cas classique : un groupe expérimental et un groupe témoin). Même dans ce dernier cas, un suivi au cours du temps s'impose. A l'analyse factorielle des correspondances peut s'ajouter l'analyse factorielle discrimante dans ces situations. La recherche sur l'apprentissage du recours aux figures géométriques, menée par V. Padilla, est de ce type (1992). L'effet de l'entraînement aux modifications méréologiques sur l'apprentissage est très visible dans l'analyse factorielle. La recherche actuellement en cours, au niveau du DEUG, sur l'enseignement de l'algèbre linéaire par K. Pavlopoulou (voir son article dans le présent numéro) donne également lieu à un résultat d'analyse spectaculaire (non présenté dans l'article).

Bien sûr, dans toutes les recherches qui viennent d'être citées, des hypothèses étaient présentes au départ et, dès le début des travaux, des analyses factorielles étaient envisagées. En particulier, se trouvaient remplies des contraintes d'homogénéité des variables retenues et de "couverture" des phénomènes explorés (parler d'exhaustivité serait sans doute présomptueux dans le cas de la didactique). Ce sont les conditions les plus favorables à l'obtention d'analyses "parlantes". Les remplir nécessite de procéder soigneusement à des analyses a priori, tant des contenus en jeu que des tâches proposées. C'est pourquoi il apparaît intéressant maintenant d'envisager comment combiner les deux formes d'analyses (taxinomies et analyses factorielles) que nous avons considérées séparément jusqu'ici.

3. Amorce d'une dialectique entre les deux formes d'analyses.

Il peut très bien résulter de tout ce qui précède un point de vue plutôt négatif. Par exemple, Antoine Bodin, responsable des opérations nationales d'évaluation entreprises par l'Association des Professeurs de Mathématiques, fut conduit à remarquer : « Les comportements des élèves ne respectent ni les taxonomies d'objectifs, ni l'analyse a priori de la difficulté des tâches.» (1989) Pour notre part, nous serions plutôt enclins à nous exprimer de façon positive, en disant que l'on a besoin des deux types d'études, d'une part celles des comportements des élèves tels que les méthodes factorielles les mettent en évidence, d'autre part celles des taxinomies d'objectifs ou des hiérarchies des difficultés de contenus et de tâches.

Puisqu'il s'agit de "mondes" scientifiquement incompatibles, comme nous l'avons vu, il n'est guère envisageable de procéder simultanément aux deux formes d'analyses. La tentative la plus poussée qui ait été menée dans la direction de leur rapprochement nous paraît être celle, déjà citée, de Régis Gras suivi d'Annie Larher (1992). En effet des items sont examinés à travers la prise en compte de résultats d'élèves. Mais les élèves eux-mêmes sont caractérisés par leur appartenance ou non à certains groupes fournissant des réponses données aux questions posées, sans que l'on puisse se prononcer sur la similitude ou la dissemblance entre eux de deux élèves donnés. Nous pensons quant à nous que la piste de la confrontation d'analyses séparées vaut à présent la peine d'être suivie. L'analyse a priori, de type taxinomique, est l'instrument d'élaboration d'outils pour l'observation ou l'expérimentation. Ensuite peut être envisagée une phase d'exploitation de résultats fournis par une population interrogée, à l'aide par exemple de méthodes factorielles. L'analyse implicative de Régis Gras peut intervenir à ce stade pour conduire à une discussion des analyses a priori qui avaient été précédemment faites. La vision multidimensionnelle fournies par les méthodes factorielles peut amener a faire intervenir de nouveaux éléments dans une analyse de contenu. Il n'est pas interdit qu'alors, on envisage une prise en compte nouvelle du corpus des réponses fournies par la population interrogée, ou une nouvelle observation. Et ainsi de suite.

L'expérience de travaux récents nous conduit à juger qu'une telle démarche est non seulement possible, mais fructueuse. D'une part, dans sa thèse de doctorat, Thadeu Moretti a envisagé d'une manière systématique les enchaînements d'analyses auxquelles il est possible de procéder sur un même corpus. D'autre part, les recherches de Jean-Claude Rauscher (1993) organisent dans leur démarche même auprès de professeurs une telle dialectique. En effet, on part de l'observation par les professeurs des résultats obtenus par leurs élèves à l'évaluation nationale de début d'année en classe de Sixième, pour élaborer en fin d'année un questionnaire tenant compte des propositions des professeurs, afin de repérer l'évolution des élèves. Les différentes références sont donc mobilisées à différents moments de la recherche. Notons d'ailleurs que l'évaluation nationale utilisée dans cette recherche, comme d'ailleurs l'enquête internationale baptisée TIMSS (third international mathematics and sciences study) parce qu'elle a été précédée de deux autres, la première très critiquée en son temps par Hans Freudenthal, ont recours à des classifications un peu hybrides, visant à conjuguer à la fois des analyses de contenus et des références à des résultats connus d'élèves. Les "grilles" ainsi construites ne peuvent prétendre avoir valeur de modèles scientifiques, comme voudraient l'être des taxinomies, mais ont des fins très utilitaires : permettre l'élaboration de questionnaires satisfaisant à des ensembles de contraintes assez complexes. La dialectique que nous préconisons pour des études scientifiques n'est elle en définitive pas déjà engagée dans une démarche pragmatique?

Références

Benzécri, J.P. & alii, 1973, *L'Analyse des Données, 1 La Taxinomie*, Paris, Dunod.

Bloom & Hastings &Madaus, 1971, *Handbook on Formative and summative Evaluation of Student Learning*, New York, McGraw-Hill Book.

Bodin, A., 1989, Some Results of a large scale evaluation of the new syllabus at French college level. Paris, *P.M.E.* 13, p.133-140

Coquin-Viennot, D., 1985, Complexité mathématique et ordre d'acquisition : une hiérarchie de conceptions à propos des relatifs, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 6, n° 2-3, p. 133-192.

De Landsheere , G, 1976, *Evaluation Continue et Examens. Précis de Docimologie*, Paris Nathan.

Fischer J.P.& Pluvinage F., 1989, Complexités de compréhension et d'éxécution des opérations arithmétiques élémentaires. *R.D.M.*, 9.2. p.133-153.

Gras, R., & Larher A., 1992, L'implication statistique, une nouvelle méthode d'analyse de données. *Mathématiques et Sciences Humaines*, 120.

Guilford, J.P., 1967, *The Nature of Human Intelligence*, New York, McGraw-Hill Book Company.

Guzman-Retamal, I., 1990, *Le Rôle des Représentations dans l'Acquisition de la Notion de Fonction.* Thèse ULP, Strasbourg, IREM.

Hajri, H., 1986, *Perception de Relations dans le Plan Repéré.* Thèse ULP, Strasbourg, IREM.

Moretti, T., 1992, *L'Exploitation des Analyses factorielles en Didactique des Mathématiques.* Thèse ULP, Strasbourg, IREM.

Padilla, V., 1992, *L'Influence d'une Acquisition de Traitements purement figuraux pour l'Apprentissage des Mathématiques.* Thèse ULP, Strasbourg, IREM.

Rauscher, J.C., 1993, *L'hétérogénéité des Professeurs face à des élèves hétérogènes.* Thèse ULP, Strasbourg, IREM.

Van Hiele, P.V., 1959, La Pensée de l'Enfant et la Géométrie. *Bulletin A.P.M.E.P.*, n°198,, p.199-205.

La comparaison des ensembles infinis : un cas de résistance à l'instruction

Guillerma Waldegg

The bijection of an infinite set in one of its parts is proved to be the most difficult didactic obstacle to get over for the comprehension of infinite sets. In order to analyse the nature of this obstacle a research was done with students of 15 to 18 years of age, in scientific sections in Mexico. The questionnaire was preceded by an informative part in which the definitions were given, taking into consideration the conceptions of the students come out from previous questionnaires. This paper presents the results of this research.

L'infini, pris dans ses nombreuses significations, a occupé une place déterminante dans le développement conceptuel des mathématiques. Quand l'infini, sous une de ses facettes, se rend explicite, une série de questions théoriques et métathéoriques surgissent, obligeant à chercher des bases plus solides pour fonder les connaissances.

C'est autour de l'infini que nous trouvons les discussions et les points de rupture les plus violents entre les différentes conceptions mathématico-philosophiques. Même aujourd'hui, le point de vue constructiviste de Brower, engendre une mathématique essentiellement différente de la mathématique standard infinitiste.

L'infini a été présent aux moments du démarrage des théories mathématiques qui, à long terme, se sont révélées comme les plus capables de modeler le monde physique (notamment, le calcul, la théorie des séries, la théorie des ensembles, la géométrie fractale). De plus, l'infini se retrouve à la base des crises de fondements des mathématiques (la dénommée crise des incommensurables des Grecs et "l'arithmétisation" de l'analyse du 19ème siècle).

© Annales de Didactique et de Sciences Cognitives
5 (1993) (p.19-36) - IREM de Strasbourg

Tout au long de l'histoire, les savants et les penseurs ont consacré une partie considérable de leurs travaux à pénétrer les mystères de l'infini. Beaucoup d'auteurs ont écrit sur ce thème et ses implications ; celles-ci ne sont pas seulement de caractère mathématique et philosophique, mais aussi métaphysique et théologique. Si aujourd'hui, à la fin du 20ème siècle, l'infini est un objet mathématique bien défini avec lequel nous pouvons faire des opérations, c'est grâce à la participation active, et maintes fois violente, des mathématiciens les plus importants de tous les temps.

Certainement l'infini est une construction intellectuelle qui implique un haut degré d'abstraction. Nous ne comptons, dans la réalité physique, sur aucune expérience qui nous permet d'accepter ou de refuser l'existence de l'infini et, étant donné qu'il est une création de la pensée humaine, il est seulement soumis aux méthodes de vérification de la logique : les conséquences de son existence doivent garder une étroite relation avec la totalité de la construction théorique dans laquelle il est inclus.

Il n'y a aucun doute que dans son état actuel, la théorie possède une structure formelle incontestable pour la plupart des mathématiciens et que cette structure-là a été une source d'importants résultats tout au long du 20ème siècle. Mais cela n'implique point que le concept soit devenu plus accessible à l'étudiant. En fait, les structures cognitives des étudiants, construites à partir des expériences finies, ne favorisent pas l'assimilation du concept ; bien plus, ils constituent un obstacle pour l'atteindre. La tension produite chez les jeunes à cause de l'étude de l'analyse est due à l'affrontement avec des nouveaux instruments liés à l'infini.

Quand l'étudiant aborde pour la première fois l'analyse, il trouve qu'une nouvelle opération a été ajoutée à son langage courant de l'algèbre : le passage à la limite. Derrière des nouveaux symboles et des opérations apparemment similaires à celles qu'il a déjà utilisées, un appareil conceptuel différent est caché. L'étudiant doit donc inclure dans son domaine cognitif, l'usage des inégalités et des quantificateurs aussi bien que l'extension des concepts de fonction et de nombre.

Les méthodes de l'analyse offrent une série d'algorithmes basés sur des intuitions élémentaires, lesquelles, moyennant un langage algébrique, permettent de donner un traitement des situations que nous pouvons résoudre au niveau des opérations. Ces situations sont parfois contradictoires et elles ne peuvent être formalisées que localement.

L'apparition de l'infini transforme mathématiquement les problèmes. Néanmoins, le professeur tend à construire une sorte de "solution continue" entre le langage algébrique et les intuitions que l'étudiant possède. Une telle solution ne sert qu'à cacher les différences entre la mathématique finie et les méthodes de l'analyse.

Il faut de plus ajouter les questions concernant la dichotomie actuel-virtuel aux problèmes liés au passage du fini à l'infini. Nous ne pouvons pas dissocier au niveau de l'enseignement l'infini virtuel de l'infini actuel. Le premier se rapporte aux méthodes de l'analyse, et le second rend compte du dernier résultat des processus virtuellement infinis. Ainsi, nous nous intéressons à la tangente à une courbe en l'un de ses points et non à la suite de sécantes qui s'approchent d'elle "aussi près que l'on veut" ; ou bien, l'aire sous une courbe proposée est l'objet recherché et non pas les approximations successives des aires rectangulaires. Dans tous ces cas-là, on trouve une sorte de "mélange" de l'infini virtuel (quand nous considérons les pas du processus) et de l'infini actuel (quand nous parlons du résultat d'un tel processus). En somme, nous ne pouvons pas nous restreindre à une seule facette de l'infini ; l'infini virtuel et l'infini actuel coexistent et cette coexistence-là n'est point pacifique, elle est d'ailleurs une source de nombreuses situations paradoxales.

Au coeur du sujet, on trouve des questions liées aux intuitions trompeuses nées d'une interprétation presque étymologique du mot "infini" comme la négation du fini. Il est contradictoire, aux yeux des étudiants, de parler d'une itération qui ne s'arrête jamais et, en même temps, du produit obtenu à la fin de cette itération. Ainsi, nous parlons indistinctement aux élèves des nombres entiers, dont chacun d'eux est construit en suivant la loi du successeur, et de l'ensemble de tous les entiers ; ou bien, nous leur présentons une suite "interminable" de subdivisions d'un segment qui "terminent" en un point.

Dans la théorie des ensembles infinis les situations paradoxales atteignent leur sommet quand l'étudiant doit établir la bijection d'un ensemble infini sur un de ses sous-ensembles propres et donc, accepter que le tout égale la partie.

C'est sur ce dernier point que nous avons mené une étude en cherchant d'abord le corpus de notions, idées, concepts et, en général, de conceptions que les jeunes étudiants associent à l'infini, après une éducation mathématique scolaire de douze ans environ. Ensuite, nous avons proposé un programme d'instruction destiné à introduire une certaine cohérence dans ce corpus qui soit, en même temps, en harmonie avec la connaissance mathématique courante. Les résultats montrent que les étudiants n'abandonnent pas facilement leurs idées intuitives, même si elles sont contradictoires.

L'infini caché dans les programmes d'étude

L'infini, comme une "façon d'opérer" ou comme un mécanisme d'extension des rapports mathématiques, apparaît très tôt dans le cours historique des idées, ainsi que dans le développement intellectuel de l'individu. Outre l'infini résultant de compter, les petits enfants sont capables de percevoir que les règles des opérations élémentaires sont valables pour "tous les nombres", ou qu'il y a des événements cycliques, comme la rotation de la Terre, qui se répètent éternellement à l'échelle humaine. Les élèves plus âgés atteignent l'idée d'approximation liée à l'opération de mesurer, et, enfin, ils arrivent à la notion de variation continue. C'est l'infini virtuel qui apparaît d'abord, presque sans conflit avec l'intuition.

Cette conception de l'infini, comme un synonyme de l'indéterminé ou de l'indéfini, reste longtemps sans évoluer. Il n'y a pas d'expériences scolaires élémentaires qui favorisent le changement vers une nouvelle conception. Il n'y a pas non plus, apparemment, des besoins qui le demandent. Néanmoins, comme l'affirme Koyré :

... l'infini virtuel n'est possible, logiquement, que sur la base de l'infini actuel. C'est dans l'infini (actuel) seulement qu'une grandeur, une variable, peuvent s'accroître et varier à l'infini... c'est l'acte qui est le fondement de la puissance, et non pas à l'inverse. Si l'on peut désigner, sur une droite, un nombre infini de points, c'est bien parce qu'ils y sont. Si l'on peut compter jusqu'à l'infini, c'est parce que le nombre des nombres finis est infini ... (2)

Autrement dit, nous ne pouvons pas ignorer l'existence de l'infini actuel puisqu'il est à la base de l'infini virtuel et donc, il est incontournable dès le début de l'apprentissage des mathématiques. La paire actuel-virtuel, de ce point de vue, ne se présente plus comme une vraie dichotomie, mais comme une dualité, semblable à la dualité particule-onde que l'on trouve dans la théorie physique. Les physiciens acceptent la théorie de la dualité non pas sur les bases de l'expérience empirique, mais dans le corps des structures théoriques, bien que cela frappe aussi l'intuition.

Depuis l'école élémentaire jusqu'à la fin des études secondaires il n'existe dans les programmes scolaires (tout au moins au Mexique) aucun chapitre consacré à un traitement de l'infini préparant l'unification des idées et des opérations intuitives et formelles. Des situations qui peuvent suggérer comme actuel le non-achevé, comme accomplie une opération qui progresse à l'infini, sont aussi évitées. En somme, il n'existe pas une préparation pour intérioriser l'infini actuel.

Des circonstances scolaires médiocres, ajoutées aux intuitions trompeuses, transforment la question de l'infini en un des obstacles les plus difficiles à franchir dans l'enseignement des mathématiques, surtout de l'analyse, comme nous le montrons plus loin.

Le sondage initial

Les conflits liés à l'infini ont été antérieurement remarqués, notamment par Duval (3) et Fishbein (4), et nous les avons constatés dans un sondage initial réalisé au Mexique en 1988. Comme première approche du problème, nous avons posé à trois groupes différents, des questions concernant des situations liées à l'infini :

a) Subdivision infinie d'un segment

b) Développement décimal infini

c) Continuité arithmétique

d) Rapports entre les éléments de deux ensembles infinis

Les groupes étaient formés de la façon suivante :

I. 13 étudiants de l'école secondaire (15-17 ans)

II. 14 étudiants de la faculté d'ingenierie (19-23 ans)

III. 20 professeurs de l'école élémentaire (22-31 ans)

Bien que le but de cet article ne soit pas la description détaillée de notre première étude, il est important de souligner certains résultats. Nous avons d'abord classé les réponses des étudiants en "finitistes" et "infinitistes". Nous appelons réponses finitistes, celles dont les arguments nient toute possibilité de suivre une opération indéfiniment, ou bien qui n'acceptent que des considérations sur des ensembles finis. Sur une totalité de 400 réponses effectives, nous en avons trouvées 273 (63%) de type finitistes. 71% des réponses du groupe I, 49% des réponses du groupe II et 65% des réponses du groupe III donnent des raisonnements qui peuvent être considérés finitistes, sur une échelle plus ou moins grande. Il faut remarquer que :

- plus de la moitié des étudiants n'acceptent pas l'infini, et cette situation ne change pas avec l'âge

- il y a une petite variation rapportée au genre et au niveau des études, mais les études plus spécialisées (le génie) provoquent apparemment de l'insécurité dans les étudiants (nous avons trouvé un tiers de réponses en blanc dans le groupe II et aucune dans les autres groupes).

Il devient évident d'après les raisonnements, que :

- les arguments "infinitistes" sont utilisés aussi bien pour affirmer que pour nier une même proposition, ce qui les rend logiquement ambigus. Par exemple, face à la question "Est-ce qu'un point sur un segment peut être atteint par une suite indéfinie de bipartitions ?", on trouve les réponses : "oui, parce que l'opération est infinie" ou "non, parce que l'opération est infinie".

- il y a des inconsistances dans les arguments infinitistes. Par exemple, on dit qu'un segment ne peut pas s'épuiser par bipartitions ou tripartitions, cependant, on affirme que le processus finit plus rapidement dans le cas des tripartitions

- il n'y a aucune différence entre la droite réelle et la droite rationnelle. Il n'y a pas non plus, une claire identification point-nombre dans la droite

- les nombres irrationnels ne sont pas conçus comme une réalité dans l'univers numérique des étudiants

- l'établissement de la bijection n'est pas accepté comme un critère valable pour comparer deux ensembles.

Les ensembles infinis

La théorie des ensembles fait partie de l'enseignement des mathématiques, à tous les niveaux, depuis les années soixante. Bien qu'elle soit inclue dans tous les programmes scolaires, ses bénéfices sont encore discutés, tant par les élèves que par les professeurs. En fait, le rôle que la théorie des ensembles joue dans les mathématiques pour synthétiser le savoir, n'est pas du tout éclairci quand il s'agit de la connaissance élémentaire.

Du point de vue conceptuel, nous serions forcés de détacher les questions rapportées aux notions d'appartenance et d'inclusion de celles de cardinalité et d'infini. C'est dans ces deux dernières notions que se trouve la force de la théorie.

Les notions d'appartenance et d'inclusion existent dans les mathématiques depuis longtemps (5). Ce sont des notions intuitives qui n'ont pas suscité de controverses. A partir d'elles, il a été possible de développer une théorie des syllogismes et des méthodes axiomatiques (rappelons que "le tout est supérieur à la partie" est une notion commune des Éléments d'Euclide). Mais l'idée de cardinalité suppose l'acceptation de l'infini actuel, ce qui, dès le début, a trouvé de fortes oppositions.

Quand l'étudiant affronte pour la première fois les ensembles infinis (il faut remarquer qu'un ensemble infini, d'après la même définition d'ensemble, ne peut être qu'actuellement infini) il doit accepter que le tout égale la partie, ce qui est à ses yeux, une vraie contradiction. Les racines du conflit se trouvent dans le fait que les schémas intellectuels sont construits à partir d'expériences pratiques où il est évident que le tout est toujours plus grand que la partie. Ces schémas sont simplement étendus et adaptés aux situations liées à l'infini. L'extrapolation aux ensembles infinis des propriétés des ensembles finis, dont la tangibilité permet une représentation mentale immédiate, conduit à des contradictions difficilement surmontables.

Le problème avait déjà été décelé dès la première partie de notre recherche, en mettant en évidence la tension que provoque chez l'étudiant la comparaison des ensembles infinis quand ils existent en même temps, les rapports d'inclusion et de bijection entre eux. Ce problème est devenu le centre de nos études postérieures vue l'ampleur de ses effets sur l'enseignement de l'analyse et la compréhension de l'infini en général.

Nous avons déjà rapporté les résultats de l'étude sur les critères et les conceptions que les étudiants du premier semestre d'université possèdent sur les ensembles infinis (6), elle a révélé que d'après les étudiants :

- on ne peut pas décider si un ensemble est infini par la seule existence des rapports d'inclusion et de bijection.

- si la mise en rapport des éléments d'un ensemble (ou d'une partie d'eux) avec les entiers naturels est possible, alors l'ensemble est infini.

- l'établissement de l'inclusion ou de la bijection (ou des deux) entre deux ensembles infinis, ne représente aucun conflit. Les problèmes surgissent quand ces rapports doivent être confrontés afin de décider sur l'égalité ou l'inégalité des ensembles.

- il n'y a aucun avantage à choisir le critère de la bijection pour comparer des ensembles infinis. Le critère de l'inclusion est plus naturel, plus intuitif. Autrement dit, il n'y a aucune expérience didactique élémentaire qui montre les bénéfices du critère de la bijection.

Certains étudiants pensent que les ensembles infinis sont tous "égaux" (7) (ou bien qu'ils ne le sont jamais). Dans ce cas-là, il n'y a pas de contradiction à propos de l'existence simultanée de l'inclusion et de la bijection.

Soutien statistique des observations

A partir des résultats obtenus dans les deux études antérieures, nous avons réalisé une autre recherche, afin de mesurer la cohérence des réponses des étudiants face aux situations liées aux ensembles infinis. Nous avons mené une enquête en tenant compte des conceptions propres aux étudiants.

Le questionnaire a été élaboré d'après les considérations suivantes :

- une partie était consacrée à l'instruction présentant des définitions et des exemples

- cette partie là a été conçue en suivant les idées des élèves. Par exemple, nous avons donné la définition : "Un ensemble est infini si l'on doit utiliser tous les entiers naturels pour compter ses éléments ou une partie d'eux"

- les questions étaient groupées d'après le contexte, les situations particulières et les situations générales

- le questionnaire était structuré en quatorze blocs (34 questions en tout). Chaque bloc présentait une situation déterminée et posait plusieurs questions à cet égard

- toutes les questions présentaient des options "OUI", "NON" et "ON NE PEUT PAS DIRE". Il y avait des réponses correctes des trois genres.

Le questionnaire a été testé sur un échantillon de 95 lycéens de sections scientifiques (âgés entre 15 et 18 ans), de niveaux socio-économiques semblables.

Le Tableau 1 décrit le contenu du questionnaire ainsi qu'une première approche des résultats en termes de pourcentages. On peut y apprécier les faits suivants :

- Nous avons d'abord supposé que, pour les élèves, pouvoir compter les éléments d'un ensemble (en utilisant la suite complète des nombres naturels) était une condition nécessaire pour affirmer que l'ensemble est infini. Néanmoins, cette condition n'est pas suffisante. Il faut, en plus, que les ensembles possèdent une structure "à la file" afin que les étudiants puissent compter sur une place illimitée pour mettre les éléments de l'ensemble. Ainsi, il n'est pas difficile d'affirmer qu'un ensemble avec un ordre linéaire est infini, puisque cette configuration peut se prolonger indéfiniment. Les questions rapportées aux ensembles ainsi caractérisés (les naturels, les pairs, les entiers, les puissances de dix ou la droite), ont obtenu les pourcentages de réussites les plus élevés

- par contre, les pourcentages de réussites pour les ensembles bornés baissent d'une façon notoire.

Tableau 1 (page suivante)

Bloc	ENSEMBLES (Points ou Nombres)	DIFFICULTE	QUESTIONS (sur les ensembles)	% Réussite
I	points d'un sergment	continu/borné	1. est-il infini ?	64
II	naturels et pairs	structure "à la file"	2. y a-t-il une bijection ? 3. quelle bijection ? 4. sont-ils "égaux" ?	48 39 32
III	naturels et entiers pairs	il n'y a pas de 1er élément	5. sont-ils infinis ? 6. y a-t-il une bijection 7. quelle bijection ? 8. sont-ils "égaux" ?	95 33 4 32
IV				
V	naturels et puissances de dix	structure "à la file"	13. y a-t-il une bijection ? 14. quelle bijection ? 15. sont-ils "égaux" ?	96 56 30
VI	naturels et naturels sans zéro	un seul élément "en trop"	16. sont-ils "égaux" ?	47
VII	A et B abstraits	A sous-ensemble propre de B	17. finis et "égaux" ? 18. infinis et "égaux" ?	72 41
VIII	D et C abstraits	D sous-ensemble infini de C	19. C-D peut être finie ?	19
IX	points sur deux segments	continu/borné	20. AB est infini ? 21. CD est infini ? 22. y a-t-il une bijection ? 23. sont-ils "égaux" ?	47 45 65 43
X	carré et demi-droite	continu, borné/non-borné dimensions différentes	24. points du carré infinis ? 25. points droite infinis ? 26. sont-ils "égaux" ?	58 84 11
XI	droite et demi-circonférence	continu, borné/non-borné	27. y a-t-il une bijection ? 28. sont-ils "égaux" 29. égalité demi-circon/segment 30. égalité segment/droite	72 23 27 13
XII	(0,1) et (0,2)	continu/borné	31. y a-t-il une bijection ? 32. sont-ils "égaux" ?	69 47
XIII	cercle et cercle plus circonférence	continu/borné	33. sont-ils "égaux" ?	32
XIV	surface et droite	continu, borné/non-borné	34. sont-ils "égaux" ?	56

- les questions sur l'établissement de la bijection varient dans une marge considérable de réussites (entre 33 % et 72 %). Les pourcentages sont plus importants si la bijection est explicitée dans la question.

Les pourcentages de réussites à propos de l'équipotence sont les plus faibles (entre 11 et 56 %) sauf pour la question théorique 34, le reste est inférieur à 50 %. En fait, la moyenne de réussites de ces questions ne dépasse pas le 32 %. Autrement dit, moins d'un tiers des étudiants acceptent l'équipotence des ensembles comparés.

L'analyse statistique

Après avoir dégagé les caractéristiques des données obtenues à partir du questionnaire nous avons choisi, pour les étudier, la méthode de l'analyse factorielle de correspondances, afin de déterminer les rapports possibles entre les variables impliquées. Pour l'application de cette méthode, nous avons utilisé le logiciel STAT-ITCF.

La méthode de l'analyse factorielle de correspondances est employée afin d'obtenir une représentation géométrique d'un tableau de données, ce qui permet d'apprécier les groupements des éléments du tableau (8).

Le but de notre questionnaire était les deux points suivants :

a) Décider si un ensemble est infini

b) Décider si deux ensembles sont équipotents.

Dans un premier temps nous n'avons pris que les questions concernant ces deux points, en les considérant nos variables principales. Les questions d'un seul bloc qui portaient sur l'établissement de la bijection et l'acceptation du critère de comparaison, ont été groupées dans une seule variable, dont la réponse a été considérée correcte lorsque les deux questions étaient justes.

La première remarque importante qui émerge du traitement de l'information est la dispersion très grande du nuage de données. Cette dispersion peut être attribuée à l'absence de l'apprentissage qui aurait dû être acquis grâce à l'information contenue dans le questionnaire. Nous pouvons donc dire que celle-ci n'a pas eu les effets qui auraient pu être attendus sur l'échantillon. Ainsi, les traitements des différentes situations liées à l'infini, n'obéissent qu'aux notions intuitives qui conforment les structures cognitives de chaque étudiant.

Malgré la remarque précédente, les regroupements des questions autour des axes principaux du nuage concordent avec les caractéristiques mathématiques communes des dites questions. Ainsi, les situations mathématiquement semblables se retrouvent dans l'analyse des données ce qui indique que les étudiants les traitent de façon similaire.

Vue la dispersion du nuage de données, nous avons défini à nouveau des variables principales afin de trouver d'autres rapports. Nous avons mené deux analyses différentes supplémentaires, qui démontrent les résultats suivants :

- il y a des groupes bien séparés de questions rapportées en elles-mêmes. Ces questions possèdent des caractéristiques mathématiques communes et sont donc traitées de la même façon

- les groupes des questions sont stables dans les différentes analyses

- il y a des étudiants réunis en tant que variables autour de certaines questions et qui se dispersent pour d'autres, cela veut dire que les étudiants ne partagent pas les même intuitions locales de l'infini

- la dispersion du nuage ne disparaît pas avec la modification de l'analyse

Quelques remarques extraites de l'analyse statistique

A partir de l'étude statistique, nous pouvons dire qu'il y a des facteurs qui ont une plus forte influence sur la compréhension des ensembles infinis :

Un ensemble borné, surtout s'il est encadré dans un contexte géométrique, est difficilement conçu comme possédant un nombre infini d'éléments. En fait, la configuration et les dimensions des régions géométriques sont un obstacle pour la conception des ensembles de points contenus dans celles-ci.

La comparaison entre deux ensembles infinis devient plus difficile si un ensemble est borné et l'autre ne l'est pas. Dans ce cas-là, l'infini virtuel est un obstacle pour comparer les deux ensembles puisqu'il est évident dans l'ensemble non-borné mais reste caché dans l'ensemble borné.

Il n'y a pas de recours au critère de la bijection pour comparer un ensemble avec un de ses sous-ensembles propres, bien que ce critère ait été exolicitment présenté.

Quant au comportement des étudiants nous pouvons conclure que :

- l'étudiant possède une suite d'intuitions locales à l'égard de l'infini qu'il applique suivant la situation

- les intuitions sont localement cohérentes mais globalement, elles se contredisent

- les notions intuitives sont un obstacle pour accepter les concepts formels

- tous les étudiants ne partagent pas les mêmes intuitions locales. Certains répondent vraisemblablement devant une situation proposée, mais, en changeant la situation, ils ne réagissent plus de façon similaire.

Les remarques de notre étude confirment apparemment certains résultats théoriques déjà établis.

Premièrement, il y a sans doute l'obstacle du dédoublement des objets mathématiques discuté par Duval (9). D'après cet auteur, l'obstacle du dédoublement apparaît quand l'étudiant doit

"... séparer des propriétés ou des caractéristiques jusque là fortement associées à un même objet, ou attribuer des dénominations et des représentations différentes à un objet que l'on pense être le même" (10)

Dans notre sujet, chaque élément d'un ensemble joue un double rôle : il appartient simultanément à deux ensembles dont les caractéristiques ont été établies antérieurement. Ainsi, une puissance de dix possède des propriétés dues à son appartenance à l'ensemble des entiers et, en même temps, à son appartenance à l'ensemble des puissances de dix. 10^n doit être dédoublé et considéré comme deux objets différents afin d'établir la bijection entre les entiers et les puissances de dix.

D'autre part, nous trouvons la stabilité de la pensée intuitive remarquée par Pozo et Carretero (11). La pensée intuitive, dont la cohérence n'est que locale, présente des caractéristiques de résistance aux changements et aux nouvelles articulations nées de nouvelles connaissances. La cause principale de cette stabilité réside dans le fait que la cohérence locale permet aux étudiants de se débrouiller convenablement dans de nombreuses situations qui n'ont apparemment aucune liaison.

Ainsi, des propriétés et des opérations rapportées aux ensembles finis qui s'étendent aux ensembles infinis, permettent d'établir des réponses locales correctes du point de vue du sens commun. Tandis qu'une autre approche, comme celle que propose l'analyse mathématique, n'offre que des résultats absurdes.

Or l'obstacle du dédoublement tout comme celui de la stabilité de la pensée intuitive doivent être rapportés aux contextes mathématiques dans lesquels ils se situent. Prenons, par exemple, la remarque que nous avons faite à propos des ensembles qui possèdent une structure "à la file" face aux ensembles bornés.

Dans le premier cas, il y a une correspondance directe entre la série temporelle ordonnée des événements (compter les naturels, les pairs, les puissances de dix) et sa projection spatiale linéaire. Cette correspondance reflète un ordre dans un autre ordre, c'est-à-dire, elle respecte la structure d'ordre. La pensée intuitive, résultat de la construction d'une telle correspondance chez l'enfant, ne contrevient pas les exigences de la théorie mathématique et peut bien évoluer vers les notions formelles.

Mais, par contre, l'obstacle du dédoublement s'avère difficile à franchir car il faut attacher deux ordres différents à un même élément (l'ordre "naturel" et l'ordre dû à son appartenance à un autre ensemble).

Dans le cas des ensembles bornés, il faut établir une correspondance inverse entre la série temporelle des événements (compter les points par exemple) et sa projection spatiale non nécessairement linéaire. De cette façon, les valeurs des nombres augmentent temporellement dans la série numérique et la représentation spatiale correspond à des points de plus en plus proches.

Le dédoublement ne semble pas jouer un rôle décisif dans ce cas-là, alors que les intuitions locales, dont nous avons parlé précédemment, constituent l'obstacle le plus important.

Finalement il faut ajouter les questions concernant le passage de l'étape intra-objectale à l'étape interobjectale que nous avons rapporté dans notre étude antérieure (12). Ainsi les étudiants de la population visée par notre enquête seraient en quelque sorte ancrés à un niveau de conceptualisation dans lequel ils ne peuvent pas faire l'abstraction de l'individualité et des règles de génération des éléments d'un ensemble. Ils ne peuvent pas concevoir l'ensemble comme "un tout" et donc, le considérer comme un "objet d'étude". Bien entendu ceci empêche de concentrer l'attention vers les opérations et les transformations entre les ensembles et alors, d'établir la conservation de quantité qui est nécessaire pour accéder à l'étape inter objectale. Nos résultats mettent en évidence la difficulté de surmonter ce niveau de conceptualisation par la seule présence de l'instruction.

Quelques remarques pour l'enseignement

La théorie des ensembles infinis occupe sans doute une place privilégiée dans l'univers mathématique actuel. L'étude des circonstances qui ont rendu possible sa connaissance, ainsi que des mécanismes d'appropriation de nouveaux concepts, doit conduire à une meilleure compréhension des obstacles et difficultés qui sont présents dans l'apprentissage de ce domaine cognifif. Notre étude nous permet de faire quelques réflexions sur ce sujet.

Les racines de la théorie des ensembles infinis sont bien localisées dans l'étude des domaines des fonctions, c'est-à-dire, il y a un sujet identifié qui crée la nécessité de développer des outils propres. A cet égard, l'étude de la théorie des ensembles infinis est significative tant qu'elle est associée à un problème donné. Les ensembles sont très importants si on les considère comme sustentation des structures mathématiques (espaces métriques, corps, catégories) ou comme un outil linguistique qui facilite une notation algébrique adéquate, ou bien dans les contextes topologiques ou dans la théorie de la mesure. Cependant, les ensembles comme l'objet d'étude *per se* n'ont de sens que dans les recherches approfondies des théories axiomatiques. Bien qu'il doive y avoir une préparation élémentaire dans ce domaine, il est difficile de croire que les approches que nous trouvons à l'école primaire fournissent les bases pour l'utilisation postérieure de la théorie.

D'un autre côté l'idée de l'infini actuel est consubstantielle au concept d'ensemble abstrait, donc ces concepts-là ne peuvent pas être dissociés et être traités de façon indépendante. L'origine de la théorie provient des ensembles infinis. Si Cantor incorpore les ensembles finis dans sa théorie, ce n'est que pour jeter un pont entre ses nouveaux nombres et la connaissance mathématique existante, afin de les embrasser dans une seule théorie. L'étude des ensembles finis à l'école élémentaire n'a donc aucun sens.

Les modèles concrets et la recherche du reflet de la réalité physique dans les objets mathématiques ne sont pas toujours une aide efficace pour l'apprentissage. En fait, dans le cas de l'infini, ceux-ci constituent de véritables obstacles. L'expérience doit se trouver, non pas dans le monde physique, mais dans les mathématiques, de telle sorte que les nouveaux concepts surgissent à partir d'un domaine cognitif déjà structuré autour des concepts abstraits.

NOTES

1 MORENO, L., WALDEGG, G. : The Conceptual Evolution of Actual Mathematical Infinity, *Educational Studies in Mathematics*, Vol 22, pages 211-231, 1991.

2 KOYRE, Alexandre : *Etudes d'histoire de la pensée philosophique* , Gallimard, 1971 pp 25-26

3 DUVAL, Raymond : L'obstacle du dédoublement des objets mathématiques, *Educational Studies in Mathematics* , No. 14, pp 358-414, 1983

4 FISCHBEIN, E., TIROSH, D., HESS, P. : The Intuition of Infinity, *Educational Studies in Mathematics* , No. 10 pp 3-40, 1979

5 Cfr. BOURBAKI, *Eléments de l'histoire des mathématiques*

6 MORENO, L., WALDEGG, G. : Op. Cit.

7 Dans tout cet article, nous parlerons d'ensembles "égaux" pour désigner des ensembles ayant même cardinal (même nombre d'éléments)

8 Voir BENZECRI, J.P. : *Pratique de l'analyse de données* , Paris, Dunod.

9 DUVAL, Op. cit.

10 Ibid. page 410

Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée

R. Duval

Abstract. That mathematical knowledge can be represented under different semiotic forms is very often pointed. But very few studies focus on the operation of changing the semiotic form through a knowledge is represented. However, it is a basic cognitive operation. Irreductible to any processing pattern, it seems strongly related to the understanding processes and to the difficulties of conceptual learning. It causes obstacles that only the coordination of various registers of semiotic forms helps to overcom.
The aim of this paper is to show the central place of the ability to change the register of any semiotic representation in the learning of mathematics. For that we shall tackle three topics. First, many of the difficulties encountered by students at diffent levels of their curriculum can be decribed and explained as a lack of ccordination of register of representation. Secondly, conceptual knwolegde is like the invariant of manifold semiotic representations. Thirdly, by taking into account different registers of representation we can define independent variables specific to cognitive contents, and so organize didactical sequences in order to develop the coordination of registers of representation.

Il y a un mot à la fois important et marginal en mathématiques, c'est le mot "représentation". Il est le plus souvent employé sous sa forme verbale, “représenter". Une écriture, une notation, un symbole représentent un objet mathématique: un nombre, une fonction, un vecteur, ... De même les tracés et les figures représentent des objets mathématiques: un segment, un point, un cercle,... Cela veut dire que les objets mathématiques ne doivent jamais être confondus avec la représentation qui en est faite. En effet, toute confusion entraîne, à plus ou moins long terme, une perte de compréhension et les connaissances acquises deviennent vite inutilisables hors de leur contexte d'apprentissage: soit par non-rappel soit parce qu'elles restent des représentations "inertes" ne suggérant aucun traitement. La distinction entre un objet et sa représentation est donc un point stratégique pour la compréhension des mathématiques. Et ce point est si impor-

© Annales de Didactique et de Sciences Cognitives
5 (1993) (p.37-65) - IREM de Strasbourg

tant qu' un des auteurs les plus sérieux de manuel n'a pas hésité à faire de cette distinction le thème récurrent de son ouvrage pour les élèves de quatrième: c'est l'objet représenté qui importe et non pas ses diverses représentations sémiotiques possibles (Deledicq & Lassave1979).

Néanmoins, les diverses représentations sémiotiques d'un objet mathématique sont absolument nécessaires. En effet, les objets mathématiques ne sont pas directement accessibles dans la perception, ou dans une expérience intuitive immédiate, comme le sont les objets communément dit "réels" ou "physiques"! Il faut donc pouvoir en donner des représentants. Et, en outre, la possibilité d'effectuer des traitements sur les objets mathématiques dépend directement du système de représentation sémiotique utilisé. Il suffit de considérer le cas du calcul numérique pour s'en convaincre: les procédures, et leur coût, dépendent du système d'écriture choisi. Les représentations sémiotiques jouent un rôle fondamental dans l'activité mathématique.
Nous sommes donc en présence de ce qu'on pourrait appeler le paradoxe cognitif de la pensée mathématique: d'une part, l'appréhension des objets mathématiques ne peut être qu'une appréhension conceptuelle et, d'autre part, c'est seulement par le moyen de représentations sémiotiques qu'une activité sur des objets mathématiques est possible. Ce paradoxe peut constituer un véritable cercle pour l'apprentissage. Comment des sujets en phase d'apprentissage pourraient-ils ne pas confondre les objets mathématiques avec leurs représentations sémiotiques s'ils ne peuvent avoir affaire qu'aux seules représentations sémiotiques? L'impossibilité d'un accès direct aux objets mathématiques, en dehors de toute représentation sémiotique rend la confusion presqu'inévitable. Et, à l'inverse, comment peuvent-ils acquérir la maîtrise des traitements mathématiques nécessairement liés aux représentations sémiotiques s'ils n'ont pas déjà une appréhension conceptuelle des objets représentés? Ce paradoxe est d'autant plus fort que l'on identifie activité mathématique et activité conceptuelle et que l'on considère les représentations sémiotiques comme secondaires ou extrinsèques.

On ne prête guère d'attention à ce paradoxe cognitif de la pensée mathématique dans l'enseignement, tout simplement parce qu'on accorde beaucoup plus d'importance aux représentations mentales qu'aux représentations sémiotiques. Les représentations **mentales** recouvrent l'ensemble des images et, plus globalement, des conceptions qu'un individu peut avoir sur un objet, sur une situation, et sur ce qui leur est associé. Les représentations **sémiotiques** sont des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiance et de fonctionnement. Une figure géométrique, un énoncé en langue naturelle, une formule algébrique, un graphe sont des représentations sémiotiques qui relèvent de systèmes sémiotiques différents. On considère généralement les représentations sémiotiques comme un simple moyen d' extériorisation des représentations mentales pour des fins de communication, c'est à dire pour les rendre visibles ou accessibles à autrui. Or ce point de vue est trompeur. Les représentations ne sont pas seulement nécessaires pour des fins de communication, elles sont également essentielles pour l'activité cognitive de la pensée. En effet, elles jouent un rôle primordial dans:

— le développement des représentations mentales: celui-ci dépend d'une intériorisation des représentations sémiotiques, au même titre que les images mentales sont une intériorisation des percepts (Vygotsky 1962, Piaget 1968),

— l'accomplissement de différentes fonctions cognitives: la fonction d'objectivation (expression privée) qui est indépendante de celle de communication (expression pour autrui), et la fonction de traitement qui ne peut pas être remplie par les représentations mentales (certaines activités de traitement sont directement liées à l'utilisation de systèmes sémiotiques, par exemple le calcul) ,

— la production des connaissances: les représentations sémiotiques permettent des représentations radicalement différentes d'un même objet dans la mesure où elles peuvent relever de systèmes sémiotiques totalement différents (Benveniste 1974, Bresson 1987). Ainsi le développement des sciences est lié à une développement de systèmes sémiotiques de plus en plus spécifiques et indépendants du langage naturel (Granger 1979).

On ne peut donc pas faire comme si les représentations sémiotiques étaient simplement subordonnées aux représentations mentales, puisque que le développement des secondes dépend d'une intériorisation des premières et que seules les représentations sémiotiques permettent de remplir certaines fonctions cognitives essentielles, comme celle de traitement. Le fonctionnement cognitif de la pensée humaine se révèle inséparable de l'existence d'une diversité de registres sémiotiques de représentation. Si on appelle **sémiosis**[1] l'appréhension, ou la production, d'une représentation sémiotique, et **noésis**[2] l'appréhension conceptuelle

---

1 σημειον: signe, marque distinctive. σημειωσις: action de marquer d'un signe. Kristeva emploie ce terme pour désigner les production liées à des pratiques signifiantes (art. Sémiologie dans l'Encyclopédia Universalis). De même U. Eco dans Sémiologie et Philosophie du langage (1988).

2 νοησις: intellection. Platon emploie ce terme pour évoquer les choses qui sont propres à éveiller *l'acte de* d'un objet, il faut affirmer que la *noésis* est inséparable de la *sémiosis*.

Le paradoxe cognitif de la pensée mathématique et les difficultés qui en résultent pour son apprentissage tiennent au fait qu'**il n'y a pas de *noésis* sans *sémiosis*** alors qu'on veut enseigner les mathématiques comme si la *sémiosis* était une opération négligeable par rapport à la *noésis*. Pourtant il est essentiel, dans l'activité mathématique, soit de pouvoir mobiliser plusieurs registres de représentation sémiotique(figures, graphes, écriture symbolique, langue naturelle, etc....) au cours d'une même démarche, soit de pouvoir choisir un registre plutôt que l'autre. Et, indépendamment de toute commodité de traitement, *ce recours à plusieurs registres semble même une condition nécessaire pour que les objets mathématiques ne soient pas confondus avec leurs représentations et qu'ils puissent aussi être reconnus dans chacune de leurs représentations.* La coordination de plusieurs registres de représentation sémiotique apparaît fondamentale pour une appréhension conceptuelle des objets: il faut que l'objet ne soit pas confondu avec ses représentations et qu'il soit reconnu dans chacune de ses représentations possibles. C'est à ces deux conditions qu'une représentation fonctionne véritablement comme représentation c'est-à-dire qu'elle donne accès à l'objet représenté.

C'est cette liaison forte entre *sémiosis* et *noésis* dans le fonctionnement cognitif de la pensée que nous allons tenter de mettre en évidence. L'apprentissage des mathématiques en constitue un champ privilégié d'étude.
Pour cela, nous examinerons successivement : les différentes activités cognitives constitutives de la *sémiosis*, les raisons pour lesquelles l'appréhension conceptuelle implique la coordination de plusieurs registres de représentation et, enfin, les conditions requises pour favoriser cette coordination et pour organiser un enseignement qui prenne en compte cette liaison forte entre *sémiosis* et *noésis*.

---

concevoir par la pensée. Il ne doit pas être confondu avec διανοια, traduit par "pensée" (République, VII 524 d5, 523d9-e9, 523b1). Aristote l'emploie également pour désigner l'acte de compréhension conceptuelle (Περι ψυχηςIII, 427b17, 430a26: "l'intellection des indivisibles (des notions simples et premières) se rapporte à tout ce qui exclut le risque d'erreur". Il a été transcrit en "noèse" par Husserl pour désigner les pensées et les vécus intentionnels (Idées directrices pour une Phénoménologie)
Nous évitons ici à dessein le termes de "compréhension" parce qu'il peut recouvrir soit l'une ou l'autre des deux formes d'appréhension (*σημειωσις,νοησις)* soit leur fusion Nous éviterons aussi celui d' "abstraction", parce toute sémiosis peut être considérée comme une abstraction au même titre que la noésis. Par certains aspects celui de "conceptualisation" pourrait être accepté. Mais son acception dominante est davantage liée la formation et à l'acquisation d'un concept qu'à sa mobilisation active dans une démarche de pensée.

I. Sémiosis et registres de représentation.

Pour qu'un système sémiotique puisse être un registre de représentation, il doit permettre les **trois activités cognitives fondamentales liées à la sémiosis.**

1. **La formation d'une représentation identifiable** comme une représentation d'un registre donné: énonciation d'une phrase (compréhensible dans une langue naturelle donnée), composition d'un texte, dessin d'un figure géométrique, élaboration d'un schéma, écriture d'une formule....
Cette formation implique une *sélection* de traits et de données dans le contenu à représenter. Cette sélection se fait en fonction des unités et des règles de formation qui sont propres au registre sémiotique dans lequel la représentation est produite. A ce titre la formation d'une représentation pourrait être comparée à l'accomplissement d'une tâche de description.
Cette formation doit respecter des règles (grammaire pour les langues naturelles, règles de formation dans un système formel, contraintes de construction pour les figures ...)[1]. La fonction de ces règles est d'assurer, en premier lieu, les conditions d'identification et de reconnaissance de la représentation et, en second lieu, la possibilité de leur utilisation pour des traitements. *Ce sont des règles de conformité, ce ne sont pas des règles de production effective par un sujet.* Cela veut dire que la connaissance des règles de conformité n'implique pas la compétence pour former des représentations, mais seulement celle pour les reconnaître.

2. **Le traitement** d'une représentation est la **transformation** de cette représentation **dans le registre même où elle a été formée.** Le traitement est une transformation interne à un registre.
La *paraphrase* et l'*inférence* sont des formes de traitement en langue naturelle. Le *calcul* est une forme de traitement propre aux écritures symboliques (calcul numérique, calcul algébrique, calcul propositionnel...). La *reconfiguration* est un type de traitement particulier pour les figures géométriques : c'est l'une des nombreuse opérations qui donne au registre des figures son rôle heuristique. L'*anamorphose* est une forme de traitement qui s'applique à toute

[1] Les réponses requises par les questionnaires Q.C.M. ne requièrent pas d'activité de formation de représentation hormis celle du pointage d'un choix binaire. (faire une croix, écrire "oui" ou "non", mettre un "1" ou un "0").

représentation figurale...

Il y a naturellement des règles de traitement propres à chaque registre. Leur nature et leur nombre varie considérablement d'un registre à l'autre : règles de dérivation, règles de cohérence thématique, règles associatives de contiguïté et de similitude... Dans le registre de la langue naturelle, il y a paradoxalement un nombre élevé de règles de conformité et peu de règles de traitement pour l'expansion discursive d'un énoncé complet.

3. **La conversion** d'une représentation est la **transformation** de cette représentation en une représentation d'**un autre registre** en conservant la totalité ou une partie seulement du contenu de la représentation initiale. La conversion est une transformation externe au registre de départ(le registre de la représentation à convertir). L'*illustration* est la conversion d'une représentation linguistique en une représentation figurale. La *traduction* est la conversion d'une représentation linguistique dans une langue donnée en un représentation linguistique d'une autre langue ou d'un autre type de langage. La *description* est la conversion d'une représentation non verbale (schéma, figure, graphe) en une représentation linguistique. (Il importe à ce propos de ne pas confondre cette situation avec la description d'un objet ou d'une situation qui ne sont pas encore sémiotiquement représentés : la sélection des traits n'y obéit pas aux mêmes contraintes).

La conversion est une activité cognitive différente et indépendante de celle de traitement. Cela peut facilement être observé sur une situation très simple: le calcul numérique. Des élèves peuvent très bien effectuer l'addition de deux nombres avec leur écriture décimale et avec leur écriture fractionnaire, et ne pas du tout penser à convertir, si cela s'avère nécessaire l'écriture décimale d'un nombre en son écriture fractionnaire (et réciproquement), ou même échouer pour cette conversion. C'est très souvent ce type d'exemple qui est avancé, pour expliquer que des élèves arrivent en seconde et ne savent pas calculer ! C'est oublier que l'écriture décimale, l'écriture fractionnaire et l'écriture avec exposant constituent trois registres différents de représentation des nombres. La conversion requiert que l'on ait perçu la différence entre ce que Frege appelait le sens et la référence des symboles ou des signes. Pour l'écriture d'un nombre il faut, en effet, distinguer **la signification opératoire attaché au signifiant** en vertu des règles du système d'écriture (cette signification opératoire n'est pas la même pour 0, 25 pour 1/4, et pour 25.10^{-2} car *ce ne sont pas les mêmes traitements qui doivent être mis en oeuvre pour effectuer les additions* $0,25 + 0,25 = 0,5$ $1/4 + 1/4 = 1/2$ et $25.10^{-2} + 25.10^{-2} = 50.10^{-2}$) **et le nombre représenté qui n'est ni le signifiant 0, 25 ni le**

signifiant 1/4 ni le signifiant 25 x10^{-2}. Chacune de ces trois écritures a une signification opératoire différente mais elle représente le même nombre.

La conversion ne doit pas être confondue avec deux activités qui en sont cependant proches : le codage et l' interprétation.
Ce qu'on appelle généralement "*interprétation* " requiert un changement de cadre théorique, ou un changement de contexte. Ce changement n'implique pas de changement de registre, mais il mobilise souvent des analogies.
Le "*codage*" est la "transcription" d'une représentation dans un autre système sémiotique que celui où elle est donnée. Cette transcription est effectuée "au moyen d'une série de substitutions" en appliquant des règles de correspondance ou en utilisant des listes de subsitutions préalablement établies (Eco 1988, p.249-252). Ces substitutions sont effectuées directement sur les signifiants composant la représentation, sans prendre en compte l'organisation de la représentation ni ce qu'elle représente.
Bien que l'activité cognitive de conversion d'une représentation puisse souvent paraître être étroitement liée à une interprétation ou à un codage, elle leur est irréductible, parce que d'une part elle ne se fonde sur aucune analogie comme dans le cas de l'interprétation et que, d'autre part, la conversion ne peut être obtenue par l'application de règles de codage. Il n'existe et il ne peut exister de règles de conversion comme il existe des règles de conformité et des règles de traitement.
Pour illustrer ce point prenons un exemple de conversion de représentation qui peut ressembler à un codage : celui entre l'écriture algébrique d'une relation (colonne II de la fig.1 ci-dessous) et sa représentation graphique cartésienne (colonne III de la fig. 1)

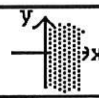
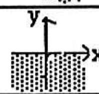
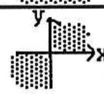
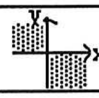
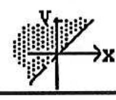
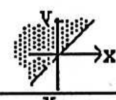
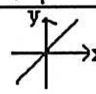
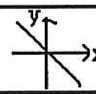
I	II	III	I → III : *hachurer*	III→ II : *choisir l'expressi on*
1...l'ensemble des points qui ont une abscisse positive	x > 0		67%	51%
2.............................qui ont une ordonnée négative	y < 0		67%	61%
3..................dont l'abscisse et et l'ordonnée sont de même signe	xy ≥ 0		56%	25%
4.	xy ≤ 0			.23 %
5.............dont l'ordonnée est supérieure à l'abscisse (*la droite y=x étant déjà tracée sur le graphique*)	y > x		38%	38%
6.............dont l'ordonnée est supérieure à l'abscisse (*la droite y=x n'étant pas déjà tracée sur le graphiqu*	y > x		19%	25%
7................dont l'ordonnée est égale à l'abscisse	y =x		60%	75%
8...............dont l'ordonnée est l'opposée de l'abscisse	y = - x		34%	58%

Fig.1. Résultats obtenus avec 105 élèves de seconde (Duval 1988c, p. 247-249). Pour la converion III → II , il y avait seulement à choisir parmi plusieurs expressions celle qui correspondait au graphique hachuré : y=x, y>x, x>0, y=-x, xy≤ 0,... Pour une enquête faite à l'échelle de tous les élèves de seconde d'un établissement voit Lefort & alii 1990.

Cet exemple est intéressant parce que le système sémiotique de représentation graphique permet de définir une règle de codage : à un point correspond un couple de nombres. Donc n'importe quel couple de nombres code un point du plan ainsi repéré.

Or cette règle de codage n'est pas suffisante pour changer de registre, pour passer, par exemple, de l'écriture algébrique d'une relation ($y = x$, $y = x^2$) à la représentation graphique correspondante. Elle permet de marquer autant de points que l'on veut mais non pas de tracer le **trait continu** d'une droite ou d'une parabole[1]. Pour cela il faut interpoler et accepter la pertinence de la loi gestaltiste de contiguïté.

L'irréductibilité devient flagrante dans la conversion inverse, celle de la représentation graphique vers l'écriture algébrique (hormis le cas de la simple lecture de points du graphique). Cette conversion exige que les unités signifiantes propres à chaque registre soient bien discriminées. En d'autres termes, il faut bien identifier, dans le registre graphique, les variables visuelles pertinentes avec leurs différentes valeurs et, dans l'écriture algébrique d'une relation, les différentes oppositions paradigmatiques qui donnent une signification, et pas seulement un objet, aux symboles utilisés (les tableaux de la fig. 2 ci-dessous).

La règle de codage ne permet donc que deux choses : soit la lecture d'un couple de nombres sur le graphique à partir d'un point désigné, soit la désignation d'un point à partir d'un couple de nombres. La répétition de ces deux opérations élémentaires n'est pas suffisante pour la conversion des représentations entre les deux registres. Les résultats enregistrés en seconde même après un enseignement des fonctions affines et un travail sur différents registres sont impressionnants : moins des deux tiers des élèves réussissent à reconnaître $y=x$ et $y=-x$ dans les deux représentations graphiques correspondantes et moins d'un tiers à reconnaître $y=2x$ et $y=x+2$ (Duval, 1988, ; Lefort & alii,1990)

[1] Il existe des élèves qui appliquent parfaitement la règle de codage mais qui refusent de relier tous les points obtenus par un trait continu pour faire apparaître une droite ou une parabole.

Variables visuelles	Valeurs de la var. visuelle	Unités symboliques	correspondantes
implantation de la tache	**zone** (dimension2) **trait** (dimension1)	(symbole de la **relation**)	<, >,.... =
forme de la tache en dimension 1	trait **courbe** *trait droit*	(**exposant** de la variable)	>1, <1 =1

Variables visuelles	Valeurs	Unités symboliques	correspondantes
sens d'inclinaison pour trait droit (ancrage : sens linéaire d'écriture)	*montant* *descendant*	(coefficient de la variable)	> 0 < 0 (symb. —)
angle avec les axes (ancrage : axe hori.)	partage symétrique angle plus petit angle plus grand	coeffic de var. =1 coeffi. <1 coeffi >1	pas de val. num. val. numé. valeur numé.
position sur l'axe y (ancrage : origine)	coupe au dessus coupe au dessous coupe à l' origine	on ajoute une const. on soustr. une const pas de correction ad.	signe + signe — pas de symb.

sens d'inclinaison	angle avec les axes	position sur l'axe y	exemple d'écriture
trait montant	partage symétrique	coupe à l'origine coupe au dessus coupe au dessous	y = x (y = +1 x) y = x +1 y = x -1
	angle plus grand	coupe à l'origine coupe au dessus coupe au dessous	y = 2 x y = 2 x + 1 y = 2 x - 1
	angle plus petit	coupe à l'origine coupe au dessus coupe au dessous	y = 1/2 x y = 1/2 x + 1 y = 1/2 x - 1
trait descendant	....	....	y = - ....

Fig. 2. Le deuxième tableau présente les variations pour un des cas de figure du premier tableau: celui du trait droit. Le troisième tableau explicite les cas de figures correspondant aux variations décrites dans le second uniquement pour le trait droit montant. On voit que pour les droites non parallèles aux axes il y a seulement 18

représentations graphiques qui soient visuellement différentes de façon significative. Dans le cas de parallélisme à l'un des deux axes, il y a disparition de la variable référant à cet axe.

Des trois activités cognitives liées à la sémiosis, seules les deux premières, celle de formation et celle de traitement, sont prises en compte dans l'enseignement, qu'il s'agisse de l'organisation de séquences d'apprentissage ou de la construction de questionnaires d'évaluation.

On considère généralement que

— la conversion des représentations irait de soi dès que l'on est capable de former des représentations dans des registres différents et d'effectuer des traitements sur les représentations, par exemple construire un graphique ou écrire une équation et y substituer des valeurs numériques aux variables.

— que la conversion n'a aucune importance réelle pour la compréhension des objets ou des contenus conceptuels représentés, puisque son résultat se limite à un changement de registre.

Ce point de vue est justifié dès qu'une certaine "autonomie" est atteinte en ce qui concerne l'activité mathématique. Mais il conduit à masquer le caractère fondamental de cette activité pour la noésis, et d'une façon plus générale pour la compréhension. Et, surtout, il néglige le fait qu'en phase d'apprentissage, la conversion joue un rôle essentiel dans la conceptualisation. Pour mieux le percevoir, examinons ce que recouvre la diversité des registres de représentation.

II. Noésis et coordination des registres de représentation

A quoi correspond l'existence de plusieurs registres de représentations et quel est l'intérêt de leur coordination pour le fonctionnement de la pensée humaine ?

Avant d'examiner les différentes réponses possibles à cette question, il n'est pas inutile de rappeler deux données qui montrent le caractère fondamental de la liaison *noésis /sémiosis.*
1. L'utilisation de plusieurs registres de représentation semble caractéristique de la pensée humaine si on la compare à l'intelligence animale, d'une part, et à l'intelligence artificielle, d'autre part.
Ce qui caractérise le fonctionnement de la pensée humaine par rapport à l'intelligence animale n'est pas tant le recours à un système sémiotique pour communiquer (un langage) que le recours à plusieurs systèmes de représentation : langage et image graphique (dessin, peinture, pictogramme..). Et en ce qui concerne l'intelligence artificielle on a souligné qu'une de ses limites est la difficulté "à dépasser la rigidité fonctionnelle qu'entraîne la spécialisation du mode de représentation" (Leiser, 1987, p.1869). La spécialisation du mode de représentation recouvre la réduction à un seul système sémiotique, celui de l'écriture booléenne.
2. Le progrès des connaissances s'accompagne toujours de la création et du développement de systèmes sémiotiques nouveaux et spécifiques, qui coexistent plus ou moins avec le premier d'entre eux, celui de la langue naturelle (Granger 1979).

Deux réponses sont généralement proposées pour expliquer cette nécessité de fait d'une diversité de registres dans le fonctionnement de la pensée humaine. Elles sont centrées sur les coûts de traitement et sur les limitations représentatives spécifiques à chaque registre. Nous en proposerons une troisième centrée sur la condition nécessaire d'une différentiation entre représentant et représenté.
Il va de soi que ces réponses ne s'excluent pas. *Mais il est important de voir qu'elles se situent à des niveaux de description différents de l'activité cognitive.* La première réponse, centrée sur les coûts de traitement, s'en tient à une description de surface. Elle se réfère au fonctionnement de chaque registre tel qu'il est consciemment vécu dans le traitement des représentations. La seconde réponse, plus sémiotique, suppose une comparaison de différents modes de représentation d'un même objet. Cette comparaison requiert une analyse des aspects qui sont pris en compte et de ceux qui ne le sont pas dans chaque registre. La troisième réponse est moins immédiatement accessible. Elle suppose une approche développementale de

l'activité cognitive dans les disciplines où le recours à une pluralité de registres est fondamental. Elle suppose en outre que l'on substitue, dans l'étude des acquisitions, des critères de "maturité" (rapidité de traitement, spontanéité des conversions, puissance des transferts) à de simples critères de "réussite" (obtention de la "bonne" réponse).

*Première réponse : **l'économie de traitement***

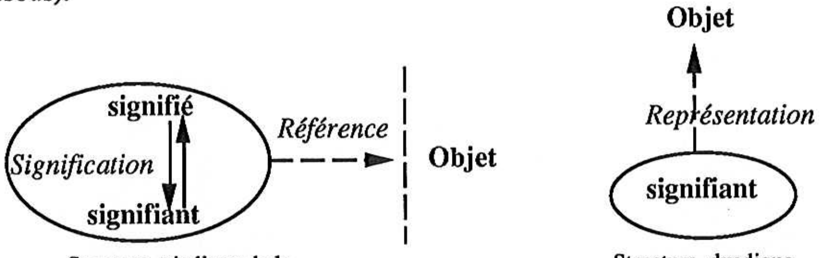
L'existence de plusieurs registres permet de changer de registre, et ce changement de registre a pour but de permettre d'effectuer des traitements d'une façon plus économique et plus puissante. Il semble que cette réponse ait été explicitement exposée pour la première fois par Condillac dans *Le Langage des Calculs* à propos de l'écriture des nombres et des notations algébriques. Elle montre, en termes de coût en mémoire, les limites très vite atteintes dans le registre de la langue naturelle pour les traitements de type calcul. Une telle réponse peut évidemment être étendue à d'autres traitements : les relations entre des objets peuvent être représentés de façon plus rapide, et plus simple à comprendre, par des formules littérales que par des phrases, comme c'est le cas par exemple pour les énoncés du livre V des *Elements* sur les proportions (Euclide). On en trouvera une illustration plus récente dans un manuel de renom proposé à des élèves de quatrième. Un tableau y expose de façon synoptique trois présentations différentes d'une même égalité: une phrase, une écriture littérale et un schéma. Ce tableau est assorti du commentaire suivant: "Avec un peu d'habitude (et tu commences à en avoir), il est plus facile de "comprendre" une écriture littérale qu'une phrase décrivant un calcul en français. Souvent un schéma décrivant un calcul est intéressant, mais d'autre part il prend plus de place qu'une écriture littérale et d'autre part il ne se "transforme" pas facilement. quel langage préfères-tu?" (Deledicq & Lassave1979, p.80). D'une façon plus générale, en mathématique, l'économie de traitement (perceptif ou algorithmique) est généralement avancée à l'encontre de la langue naturelle. La méfiance latente à l'égard de la langue naturelle en mathématique trouve là son origine véritable.

*Deuxième réponse: **la complémentarité des registres***

Cette réponse qui est davantage centrée sur les possibilités propres à chaque système sémiotique a été avancée plus récemment (Bresson, 1987) On peut la formuler ainsi : la nature du registre sémiotique qui est choisi pour représenter un contenu (objet, concept ou situation) impose une sélection des éléments significatifs ou informationnels du contenu que l'on représente. Cette sélection se fait en fonction des possibilités et des contraintes sémiotiques du registre choisi. Un langage n'offre pas les mêmes possibilités de représentation qu'une figure ou qu'un diagramme. Cela veut dire que *toute représentation est cognitivement*

partielle par rapport à ce qu'elle représente et que d'un registre à un autre ce ne sont pas les mêmes aspects du contenu d'une situation qui sont représentés.
Ainsi, les figures, et de façon plus générale toutes les représentations analogiques, ne peuvent représenter que des états, des configurations, ou des produits d'opérations ; elles ne peuvent pas représenter des actions ou des transformations (Bresson, *ibid.* p.943). Pour représenter des opérations il faut un registre qui ait les propriétés d'un langage: langue naturelle ou algèbre (Bresson, *ibid.* p.939). En revanche les figures permettent de représenter la totalité des relations entre les éléments constituant un objet ou une situation (Larkin & Simon, 1987).

Troisième réponse: la conceptualisation implique une coordination de registres de représentation.
Il y a une idée qui est généralement admise. On peut la formuler de la façon suivante :
Hypothèse 1: si le registre de représentation est bien choisi, les représentations de ce registre sont suffisantes pour permettre la compréhension du contenu conceptuel représenté.
Cette hypothèse semble d'ailleurs justifiée par la structure même de la représentation telle qu'on la présente habituellement en fonction de la structure de la signifiance des signes (Fig.3 ci-dessous).



Structure triadique de la signifiance des signes

Structure dyadique de la signifiance des signes

Fig.3. Structure de la signifiance des signes. Sur ce schéma les différents éléments constitutifs de la signifiance des signes sont en caractères gras, et les relations entre ces éléments sont en italiques.
On peut y voir l' opposition entre deux types de signes. Ceux de structure triadique, comme les signes linguistiques ou même les figures. Pour ce type de signe, la relation de référence présente deux caractéristiques. D'une part la relation à un objet dépend d'une relation de signification, cette dernière étant déterminée par le système de la langue (Saussure 1973, p.159,163) ou par les lois de la perception visuelle. D'autre part la relation à l'objet *est une possibilité qui n'est assurée qu'au plan du discours* (Benveniste 1966, p.129-131; 1974, p.64-66) ou plan de l'interprétation pour les figures. Les signes de structure dyadique, telles certaines notations mathématiques (notations de fonctions, de vecteurs, d'opérateurs..), n'ont pas de signification et sont constitués par une relation instituée à un objet. Généralement ces deux structures de la signifiance ne sont pas distinguées.

Mais qu'on les distingue ou non, *on ne doute pas que l'emploi de signes ou de représentations d'un seul registre soit suffisant pour que leur signifiance fonctionne cognitivement chez les sujets en situation d'apprentissage.* Autrement dit la signifiance est postulée comme étant d'emblée trans-registre. D'où les opérations de conversion de représentation d'un registre à un autre semblent évidentes et négligeables par rapport aux opérations de formation ou traitement des représentations.

L'opinion selon laquelle l'activité de conversion ne peut pas soulever de difficultés majeures découle directement de cette hypothèse 1 et de la conception que l'on se fait de la structure de la représentation..

Cette hypothèse semble suffisante si l'on se réfère à des sujets ayant une bonne maîtrise de l'activité mathématique (les chercheurs en mathématiques ou les enseignants, par exemple). Elle n'est plus suffisante si l'on se réfère à des sujets en cours d'apprentissage (les élèves de collège ou de Lycée). Elle ne permet pas d'imaginer que la conversion des représentations d'un registre à un autre puisse être une source importante de difficultés ou d'échecs. Dans le cadre d'une telle hypothèse, souvent admise comme une évidence, les difficultés et les échecs observés ne peuvent relever que de la *noésis* et non de la *sémiosis.*

<u>Hypothèse2</u>: La compréhension (intégrative) d'un contenu conceptuel repose sur la coordination d'au moins deux registres de représentation, et cette coordination se manifeste par la rapidité et la spontanéité de l'activité cognitive de conversion.

Cette hypothèse appelle une autre description de la structure des représentations sémiotiques et de leur fonctionnement (Fig.5, ci-dessous).

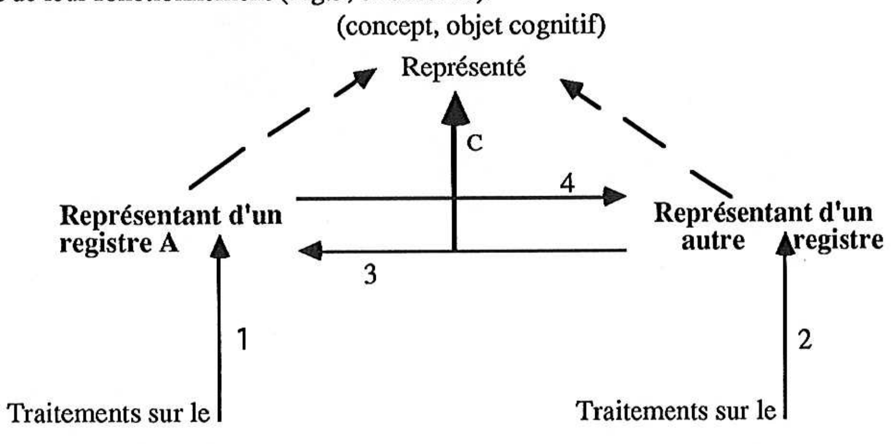


Fig.4. Structure de la Représentation en fonction de conceptualisation. Les flèches 1 et 2 correspondent aux transformations internes à un registre. Les flèches 3 et 4 correspondent aux transformations externes, c'est-à-dire à des conversions par changement de registre. La flèche C correspond à ce que nous appellerons la

compréhension intégrative d'une représentation : elle suppose une coordination des deux registres. Les flèches en pointillé correspondent à la distinction classique entre représentant et représenté. Naturellement ce schéma envisage le cas le plus simple de la coordination entre deux registres: dans certains domaines, comme l'algèbre linéaire, une coordination entre trois registres au moins peut être requise. *On peut voir également une des possibilités importantes de la structure de la représentation* : **le représentant d'un registre peut être considéré comme le représenté d'un autre registre,** comme c'est le cas dans la relation entre texte et image. Enfin il n'y a pas de flèches entre les traitements propres à chaque registre. Cela n'exclut pas les cas de congruence ou d' "équivalence computationnelle", mais l'intérêt des changements de registre tient au fait que chaque registre a des traitements qui lui sont propres.

Cette coordination est loin d'être naturelle. Et elle ne semble pas pouvoir se réaliser dans le cadre d'un enseignement principalement déterminé par les contenus conceptuels. On peut observer à tous les niveaux un **cloisonnement des registres de représentation** chez la très grande majorité des élèves. Ceux-ci ne reconnaissent pas le même objet à travers des représentations qui en sont donnés dans des systèmes sémiotiques différents: l'écriture algébrique d'une relation et sa représentation graphique (voir par exemple plus haut p. Fig.1), l'écriture numérique d'un rapport et sa représentation géométrique sur une droite ou dans le plan (Lémonidis, 1990), l'énoncé d'une formule en français et l'écriture de cette formule sous forme littérale, la description d'une situation et sa mise en équation,.... Ce cloisonnement subsiste même après un enseignement sur des contenus mathématiques ayant largement utilisé ces différents registres.
Naturellement, l'absence de coordination n'empêche pas toute compréhension. Mais cette compréhension, limitée au contexte sémiotique d'un seul registre, ne favorise guère les transferts et les apprentissages ultérieurs : elle rend les connaissances acquises peu ou pas mobilisables dans toutes les situations où elles devraient réellement être utilisées. En définitive, cette compréhension mono-registre conduit à un travail à l'aveugle, sans possibilité de contrôle du "sens" de ce qui est fait.
La coordination des images (mentales) et du langage naturel dans son emploi courant, qui a été étudiée par certains psychologues (Paivo,1986) n'est pas davantage suffisante pour assurer la coordination des multiples registres sémiotiques de représentation mobilisés en mathématiques comme dans d'autres disciplines.

Plusieurs raisons peuvent expliquer l'ampleur et la profondeur de ce phénomène de cloisonnement des registres de représentation. Nous n'en mentionnerons qu'une, celle qui est

inhérente à la variété hétérogène des registres: la **non-congruence.** Lorsqu'il y a congruence[1] entre la représentation de départ et la représentation d'arrivée, la conversion est triviale et pourrait presque être considérée, intuitivement, comme un simple codage. Mais lorsqu'il n'y a pas congruence non seulement la conversion devient coûteuse en temps de traitement mais elle peut créer un problème devant lequel le sujet sent désarmé. Alors, la possibilité d'une conversion ne vient même plus à l'esprit.
Il n'y a aucune règle qui puisse déterminer a priori tous les cas de non-congruence entre les représentations de deux registres déterminés. Les obstacles liés au phénomène de non congruence ne sont pas des difficultés conceptuelles.

La coordination de plusieurs registres (Hypothèse 2 et Fig.5) est donc une condition absolument nécessaire pour que le schéma dyadique de la représentation habituellement admis (fig.4 et hypothèse 1) corresponde à un fonctionnement cognitif effectif chez un sujet, et pour que, en surface, le recours à un seul registre de représentation apparaisse suffisant. Or de nombreuses observations, aux différents niveaux de la scolarité, montrent qu'elle ne se s'effectue pas spontanément chez la plupart des sujets et qu'on ne peut espérer en favoriser la mise en place par un enseignement qui méconnaît la liaison forte existant entre *noésis* et *sémiosis*.

---

1 Les trois critères de congruence sont:
— la possibilité d'une correspondance "sémantique" des éléments signifiants : à chaque unité signifiante simple de l'une des représentations, on peut associer une unité signifiante élémentaire.
— l'univocité "sémantique" terminale: à chaque unité signifiante élémentaire de la représentation de départ, il ne correspond qu'une seule unité signifiante élémentaire dans le registre de la représentation d'arrivée.
— l'organisation des unités signifiantes : les organisations respectives des unités signifiantes des deux représentations comparées conduit à y appréhender les unités en correspondance sémantique selon le même ordre dans les deux représentations. Ce critère de correspondance dans l'ordre dans l'arrangement des unités qui composent chacune des deux représentations n'est pertinent que lorsque celles-ci présentent le même nombre de dimension.
Ces trois critères permettent de déterminer le caractère congruent ou non congruent de la conversion à effectuer entre deux représentations qui sont sémiotiquement différentes et qui représentent au moins partiellement le même contenu. Ils permettent également de déterminer un degré de non congruence. (Duval, 1993)

III. Les conditions d'un apprentissage prenant en compte la sémiosis

Si la conceptualisation implique une coordination de registres de représentation, le principal enjeu des apprentissages de base en mathématique ne peut pas seulement être l'automatisation de certains traitements ou la compréhension de notions mais il doit aussi être la coordination des différents registres de représentation nécessairement mobilisés pour ces traitements ou pour cette compréhension. La coordination des registres apparaît comme la condition fondamentale pour tous les apprentissages de base, du moins dans les domaines où les seules données sont des représentations sémiotiques : les mathématiques et le français.

En fait, l'enseignement des mathématiques est généralement organisé comme si la coordination des différents registres de représentations introduits ou utilisés s'effectuait rapidement et spontanément, comme si les problèmes et les coûts liés à la non-congruence n'existaient pas. Car ce qui, en définitive, semble important ce n'est pas le changement de registre à effectuer, mais les traitements qui pourront être effectués sur la représentation obtenue après changement de registre ! La coordination des registres de représentation ne semble donc pas devoir s'imposer comme l'un des objectifs principaux de l'enseignement, de 6ème jusqu'en seconde. Il suffit de regarder comment sont introduits de nouveaux registres: représentations graphiques, figures géométriques, écriture symbolique du calcul des prédicats (quantificateurs) pour constater l'absence d'un tel objectif. On s'en tient à quelques correspondances locales, le plus souvent pour des cas de congruence, et à des règles d'emploi ou de conformité.

Il est évident que cette absence de prise en compte de la coordination des registres n'est pas un hasard ou une négligence. La quasi absence de règles pouvant favoriser l'activité cognitive de conversion pourrait suffire à l'expliquer. En outre, il n'est pas certain que proposer des exercices locaux de conversion permette de favoriser cette coordination, laquelle semble liée à une prise de conscience et à une objectivation plus globales que ce que permet le travail sur chaque représentation particulière. Un apprentissage prenant en compte le lien étroit qui existe entre la noésis et la sémiosis doit donc placer les élèves dans des conditions qui permettent cette prise de conscience plus globale, et pour cela leur présenter des tâches spécifiques.
Dans cette perspective, trois types de tâches extrêmement différents semblent s'imposer. Nous

nous contenterons ici d'une caractérisation très brève. Le premier type concerne l'appréhension des représentations sémiotiques, le second l'apprentissage des traitements propres à une certaine catégorie de registres, le troisième le mode de production des représentations complexes

A) Des tâches de variations comparatives relatives à la signifiance des représentations

L'appréhension des représentations sémiotiques suppose la **discrimination des unités signifiantes** dans le registre même où la représentation est produite. Le seul moyen de faire discriminer les unités signifiantes d'une représentation est de faire réaliser l'**observation**, d'une part, de **variations de représentation, systématiquement effectuées dans un registre** et, d'autre part, des **variations concomitantes de représentation dans un autre registre.**
Cela veut dire que la discrimination des unités signifiantes constituant une représentation dans un registre est étroitement liée à l'activité cognitive de conversion. Çela veut dire également que la conversion d'une représentation n'est pas séparable de la perception des variations propres au registre de départ et au registre d'arrivée. Naturellement, en faisant varier systématiquement une représentation, on en change le contenu représenté: le choix, parmi plusieurs représentations possibles dans le registre d'arrivée, de celle qui correspond à la représentation modifiée dans le registre de départ permet ainsi d'identifier les variations des unités signifiantes dans chaque registre de représentation.
Cela suppose évidemment que l'on ait préalablement identifié tous les facteurs de variation pertinente d'une représentation dans un registre. Sans cela on ne peut pas proposer une situation de variation systématique. Concrètement, pour pouvoir proposer de telles tâches de variation comparative, il faut, au préalable disposer d'analyses comme celles qui ont été présentées plus haut dans les trois tableaux de la fig. 2 . C'est seulement sur la base de telles analyses que l'on peut élaborer de telles tâches et que l'on peut également construire une évaluation adéquate des acquisitions des élèves.

B) Des tâches de couplage et de découplage entre des traitements non-sémiotiques et des traitements sémiotiques.

On pourrait croire que l'enseignement des mathématiques fait une grande place à l'apprentissage des traitements qui sont spécifiques à chaque registre de représentation : calcul numérique, résolution d'équations, construction et lecture de graphes, construction de figures géométriques, ... Or un examen attentif montre qu'il n'en est rien. Un apprentissage des traitements spécifiques à un registre de représentation n'est proposé que pour **les registres où les traitements sont uniquement de type calcul, mais non pour ceux où les traitements ne sont pas de type calcul.** L'exemple le plus frappant à cet égard est celui des figures géométriques.

Si les figures géométriques peuvent avoir un rôle heuristique pour résoudre des problèmes cela tient au fait qu'elles constituent un registre qui a ses possibilités de transformations propres. Il est donc essentiel de pouvoir répondre avec précision à la question suivante: quels sont les traitements *propres au registre des figures géométriques* qui donnent à ces figures leur force heuristique?

Généralement on s'en tient soit au traitement perceptif soit au traitement mathématique (tableau, fig. 6 ci-dessous). L'importance, légitime, donnée aux tâches de construction de figures est à cet égard révélatrice. Les tâches de construction de figure sont des tâches qui privilégient la formation de la représentation d'un objet mathématique ou d'une situation mathématique dans le registre figuratif : elles ne respectent pas la signification perceptive des différentes unités figurales, mais elles les subordonnent aux contraintes conceptuelles fixées dans la définition des objets. Elles entraînent donc à considérer les figures géométriques comme des notations mathématiques, c'est-à-dire comme des représentations où c'est la dénotation qui compte et non pas la signification proprement perceptive ou opératoire (cfr. schéma de droite dans la fig 3 plus haut). Peut-on dire, dans ces conditions, que les tâches de construction apprennent à "voir", c'est-à-dire permettent de découvrir, de mobiliser, et de contrôler la *productivité heuristique* des figures?

Les traitements qui constituent la productivité heuristique des figures géométriques combinent des opérations qui ne relèvent ni d'une appréhension purement perceptive ni d'une appréhension conceptuelle. Dans certains cas, les facteurs propres à l'appréhension perceptive peuvent favoriser ces opérations et, dans d'autres, au contraire, ils les inhibent. En outre ces opérations sont indépendantes de tout raisonnement déductif, comme de toute mise en oeuvre de définitions. C'est pourquoi il est important de bien distinguer cette appréhension opératoire des figures d'une appréhension perceptive ou d'une appréhension discursive et théorique (Fig. 5).

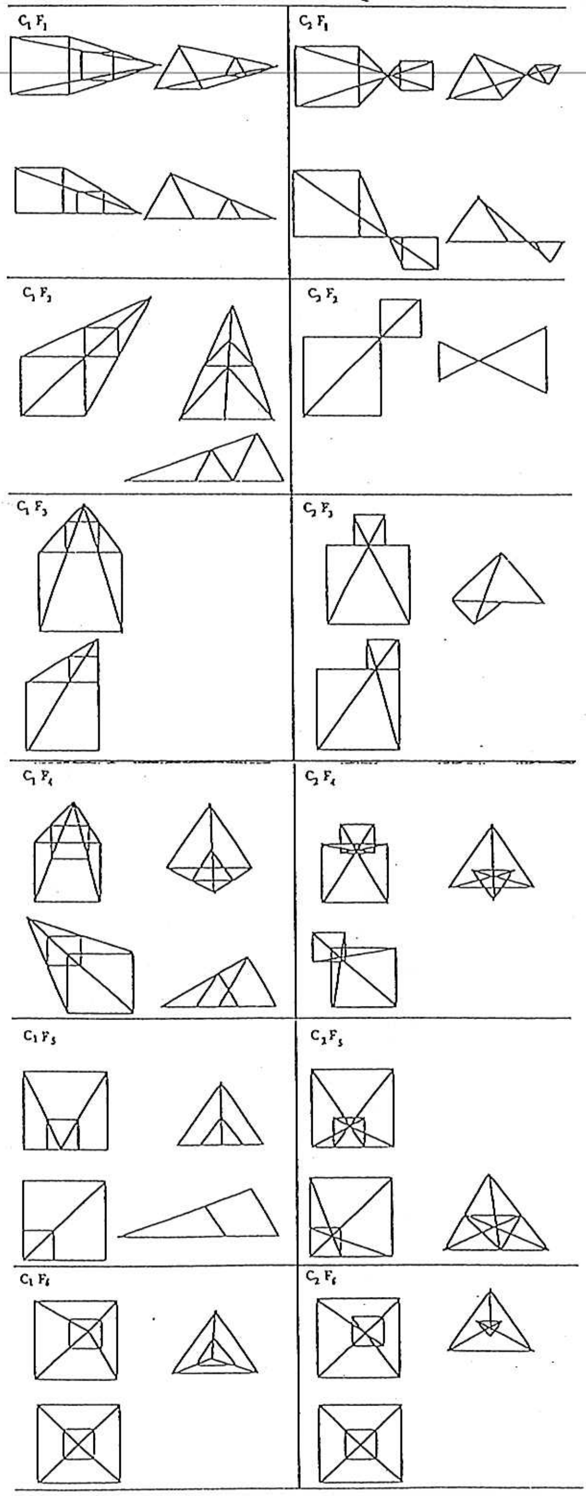
appréhension perceptive	appréhension d'une *structure triadique*		opératoire figure donnée *de la représentation*	appréhension séquentielle *strc. dyadique*	appréhension discursive(*selon la définition des objets*)
integration de stimuli (contrastes brusques de brillance) **en une figure**	**types de modifi-cations figurale s**	Opérations modifiant la figure: **processus heuristique**	Facteurs int. déclenchant ou inhibant la **visibilité de ces operations**	Facteurs ext. intervenant dans la cons-truction de la figure	Variations de congruence entre les modifications figurales visibles et déduction
lois de regroupement des stimulis (simplicité, clôture, continuité, proximité...) et identification de formes	méréolo gique (relation partie-tout)	- Reconfiguration,... Une figure se compose de plusieurs unités figurales: elles peuvent être combinées en une autre figure ou en différentes sous-figures.	- partage en plusieurs sous-figures pertinentes - convexité ou non des sous-figures pertinentes - complementarité.... - dédoublement....	degré de congruence entre les unités figurales possibles et celles permises par les outils utilisés.	- les unités figurales élémentaires et les objets mathematiques objects mobilisés par le raisonnement déductif ont, ou n'ont pas, le même nombre de dimensions
indicateurs de profondeur et de distance (taille, superposition, perspective par rapport à un point de fuite, inclinaison par rapport au plan fronto-parallèle) et **nombre de dimensions : 2 or 3**	optique	- même forme et même orientation dans le plan fronto-parallèle, mais variation de taille: superpo-ition en profondeur de deux figures semblables - variation deplan par rap. au plan fronto-parallèle (variation de forme et constance de forme et de taille)	- même orientation des figures (objet et image) - les lignes de perspective sont toutes distinctes des côtés des deux figures - centre d'homothetie à l'intérieur ou à l'extérieur du contour convexe enveloppant les deux figures,		- en fonction des hypothèses données, il y a congruence, ou non, entre le traitement figural heuristique et l'ordre des pas de déduction.
orientation dans le plan fronto-parallèle	de position	même taille et même forme maisvariation d'orientation: rotation, translation,...	- *Prégnace* des directions verticale et horizontale		

Fig. 5. Les traitements figuraux sont **des opérations qui peuvent être effectuées matériellement ou mentalement** sur les unités figurales d'une figure géométrique donnée pour obtenir une modification configurale de cette figure. Ces traitements peuvent être effectués indépendamment de toute définition explicite ou implicite d'un objet mathématique. Une figure géométrique donnée est susceptible de différents traitements figuraux. Selon le mode d'appréhension que l'on privilégie, une figure géométrique peut donc apparaître comme une représentation de structure triadique ou de structure dyadique. L'une des violences sémiotiques des mathématiques depuis Hilbert consiste à vouloir considérer les figures selon une structure dyadique et non pas triadique : on méconnaît ainsi la notion d'unité figurale ayant une signification propre et pouvant selon les cas dénoter des objets différents. On est ainsi dans l'impossibilité d'analyser la productivité heuristique des figures géomtriques, lesquelles sont constituées d'au moins deux unités figurales

Les tâches de construction de figures introduisent, dans l'appréhension des figures, des contraintes particulières d'ordre de prise en compte des unités figurales et des contraintes tenant à l'outil de construction. C'est pourquoi, elles relèvent d'un quatrième mode d'appréhension. Naturellement l'utilisation mathématique des figures mobilise ces quatre modes d'appréhension. Mais les traitements qui relèvent d'une appréhension opératoire, c'est-à-dire les traitements proprement figuraux, ont une importance toute particulière dans la mesure où ils sont décisifs pour l'utilisation heuristique des figures. On ne peut pas dire qu'ils fassent l'objet d'un apprentissage. Mais quels seraient les conditions d'un tel apprentissage et est-il vraiment possible?

Un apprentissage des traitements proprement figuraux doit être un apprentissage centré sur l'appréhension opératoire des figures et non sur leur appréhension séquentielle ou discursive. Il doit prendre en compte tous les facteurs qui jouent sur la visibilité d'une opération, c'est-à-dire les facteurs d'organisation perceptive d'une figure qui soit favorisent la mobilisation spontanée de cette opération soit au contraire l'inhibent. L'expérience d'un tel apprentissage a été réalisée pour l'opération de reconfiguration (Padilla, 1992). Nous retiendrons ici une recherche qui porte sur une autre opération, celle de superposition en profondeur, traitement figural qui peut être mobilisé pour la représentation des situations d'homothétie (Lémonidis, 1990).

Le tableau suivant (fig.6) extrait du travail de Lémonidis (p.58-59) propose une classification systématique des différents cas de figure pour la représentation des situations d'homothétie dans le plan.


C1 F1
C2 F1
C1 F2
C2 F2
C1 F3
C2 F3
C1 F4
C2 F4
C1 F5
C2 F5
C1 F6
C2 F6

Cette classification a été établie en fonction des paramètres suivants (Lémonidis p.50-55) :
— existence (figure de gauche dans chaque colonne) ou non (figure de droite dans chaque colonne) d'une symétrie intérieure,
— rapport positif (colonne C1) ou rapport négatif (colonne C2) de la configuration homothétique,
— nombre de points remarquables (points qui apparaissent particuliers) de chaque figure,
— position respective de chaque figure l'une par rapport à l'autre: aucun point commun (1ère ligne), intersection réduite à un point (2ème ligne) figures contiguës (3ème ligne), figures qui se chevauchent (la frontière de l'une traverse l'autre), figure dont l'une est une région limitrophe de l'autre, figures en situation d'inclusion complète,
— nombre de traces (droite joignant un point à son image) reliant les points remarquables des figures homothétiques.

Cette classification étant établie on remarque immédiatement que certaines configurations sont vues d'emblée en profondeur, que d'autres sont vues seulement de façon plane, et que certaines sont perceptivement ambiguës, pouvant aussi bien être vues en profondeur que de façon plane.

1. Les configurations qui sont **spontanément vues en profondeur** sont celles pour lesquelles les figures ont la même orientation et pour lesquelles les traces, c'est-à-dire les droites joignant un point de la figure objet à un point de la figure image, sont toutes distinctes des côtés des figures homothétiques.
Deux facteurs déterminent l'orientation d'une configuration homothétique: *l'orientation des formes des deux figures* (objet et image) *par rapport au plan fronto-parallèle* (ou aux bords du cadre matériel support), et *la position du centre d'homothétie* par rapport à l'*enveloppe convexe* qui réunit la figure objet et la figure image (lorsque le centre est à l'extérieur, le rapport numérique est positif et lorsqu'il est à l'intérieur le rapport numérique est négatif). Lorsque le centre est "intérieur", il y a inversion de la figure image par rapport à la figure objet. Ainsi, *deux figures peuvent avoir la même orientation de forme dans le plan fronto-parallèle, et ne pas avoir la même orientation homothétique* : par exemple la configuration C2F1 sur le tableau (Lémonidis, p.65).
Quand ces deux conditions sont remplies (même orientation et traces distinctes des côtés) on peut voir le centre d'homothétie comme un point de fuite: les configurations C1F1, C1F2, C1F3a mais non C1F3b .

2. Les configurations **perceptivement ambiguës pour la perception en profondeur** sont celles pour lesquelles:

— soit toutes les traces ne sont pas distinctes : C1F4b.

La représentation figurale d'objets impossibles repose sur des constructions dans lesquelles certaines traces sont distinctes et d'autres sont confondues.

— soit toutes les traces sont distinctes mais elles paraissent se distribuer comme des "rayons" à partir du centre C2F1a (à comparer avec C2F5a) (Lémonidis p. 54, 60, 73).

Les configurations perceptivement ambiguës ne doivent pas être confondues avec les configurations totalement ininterprétables. Ces configurations sont celles pour lesquelles il est impossible de distinguer le centre vu comme "intérieur" ou vu comme "extérieur". Ce sont les configurations pour lesquelles il y a inclusion complète de la figure objet et de la figure image (F6) (Lémonidis p.65-66). Ces configurations s'opposent à celles dont les figures objet et image n'ont aucun point commun et sont symétriques: pour ces figures on peut visuellement distinguer un centre "intérieur" et un centre "extérieur" (Lémonidis p.53). Dans tous ces cas soit la matérialisation des traces, soit la dénomination des point homologues (c'est-à-dire le recours à une appréhension discursive) deviennent nécessaires.

Toutes les configurations homothétiques planes peuvent donc être regroupées en trois classes selon le degré de prise qu'elles offrent à l'opération de superposition en profondeur. Cela permet d'organiser un apprentissage de type de traitement figural. On peut en effet présenter tous les types de configurations homothétiques distinguées dans la classification de Lémonidis selon l'ordre suivant: les configurations se prêtant à la surperposition en profondeur[1], puis celles qui sont perceptivement ambiguës, et, enfin seulement, celles qui sont irréductiblement planes. Pour le cas des figures vues en perspective on a la possibilité d'un couplage entre un traitement purement figural et un traitement mathématique. Pour les figures qui sont seulement vues de façon plane (C1F6, C2F6,..) le découplage s'impose.

On peut ainsi élaborer un enseignement de l'homothétie qui permet aux élèves de s'approprier des moyens de traitement de la représentation figurale. Et cette appropriation se révèle efficace non seulement pour la compréhension de l'homothétie mais aussi pour l'entrée dans d'autres notions comme celle de barycentre (Lémonidis 1990).

---

[1] On sépare soigneusement dans la présentation les configurations de centre intérieur et celles de centre extérieur. Car pour les configurations de centre intérieur il y a inversion de la figure image, bien qu'elles puissent être spontanément vues en perspective. Ce facteur de variation doit être pris en compte.

C) Des tâches de double production pour les représentations sémiotiques complexes.

Nous appelons représentation complexe toute représentation qui "expose une démarche": un texte, un calcul comprenant plusieurs étapes, un raisonnement.

Il est essentiel, lorsque ces productions sont faites dans un registre où l'organisation sémiotique est linéaire, de demander préalablement une production dans un registre où l'organisation sémiotique n'est pas linéaire (graphe, schéma, ..) et demander ensuite la production dans le registre à organisation sémiotique linéaire comme une description de la première production. Cette double production s'est révélée décisive pour l'apprentissage du raisonnement déductif (Duval,1991). Elle peut également être très féconde pour la compréhension des textes.

En guise de conclusion

Cette approche ouvre donc un vaste de champ de recherches concernant la diversité des représentations utilisées en mathématiques (graphiques, figures, schéma, écriture symbolique) et les premières effectuées jusqu'à présent dans cette perspective s'avèrent fructueuses pour l'apprentissage des mathématiques (Guzman Retamal.1990, Lémonidis 1990, Padilla 1992). Celles qui s'annoncent comme les plus complexes concernent naturellement l'activité de conversion dans laquelle la représentation de départ est un énoncé en langue naturelle ou un texte.

Tous les problèmes de "mathématisation", c'est-à-dire ceux qui visent à faire découvrir l'application de traitements mathématiques déjà acquis à des questions plongées dans des situations non mathématiques quotidiennes ou professionnelles, comme c'est le cas pour les problèmes additifs, les problèmes de mélange, ceux de mise en équations, etc..., en sont l'exemple le plus élémentaire. La résolution de tels problèmes dépend d'abord de la compréhension de l'énoncé et de la conversion des informations pertinentes qui y sont présentées: il s'agit de passer d'une description discursive des objets relevant du champ de la question posée à une écriture symbolique (numérique ou littérale) de leurs relations telles qu'elles sont marquées linguistiquement, et souvent de façon très variable, dans le texte de l'énoncé. C'est seulement à partir de cette écriture symbolique que les traitements mathématiques (opérations arithmétiques, règle des moyennes, résolution d'un système, etc...) peuvent être appliqués. Or l'effectuation de ce passage ne dépend pas de la connaissance de ces traitements ou des formules qui les initialisent. Car ce ne sont donc pas les nombres qui importent dans l'énoncé de tels problèmes mais les syntagmes nominaux ou verbaux qui leur donnent un sens relationnel.

Mais il y a plus largement tout ce qui concerne le raisonnement dans ses formes les plus élaborées que sont l'argumentation et la déduction. L'argumentation est évidemment une forme de raisonnement qui ne peut pas être détachée du registre de la langue naturelle. De même la déduction lorsqu'elle se réfère à des définitions, à des axiomes et à des théorèmes qui sont énoncés en langue naturelle, comme c'est le cas en géométrie. La conversion dans un autre registre peut alors sembler totalement inutile du point de vue traitement et elle peut même devenir une source de difficultés supplémentaires. Il suffit de rappeler ici toutes les difficultés auxquelles se heurte un enseignement de la logique pour voir que le passage dans un registre d'écriture symbolique pour conduire un raisonnement déductif semble tout à fait exclu lors de l'initiation à la démonstration. Peut-on alors considérer le registre de la langue naturelle comme un registre de départ en ce qui concerne le raisonnement ? L'importance de la *sémiosis* dans la *noésis* incite évidemment à répondre par l'affirmative. *La langue naturelle doit être considéré à la fois comme un registre de départ et comme un registre d'arrivée. Mais, et c'est là le point important, cette conversion interne ne se fait pas directement elle passe par des représentations intermédiaires non-discursives.* L'explicitation de représentations intermédiaires non-discursives apparaît être une condition nécessaire dans l'apprentissage du raisonnement déductif comme dans celui du contrôle d'une argumentation (Duval 1992, Duval & Egret 1993). Il ne s'agit pas là d'une condition qui s'imposerait seulement pour le raisonnement ou pour les situations dans laquelle la langue naturelle constitue également le registre d'arrivée. Elle semble également requise pour développer la de compréhension de texte : le passage d'un texte à un autre texte (résumé, commentaire, explication...) qui en exprime la compréhension ne peut pas être un passage direct (Duval 1993). De même la conversion d'un énoncé du registre de la langue naturelle à celui d'un écriture symbolique requiert le détour par des représentations intermédiaires. Les difficultés de l'enseignement de la logique et plus particulièrement celles liées à l'apprentissage d'une manipulation conjointe de la négation et des quantificateurs tiennent en très grande partie à l'illusion d'un passage direct.

Naturellement, le type de représentation intermédiaire non-discursive à mobiliser, quand le registre de départ est la langue naturelle, change selon le registre d'arrivée et selon le type de démarche à effectuer: résolution d'un problème de mathématisation, raisonnement, résumé, conversion dans un registre symbolique, etc... Cela engage dans des analyses plus particulières qui dépassent le cadre de cet article (Damm 1992).

En tout cas, il n'est pas possible de négliger ou d'écarter la langue naturelle dans le cadre de l'enseignement des Mathématiques, elle est un registre aussi fondamental que les autres registres, et plus particulièrement que ceux qui permettent des traitements de type calcul. Mais, à l'inverse, il n'est pas non plus possible de négliger, ou d'écarter, les registres de représentation non-discursive dans le cadre de l'enseignement du Français, du moins dans la mesure où le développement de la compréhension des textes constitue l'un des objectifs prioritaires de cet enseignement. Car, dans ces deux disciplines, il ne peut pas y avoir de véritable apprentissage tant que les situations et les tâches proposées ne prennent pas en compte la nécessité de plusieurs registres de représentation, pour le fonctionnement cognitif de la penée, et le caractère central de l'activité de conversion.

Références

Benveniste E., 1966, *Problèmes de linguistique générale*, 1, Paris, Gallimard.

Benveniste E., 1974, *Problèmes de linguistique générale*, 2, Paris, Gallimard.

Bresson F., 1987, Les Fonctions de Représentation et de Communication, *Psychologie* (Eds. Piaget, Mounoud, Bronckart) Encyclopédie de la Pleïade, p. 933-982.

Deledicq & Lassave, 1979, "Faire des Mathématiques, 4ème". Paris, Cedic.

Damm R. 1992, *Apprentissage des problèmes additifs et compréhension des énoncés*. Thèse U.L.P. Strasbourg.

Duval, 1988, Graphiques et Equations, *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 1, p. 235-253.

Duval R., 1991, Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 233-261.

Duval R., 1992, Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive. *Petit x* n°31, 37-61.

Duval R., 1993, *Sémiosis et Noésis. Préprint*.

Duval R., Geometrical Pictures: kind of representation and specific processings (à paraître).

Duval R.&Egret M.A., 1993, Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif *Repères*, 12, p114-140.

Eco U., 1988, *Sémiotique et Philosophie du Langage* (tr. Bouuzaher). Paris, P.U.F.

Granger G., 1979, *Langages et Epistémologie*, Paris, Klinksieck.

Guzman Retamal I., 1990, *Le rôle des représentations dans l'appropriation de la notion de fonction.* Thèse U.L.P. Strasbourg.

Lefort & L.E.G.T de Colmar, 1990, Changement de registre, *L'Ouvert* n°60

Larkin J.H. & Simon H.A., 1987, Why a Diagram is (sometimes) worth Ten Thousand Words, in *Cognitive Science*, 11, p.65-99.

Leiser D., 1987, Les Fonctions de stockage, *Psychologie* (Eds. Piaget, Mounoud, Bronckart) Encyclopédie de la Pleïade, p.1836-1870.

Lémonidis E.C., 1990, *Conception, Réalisation et Résultats d'une expérience d'ensei-gnement de l'homothétie*, Thèse U.L.P., Strasbourg.

Padilla V., 1992, *L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques*, Thèse U.L.P., Strasbourg.

Païvo A, 1986, *Mental Representations A dual coding Approach,* Oxford, Oxford University Press.

Piaget J. 1968 (1946), *La Formation du symbole chez l'enfant*, Neuchatel, Delachaux& Niestlé.

Vitgosky L.S., 1962 (1934) *Thought and Language* (tr.Hanfmann&Vakar) Cambridge, M.I.T. Press.

Un problème décisif pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire : la coordination des registres de représentation

K. Pavlopoulou

In linear algebra we usually use three registers of semiotic representations of vectors and their properties : graphic, table and symbolic. Many investigations carried out with students of the first year of university revealed systematic failures in converting the different types of representations of a vector or a family of vectors.
This paper analyses the complexity of the operation of conversion of representations from one register to another in linear algebra. It also presents the results of one of these investigations as well as the results of an experiment, whose aim was the coordination of the registers of representations.

L'enseignement traditionnel de l'algèbre linéaire en première année universitaire conduit à un constat d'échec dans la plupart des universités en France. Un échec qui "se traduit chez les étudiants par un apprentissage médiocre des concepts, des méthodes et même des techniques de l'algèbre linéaire" (Rogalski, 1991, p.3). Cet échec a attiré l'attention des chercheurs et les évaluations faites dans des différentes universités ont mis en lumière les difficultés concernant la compréhension de notions de base, comme par exemple celle de vecteur et celle d'espace vectoriel. Très souvent pour les étudiants ces notions ont un aspect beaucoup moins vaste et général que celui qui leur est attribué par leur définition formelle. Comment expliquer cette situation ?

L'éventail des choix pour l'enseignement de l'algèbre linéaire comporte d'une part la présentation des concepts mathématiques par le recours au discours formel (théorie axiomatique abstraite), d'autre part un lot de situations susceptibles de servir d'exemples introductifs ou d'applications. Le mode de présentation de ces exemples peut varier : ils peuvent être donnés sous forme d'une représentation graphique, sous forme d'un tableau ou sous forme d'une écriture symbolique. Mais habituellement, on ne considère pas que la manipulation de ces

© Annales de Didactique et de Sciences Cognitives
5 (1993) (p.67-93) - IREM de Strasbourg

formes puisse présenter des difficultés propres ou que le passage de l'une à l'autre puisse ne pas aller de soi si l'on a compris les concepts mathématiques. Or la compréhension du fonctionnement des représentations sémiotiques utilisées (graphique, tableau, écriture symbolique) et surtout la compréhension du passage de l'une à l'autre semblent devoir être comptées parmi les prérequis les plus importants pour l'enseignement de l'algèbre linéaire. L'approche usuelle de l'algèbre linéaire a pu donner lieu à la remarque : "il semble clair que les étudiants actuels ne peuvent guère supporter ce genre d'approche, tant pour des raisons tenant à leur état d'esprit qu'à cause de l'absence de prérequis dans un certain nombre de domaines ..." (Rogalski, 1990). Selon nous, sans une compréhension du fonctionnement des représentations sémiotiques et surtout sans une maîtrise de leur conversion, la compréhension des concepts et des méthodes semble difficile à acquérir. Ainsi un vecteur peut être représenté par une flèche, par une colonne à plusieurs lignes ou encore par une lettre. Lorsque ces trois registres de représentation ne sont pas vraiment coordonnés, l'objet "vecteur" peut être confondu avec l'un de ses représentants, et plus particulièrement avec la flèche dessinée dans le plan ou dans l'espace!

Chaque registre de représentation n'explicitant pas les mêmes aspects de l'objet représenté, il est donc essentiel pour un enseignement de pouvoir **mobiliser plusieurs registres de représentation sémiotiques.** "..., ce recours à plusieurs registres semble même une condition nécessaire pour que les objets mathématiques ne soient pas confondus avec leurs représentations et qu'ils puissent être reconnus dans chacune de leurs représentations. Cela indique que la coordination de plusieurs registres de représentation sémiotique est fondamentale pour l'appréhension conceptuelle des objets." (Duval, 1993a). Dans diverses enquêtes que nous avons faites, nous avons pu remarquer qu'une grande part des difficultés tient à la non coordination des trois registres de représentation. Quand par exemple nous demandons l'étude d'une certaine propriété d'une famille de vecteurs donnée dans le registre de l'écriture symbolique, les étudiants recourent immédiatement à des traitements "recettes" dans un autre registre, en ignorant la définition formelle et générale de la propriété demandée. Ce sont les conséquences d'une acquisition partielle des notions mathématiques qui découlent d'un apprentissage monoregistre, basé sur les techniques et les méthodes appliquées sur un seul registre.

Un enseignement de l'algèbre linéaire peut viser explicitement la coordination des trois registres de représentation. Pour cela les différents types de représentation du même objet que nous pouvons obtenir dans les différents registres ne doivent **pas simplement servir comme des champs d'application de l'objet défini**. Ils constituent aussi une approche vers la conceptualisation de l'objet mathématique. Et dans la conceptualisation, c'est **la conversion entre les différents registres** qui joue un rôle essentiel.

C'est une telle approche que nous proposons pour l'enseignement de l'algèbre linéaire. Avant de passer aux définitions formelles de vecteur et des propriétés de vecteurs, nous présentons aux étudiants :
- une variation de situations de familles de vecteurs dans chacun des registres.
- un travail systématique sur la conversion entre les différents registres dans tous les sens possibles.

Ensuite le passage par le registre de la langue naturelle s'avère nécessaire pour pouvoir effectuer des définitions et arriver au discours formel mathématique.

Dans le cadre de cet article, nous allons d'abord présenter les règles de représentation pour chacun des registres. Puis nous montrerons que leur simplicité n'est qu'apparente. Car le passage d'un registre à un autre s'avère très vite une opération complexe. Nous ferons enfin état de résultats d'enquêtes et d'une expérience d'enseignement pour montrer la pertinence et la fécondité de cette approche.

I. SIMPLICITE DES REGISTRES DE REPRESENTATION UTILISEES EN ALGEBRE LINEAIRE

En algèbre linéaire on utilise généralement trois registres pour représenter les objets définis : le registre graphique, le registre des tableaux et le registre de l'écriture symbolique. Le tableau suivant présente les différentes représentations qui peuvent être utilisées pour un objet.

Représentations			**Objet mathématique pouvant être ainsi représenté**
dans le registre graphique	dans le registre des tableaux	dans le registre de l'écriture symbolique	
flèche, éventuellement accompagnée d'une désignation (du registre symbolique le plus souvent)	- colonne à deux lignes - colonne à trois lignes - colonne à n lignes	lettre(s), dénotant un objet, éventuellement surmontée d'une flèche	vecteur ou élément d'un espace vectoriel
famille de flèches de référence	ensemble de colonnes, chacune composée d'un seul 1 et de 0 dans les autres lignes[1]	famille d'objets de référence	base
flèche de même direction qu'une flèche de référence	colonne qui a au plus un coefficient non nul : dans la case qui correspond à la ligne où la colonne de référence a la valeur 1	objet qui peut être écrit comme un multiple de l'objet de référence	vecteur colinéaire à un vecteur de la base choisie

Tableau 1

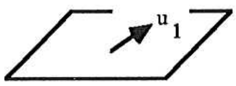
(1) Cette représentation confère à la base choisie le caractère d'une base canonique. Nous la retenons dans cet article non pas pour éliminer d'autres choix de base, mais parce qu'un échelonnement en lignes (ou en colonnes) permet de mettre un tableau en forme échelonnée réduite.

Cette diversité de représentations possibles d'un même objet suppose que l'on puisse facilement passer de l'une à l'autre c'est à dire que l'on puisse convertir une représentation donnée dans un registre à la représentation correspondante dans un autre registre. Et pour pouvoir faire cette conversion facilement, immédiatement, il faut avoir bien identifié les éléments constitutifs de la représentation dans chaque registre.

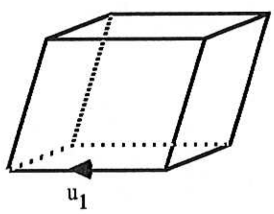
- Eléments constitutifs de la représentation dans le registre graphique

Un vecteur soit dans le plan soit dans l'espace peut être représenté par une *flèche*. Ci-dessous, ainsi qu'à la suite de cet article, nous utilisons un parallélogramme pour illustrer une situation de vecteurs dans le plan et un parallélépipède pour une situation de vecteurs dans l'espace. Une flèche peut être éventuellement accompagnée par une lettre pour qu'elle puisse être identifiée, dans le cas où plusieurs flèches sont dessinées sur la même représentation.

Vecteur dans le plan :



Vecteur dans l'espace :



Pour représenter une famille de vecteurs nous dessinons plusieurs flèches sur le même parallélogramme ou parallélépipède. Et pour simplifier l'étude d'une famille de vecteurs nous utilisons des représentations où toutes les flèches sont ramenées à la même origine.

Dans le registre graphique deux difficultés de représentation se posent :

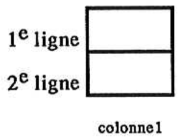
i) la limitation d'une représentation à la dimension 3 (et même quelques fois dans un espace vectoriel de dimension 3 nous n'arrivons pas à faire de bonnes représentations) et

ii) l'impossibilité de représenter le vecteur nul (généralement le registre graphique est impropre à toutes les situations dégénérées).

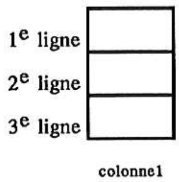
- Eléments constitutifs de la représentation dans le registre des tableaux

Un vecteur est représenté par une *colonne* et une famille de vecteurs du même espace vectoriel est représentée par plusieurs colonnes de même hauteur mises côte à côte, c'est-à-dire par un tableau. La hauteur de la colonne dépend de la dimension de l'espace vectoriel dans lequel les vecteurs de la situation donnée appartiennent. Voici un exemple pour la représentation d'un vecteur dans le plan et dans l'espace :

Vecteur dans le plan :



Vecteur dans l'espace :



Pour représenter donc une situation d'une famille de vecteurs dans le plan, nous utilisons un tableau à deux lignes et pour une famille de vecteurs dans l'espace, nous utilisons des tableaux à trois lignes.

Les cases d'une colonne sont remplies par des coefficients réels. Les colonnes dont toutes les valeurs sont égales à 0, sauf une seule égale à 1, nous les appelons *colonnes de référence*. Pour les autres colonnes, quand un coefficient non nul apparaît dans une case, on dit que cette colonne peut être décrite par rapport à la colonne de référence ayant la valeur 1 à la même ligne. Et quand la valeur 0 apparaît dans une case d'une colonne, cette colonne ne peut pas être décrite par rapport à la colonne de référence ayant la valeur 1 à la même ligne.

Dans le registre des tableaux il y a la possibilité de représentation du vecteur nul, en utilisant une colonne où toutes les cases sont remplies par le coefficient 0. En plus, à l'aide de ce registre nous pouvons représenter des situations de vecteurs qui appartiennent dans un espace vectoriel de dimension plus grande que 3, puisqu'un tableau peut avoir autant de lignes et de colonnes que l'on veut. Ceci donc nous permet de décrire des situations qui ne peuvent pas être visualisées dans le registre graphique. Mais, nous sommes toutefois limités à des dimensions finies.

- Eléments constitutifs de la représentation dans le registre de l'écriture symbolique

Dans le registre de l'écriture symbolique un vecteur est représenté par une *lettre* dénotant un objet. Nous utilisons d'habitude des lettres avec ou sans indices et la notation **0** pour décrire l'objet nul. Pour préciser la nature de l'objet dénoté, il faut aussi indiquer l'ensemble dans lequel l'objet est situé. Ci-dessous nous donnons la représentation dans le registre de l'écriture symbolique, d'un vecteur dans plan et d'un vecteur dans l'espace :

Vecteur dans le plan :	Vecteur dans l'espace :
$u \in \mathbb{R}^2$	$u \in \mathbb{R}^3$

Pour représenter une situation d'une famille de vecteurs dans le registre de l'écriture symbolique nous avons besoin de la description de chaque objet par rapport aux objets de la famille qui vont servir comme référence. Cette description se réalise à l'aide de la relation de base : la combinaison linéaire.

Le registre de l'écriture symbolique nous permet de décrire toutes les situations possibles de vecteurs, indépendamment de leur nature (vecteurs du plan, de l'espace ou d'un autre espace vectoriel) et de la dimension (finie ou infinie) de l'espace vectoriel auquel les vecteurs appartiennent. En plus, à l'aide du registre de l'écriture symbolique nous pouvons effectuer des définitions, en introduisant des éléments permettant de remplir des fonctions discursives (Pour une analyse plus détaillée sur les trois registres de représentation, cf. Pavlopoulou, 1994).

II. COMPLEXITE DE LA CONVERSION DES REPRESENTATIONS EN ALGEBRE LINEAIRE

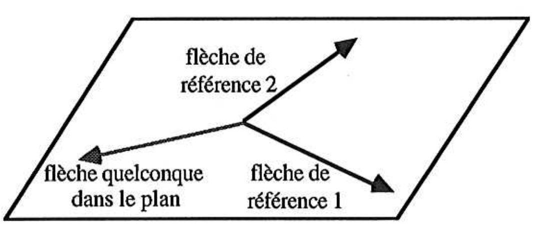
La conversion de la représentation d'un objet est sa transformation en une autre représentation relevant d'un autre registre. Puisqu'en algèbre linéaire on recourt à trois registres différents de représentation, il y a une grande variété de conversions à effectuer. Les règles pour effectuer une conversion peuvent sembler très simples mais le passage de la représentation d'un objet dans un registre à sa représentation dans un autre registre est souvent complexe. Il suppose que l'on ait identifié tous les éléments constitutifs d'une représentation dans chaque registre. Comme nous le verrons plus loin cela est loin d'être le cas pour beaucoup d'étudiants. Notre propos ici est de montrer à partir de quelques exemples, la complexité de la conversion d'une représentation malgré la simplicité des règles de conversion.

A. *Conversion entre le registre graphique et le registre des tableaux*

Lorsque la représentation est celle d'un vecteur dans le plan, la conversion apparaît relativement simple. Pour représenter graphiquement une situation quelconque de flèches dans le plan nous avons besoin de deux flèches de référence. Une flèche quelconque dans le plan peut être parfaitement définie à l'aide des deux flèches de référence fixées. Pour représenter la même situation dans un tableau nous avons besoin de deux colonnes de référence remplies par 1 et 0, et de deux lignes

Pour deux flèches de référence données dans le plan :

Figure



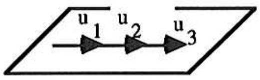
Tableau

	colonne de référ. 1	colonne de référ. 2	autre colonne
lère ligne	1	0	
2ème ligne	0	1	

Cependant la conversion peut très vite se reveler plus complexe comme le montrent les deux exemples qui suivent :

Exemple 1 : Trois vecteurs colinéaires dans le plan

Dans le registre graphique il suffit de dessiner trois flèches qui ont la même direction, comme ci-dessous :



Voici les correspondances à prendre en compte pour effectuer la conversion :

Eléments de la situation donnée, décrite dans le registre graphique	**Eléments correspondants dans le registre des tableaux**
trois flèches	**trois** colonnes
flèches dans le **plan**	colonnes à **deux** lignes
une flèche de référence (soit $\mathbf{u_1}$)	**une** colonne de référence (composée d'un seul 1 et 0 partout ailleurs : **la première**)
$\mathbf{u_2}$: **même direction** que la flèche de référence $\mathbf{u_1}$	**la case** de la deuxième colonne qui correspond à la ligne où la colonne de référence a la valeur 1, sera remplie par un **coefficient non nul**
$\mathbf{u_3}$: **même direction** que la flèche de référence $\mathbf{u_1}$	**la case** de la troisième colonne qui correspond à la ligne où la colonne de référence a la valeur 1, sera remplie par un **coefficient non nul**

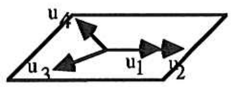
Tableau 2

Nous obtenons donc le tableau suivant qui décrit exactement la même situation que la figure plus haut (trois vecteurs colinéaires dans le plan) dans le registre des tableaux :

$$\begin{pmatrix} 1 & k & m \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2 : Quatre vecteurs dans le plan

Soit la situation de quatre vecteurs du plan tels qu'ils sont représentés dans le registre graphique ci-dessous :



Voici les correspondances à prendre en compte pour effectuer la conversion :

Eléments de la situation donnée, décrite dans le registre graphique	**Eléments correspondants dans le registre des tableaux**
quatre flèches	**quatre** colonnes
flèches dans le **plan**	colonnes à **deux** lignes
deux flèches de référence (soient $\mathbf{u_1}$ et $\mathbf{u_3}$, puisque u_2 a la même direction que u_1)	**deux** colonnes de référence (composées d'un seul 1 et 0 partout ailleurs : **la première et la troisième**)
$\mathbf{u_2}$: **même direction** que la flèche de référence $\mathbf{u_1}$	**la case** de la deuxième colonne qui correspond à la ligne où la première colonne a la valeur 1, sera remplie par un **coefficient non nul**
$\mathbf{u_4}$: **direction différente des deux directions fixées** par les flèches de référence $\mathbf{u_1}$ **et** $\mathbf{u_3}$.	**toutes les deux cases** de la quatrième colonne seront remplies par des **coefficients non nuls**

Tableau 3

La même situation que plus haut, représentée dans le registre des tableaux est décrite par le tableau :

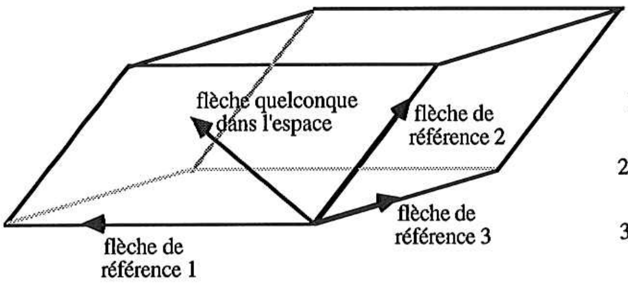
$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 & m \\ 0 & 0 & 1 & n \end{pmatrix}.$$

Lorsqu'il s'agit de la représentation d'un vecteur dans l'espace, la conversion devient encore plus complexe, bien que les règles de correspondance restent les mêmes. Pour représenter graphiquement une situation quelconque de flèches dans l'espace nous avons besoin d'une troisième flèche de référence et donc d'une troisième colonne de référence.

Registre graphique		Registre des tableaux
flèche dans l'espace	→	colonne à trois lignes
flèche de référence	→	colonne de référence composée par un seul 1 et 0 partout ailleurs dans les autres cases

Pour trois flèches de référence données dans l'espace :

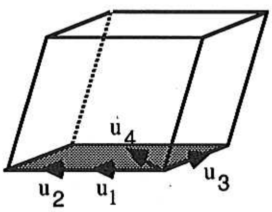
Figure Tableau



	colonne de référ. 1	colonne de référ. 2	colonne de référ. 3	autre colonne
1ère ligne	1	0	0	
2ème ligne	0	1	0	
3ème ligne	0	0	1	

Exemple 3 : Quatre vecteurs de l'espace qui forment un plan

Soit la situation de quatre vecteurs du plan tels qu'ils sont représentés dans le registre graphique ci-dessous :



Voici les correspondances à prendre en compte pour effectuer la conversion :

Eléments de la situation donnée, décrite dans le registre graphique	**Eléments correspondants dans le registre des tableaux**
quatre flèches	**quatre** colonnes
flèches dans l'**espace**	colonnes à **trois** lignes
deux flèches de référence (soient u_1 et u_3, puisque u_2 a la même direction que u_1)	**deux** colonnes de référence (composées d'un seul 1 et 0 partout ailleurs : **la première et la troisième)**
$\mathbf{u_2}$: **même direction** que la flèche de référence $\mathbf{u_1}$	**la case** de la deuxième colonne qui correspond à la ligne où la première colonne a la valeur 1, sera remplie par un **coefficient non nul**
$\mathbf{u_4}$: **direction différente des deux directions fixées** par les flèches de référence $\mathbf{u_1}$ **et** $\mathbf{u_3}$	**les deux cases** de la quatrième colonne qui correspondent aux lignes où la première et la troisième colonne ont la valeur 1, seront remplies par des **coefficients non nuls**

Tableau 4

La situation donc de l'exemple 3 peut être représentée dans le registre des tableaux par le tableau ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 & m \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Remarque importante</u> : Les situations décrites dans l'exemple 2 et l'exemple 3 sont très souvent confondues par les étudiants. Plus précisément, pour la situation donnée à l'exemple 3 :
- pendant le passage vers le registre des tableaux, ils écrivent un tableau à deux lignes car *"les flèches forment un plan"* ou car *"la troisième flèche de référence n'est pas donnée"*.

- pendant le passage inverse vers le registre graphique, ils ignorent la troisième ligne car *"elle est nulle"*.

Ce type des difficultés qui conduit à une mauvaise interprétation de la situation donnée, peuvent être dépassées à l'aide d'un travail systématique sur la conversion entre les différents registres.

B. Conversion entre le registre des tableaux et le registre de l'écriture symbolique

Le passage du registre des tableaux au registre de l'écriture symbolique se réalise en suivant les règles de correspondance suivantes :

a) format du tableau :

- le *nombre des lignes* nous indique la dimension de l'espace vectoriel (R^2 ou R^3) auquel les objets appartiennent, et
- le *nombre des colonnes* correspond au nombre des objets que nous devons définir dans la situation donnée.

Eléments d'un tableau	Valeurs	Eléments correspondants dans le registre de l'écriture symbolique
nombre des lignes	- deux	R^2
	- trois	R^3
	n	R^n
nombre des colonnes	k	nombre des objets à définir (p.ex. $u_1, u_2, ..., u_k$)

Tableau 5

b) éléments dans les cases :

Les éléments dans les cases correspondent aux coefficients de l'objet de référence qui a la valeur 1 dans la même ligne. A l'aide de ces coefficients et en utilisant la liaison des objets par le signe "+" nous pouvons construire les relations entre chaque objet et les objets de référence.

Pour mieux illustrer ce passage, nous présentons à la suite l'application des règles précédentes pour le cas général d'une situation dans le plan et d'une situation dans l'espace :

- *Représentation d'un vecteur dans le plan :*

<table>
<tr><th>Registre des tableaux</th><th>Registre de l'écriture symbolique</th></tr>
<tr><td>$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & \\ \hline 0 & 1 & \\ \hline \end{array}$</td><td>$u_1 \in R^2, u_2 \in R^2, u_3 \in R^2$

$u_1 = \mathbf{1}\ u_1 + \mathbf{0}\ u_2$
$u_2 = \mathbf{0}\ u_1 + \mathbf{1}\ u_2$
$u_3 = \square\ u_1 + \square\ u_2$</td></tr>
</table>

La troisième colonne qui est vide correspond à un troisième vecteur dans le plan dont nous allons étudier les variations. Les cases vides, devant les termes u_1 et u_2 pour l'écriture du troisième vecteur u_3, marquent la place des coefficients "inconnus" lesquels changent en fonction de la position du vecteur dans le plan.

- *Représentation d'un vecteur dans l'espace :*

Nous présentons ci-dessous la forme du tableau ayant donné trois colonnes de référence dans l'espace. La quatrième colonne correspond à un vecteur quelconque dans l'espace. La même situation de vecteurs, décrite dans le registre de l'écriture symbolique, est notée juste à côté.

<table>
<tr><th>Registre des tableaux</th><th>Registre de l'écriture symbolique</th></tr>
<tr><td>$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 1 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 1 & \\ \hline \end{array}$</td><td>$u_1 \in R^3, u_2 \in R^3, u_3 \in R^3, u_4 \in R^3$

$u_1 = \mathbf{1}\ u_1 + \mathbf{0}\ u_2 + \mathbf{0}\ u_3$
$u_2 = \mathbf{0}\ u_1 + \mathbf{1}\ u_2 + \mathbf{0}\ u_3$
$u_3 = \mathbf{0}\ u_1 + \mathbf{0}\ u_2 + \mathbf{1}\ u_3$
$u_4 = \square\ u_1 + \square\ u_2 + \square\ u_3$</td></tr>
</table>

Exemple 4 :

Soit la situation ci-dessous, donnée dans le registre des tableaux. Nous allons décrire la même situation dans le registre de l'écriture symbolique, sans aucune perte d'informations.

1	0	k	0
0	1	m	0
0	0	0	1

Voici les correspondances à prendre en compte pour effectuer la conversion :

Eléments de la situation donnée, décrite dans le registre des tableaux	**Eléments correspondants dans le registre de l'écriture symbolique**
trois lignes	espace de dimension **3** ($\mathbf{R}^3$)
quatre colonnes	**quatre** objets à définir, soient : $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_4$
trois colonnes de référence : la **première**, la **deuxième** et la **quatrième**	**trois** objets de référence : $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_4$
la troisième colonne : elle a deux cases remplies par des coefficients non nuls, celles-ci qui correspondent à la première et la deuxième colonne de référence, et 0 dans la case qui correspond à la troisième colonne de référence.	l'objet $\mathbf{u}_3$ peut s'écrire comme la somme des multiples des objets de référence, ayant comme coefficient pour chacun le coefficient qui se trouve dans la case qui correspond à la ligne où la colonne de référence (respective) a la valeur 1. C'est à dire le coefficient **k** pour $\mathbf{u}_1$, le coefficient **m** pour $\mathbf{u}_2$, et **0** pour $\mathbf{u}_4$.

Tableau 6

La représentation de la situation donnée dans le registre de l'écriture symbolique est la suivante :

$$u_1 \in R^3,\ u_2 \in R^3,\ u_3 \in R^3,\ u_4 \in R^3$$
$$u_1 = \mathbf{1}\ u_1 + \mathbf{0}\ u_2 + \mathbf{0}\ u_4$$
$$u_2 = \mathbf{0}\ u_1 + \mathbf{1}\ u_2 + \mathbf{0}\ u_4$$
$$u_3 = \mathbf{k}\ u_1 + \mathbf{m}\ u_2 + \mathbf{0}\ u_4$$
$$u_4 = \mathbf{0}\ u_1 + \mathbf{0}\ u_2 + \mathbf{1}\ u_4$$

Dans les exemples présentés plus haut nous avons mis en lumière la complexité de la tâche de conversion pour quelques situations. Mais puisqu'en algèbre linéaire les trois registres sont utilisés, il faut explorer des situations de conversion pour tous les passages possibles, c'est-à-dire pour :
- le passage du registre graphique au registre des tableaux,
- le passage du registre des tableaux au registre graphique,
- le passage du registre graphique au registre de l'écriture symbolique,
- le passage du registre de l'écriture symbolique au registre graphique,
- le passage du registre des tableaux au registre de l'écriture symbolique et
- le passage du registre de l'écriture symbolique au registre des tableaux.

La coordination des trois registres de représentation requiert que la conversion puisse être aisément effectuée pour tous ces différents changements de registres. Pour favoriser cette coordination, il semble essentiel de proposer une tâche qui conduise à faire "explorer systématiquement les variations possibles d'une représentation dans un registre et à faire prévoir, ou observer, les variations concomitantes de représentations dans l'autre registre." (Duval, 1993b). Il y a donc une grande variété de situations à traiter afin de favoriser la coordination entre ces différents registres. Et un enseignement ne peut pas se restreindre à la présentation des quelques exemples de conversion. C'est avec un travail systématique sur l'articulation des différents registres avec lequel la conversion peut devenir une activité immédiate et spontanée chez les étudiants.

III. LES DIFFICULTES DE LA CONVERSION : ENQUETES ET EXPERIMENTATION

Généralement on considère que l'utilisation des registres de représentation et les passages de l'un à l'autre découlent naturellement de la compréhension des concepts mathématiques en jeu. Et on considère également qu'il suffirait de savoir produire des représentations d'un objet dans deux registres différents pour être capable de passer de l'un à l'autre. Mais, les résultats d'enquêtes et d'évaluations que nous avons réalisés auprès des étudiants de la première année universitaire montrent le contraire. Beaucoup d'étudiants échouent sur des tâches de conversion relativement simples. En outre, la réussite à certaines tâches de conversion ne permet en rien de prévoir le comportement pour d'autres tâches de conversion apparemment similaires.

Pour montrer l'ampleur de ces difficultés nous allons présenter quelques données tirées de deux enquêtes :
i) au niveau DEUG1 (première année universitaire) au mois de novembre 1992 auprès de 59 étudiants, et
ii) au mois de mars 1993 auprès de 144 étudiants ayant suivi des cours de la Mise à Niveau.

Les deux enquêtes ont conduit à proposer une expérience d'enseignement centrée sur la coordination des registres. Nous en indiquerons brièvement les premiers résultats.

A. Quelques observations

Toutes les questions de deux enquêtes proposaient la tâche suivante : à partir de la représentation d'une situation de vecteurs donnée dans l'un des trois registres (graphique, tableau ou écriture symbolique) construire dans un autre registre fixé la représentation correspondante. Nous avons donc présenté aux étudiants une liste de représentations dans un registre de départ fixé accompagné par l'énoncé suivant en ce qui concerne par exemple le passage tableau → graphique : "Les tableaux suivants décrivent une situation de vecteurs dans le plan ou dans l'espace. Donner une figure qui illustre la situation décrite par le tableau donné".
La tâche proposée donne évidemment lieu à une variété de cas que nous n'avons pas tous présentés. Et ici nous nous limiterons à quelques unes des questions posées.

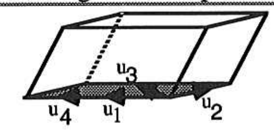
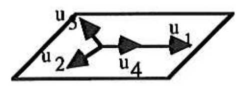
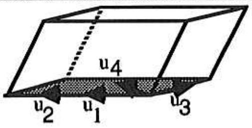
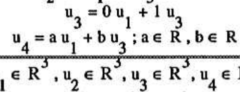
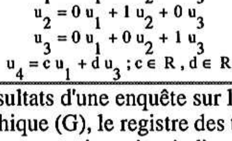
Questions (Mars 1993)			*Taux de réussite*
Code	Registre de départ	Registre d'arrivée	effectif : 144
GS	 	$u_1 \in R^3, u_2 \in R^3, u_3 \in R^3, u_4 \in R^3$ $u_1 = 1u_1 + 0u_2$ $u_2 = 0u_1 + 1u_2$ $u_3 = ku_1 + mu_2 ; k \in R, m \in R$ $u_4 = nu_1 + 0u_2 ; n \in R$	.05
TG1	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & k & p \\ \hline 0 & 1 & m & 0 \\ \hline \end{array}$	 	.83
TG2	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & k & 0 & m \\ \hline 0 & 0 & 1 & n \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	 	.68
TS1	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & k & p \\ \hline 0 & 1 & m & 0 \\ \hline \end{array}$	$u_1 \in R^2, u_2 \in R^2, u_3 \in R^2, u_4 \in R^2$ $u_1 = 1u_1 + 0u_2$ $u_2 = 0u_1 + 1u_2$ $u_3 = ku_1 + mu_2$ $u_4 = pu_1 + 0u_2$	.07
TS2	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & k & 0 & m \\ \hline 0 & 0 & 1 & n \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	$u_1 \in R^3, u_2 \in R^3, u_3 \in R^3, u_4 \in R^3$ $u_1 = 1u_1 + 0u_3$ $u_2 = ku_1 + 0u_3$ $u_3 = 0u_1 + 1u_3$ $u_4 = mu_1 + nu_3$	.05
GT1	 	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & a & c \\ \hline 0 & 1 & b & d \\ \hline \end{array}$	.34
GT2	 	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & 0 & a \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & b \\ \hline \end{array}$	.35
ST1	$u_1 \in R^2, u_2 \in R^2, u_3 \in R^2, u_4 \in R^2$ $u_1 = 1u_1 + 0u_3$ $u_2 = ku_1 + 0u_3 ; k \in R$ $u_3 = 0u_1 + 1u_3$ $u_4 = au_1 + bu_3 ; a \in R, b \in R$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & k & 0 & a \\ \hline 0 & 0 & 1 & b \\ \hline \end{array}$	.72
ST2	$u_1 \in R^3, u_2 \in R^3, u_3 \in R^3, u_4 \in R^3$ $u_1 = 1u_1 + 0u_2 + 0u_3$ $u_2 = 0u_1 + 1u_2 + 0u_3$ $u_3 = 0u_1 + 0u_2 + 1u_3$ $u_4 = cu_1 + du_3 ; c \in R, d \in R$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & 0 & c \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & d \\ \hline \end{array}$	.72

Tableau 7 : Résultats d'une enquête sur l'articulation des trois registres mis en jeu en algèbre linéaire : le registre graphique (G), le registre des tableaux (T) et le registre de l'écriture symbolique (S). Il s'agit d'une tâche de construction, c'est à dire de construire une représentation dans le registre d'arrivée qui décrit la situation représentée dans le registre de départ. Les deux lettres de la première colonne désignent le type de conversion demandé : GS désigne la conversion d'une représentation au registre graphique en une représentationcorrespondante dans le registre de l'écriture symbolique.

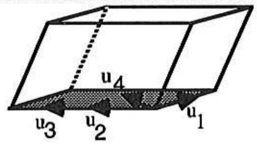
Questions (Mars 1993)			*Taux de réussite*
Code	Registre de départ	Registre d'arrivée	effectif : 144
S G	$u_1 \in R^3, u_2 \in R^3, u_3 \in R^3, u_4 \in R^3$ $u_1 = 1\,u_1 + 0\,u_2$ $u_2 = 0\,u_1 + 1\,u_2$ $u_3 = 0\,u_1 + k\,u_2 ; k \in R$ $u_4 = a\,u_1 + b\,u_2 ; a \in R, b \in R$		.40

Tableau 7 (suite)

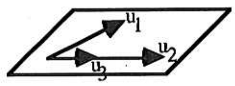
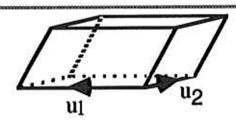
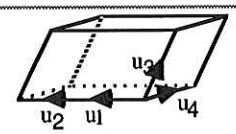
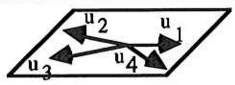
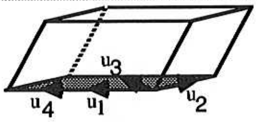
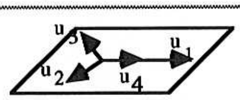
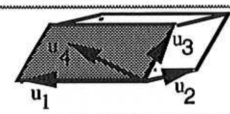
Questions (Novembre 1992)		*Taux de réussite (effectif : 59)*	
Registre graphique	Registre des tableaux	Reg. graph. → Reg. des tabl.	Reg. des tabl. → Reg. graph.
	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & k \\ \hline\end{array}$	.54	.81
	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline\end{array}$ (1)	.53	.75
	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & k & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline\end{array}$	.64	
	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & a & c \\ \hline 0 & 1 & b & d \\ \hline\end{array}$	.25	
	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & m & k \\ \hline 0 & 1 & n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\end{array}$	.10	.36
	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & k & p \\ \hline 0 & 1 & m & 0 \\ \hline\end{array}$		.61
	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & 0 & k \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & m \\ \hline\end{array}$		.56

Tableau 8 : Résultats d'une enquête (DEUG1, nov. 1992, effectif : 59)

(1) La réponse possible $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a été aussi considérée comme correcte. Cette remarque vaut aussi pour des autres items, au cas où une même situation se présente.

Le résultat le plus frappant, et le plus important, de ces deux enquêtes est l'énorme variation des taux de réussites : de 0.83 à 0.04. Tout se passe comme si devant une tâche de conversion nous ne pouvions observer que des comportements de réponses instables. En tout cas, deux facteurs semblent jouer dans cette variation :

a) les registres en présence :

Comme nous l'avons déjà indiqué, le fait de savoir produire une représentation dans l'un ou l'autre registre n'implique pas la possibilité de passer de l'un à l'autre. Et les pourcentages de réussite dépendent de la nature des deux registres mis en correspondance. C'est à dire, **nous ne pouvons pas attribuer le même degré de difficulté à tous les passages ayant le même registre de départ, mais un registre d'arrivée différent.** Ainsi :

- le taux de réussite pour le passage tableau → graphique n'est pas inférieur à 0.36 (cf. Tableau 8), mais celui pour le passage tableau → écriture symbolique peut tomber à 0.06. Cela montre que ce n'est pas seulement le registre de départ qui importe, mais aussi le registre d'arrivée.
- le taux de réussite du passage graphique → tableau varie de 0.64 jusqu'à 0.10, mais le taux de réussite du passage graphique → écriture symbolique ne dépasse pas 0.05!
- le taux de réussite du passage écriture symbolique → tableau est autour de 0.72, mais le taux de réussite du passage écriture symbolique → graphique est autour de 0.40.

b) le sens de la conversion :

Lorsque les deux registres en présence sont les mêmes on pourrait croire que la tâche de conversion peut être considérée comme la même. Il n'en est rien "... les règles de conversion ne sont pas les mêmes selon le sens dans lequel le changement de registres est effectué" (Duval, 1993).

Les résultats présentés dans les tableaux précédents montrent que la différence de réussite entre le passage direct et le passage inverse des deux registres devient vraiment spectaculaire quand *l'un des deux registres est le registre de l'écriture symbolique :*

- Nous remarquons une chute importante aux items où le *registre de l'écriture symbolique apparaît comme registre d'arrivée*, ayant comme registre de départ un des deux autres registres (cf. TS1, TS2 et GS au Tableau 7). Ce passage apparaît comme le plus difficile parmi tous ceux demandés dans les deux questionnaires. Les taux de réussite varient entre 0.08 et 0.04.
- Par contre le passage inverse, où *le registre de l'écriture symbolique apparaît comme registre de départ* (cf. ST1, ST2, SG au Tableau 7), est plus facile et les taux de réussite varient de 0.75 jusqu'à 0.35.

Pour compléter ces observations, voici des résultats plus détaillés, par groupe d'étudiants, pour quelques items de la deuxième enquête (Enquête Mars 1993 - Tableau 7). Nous avons retenu les situations de vecteurs pour lesquelles la conversion doit être effectuée dans les deux sens.

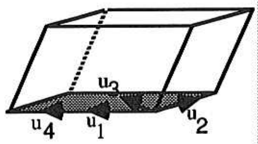
Registre graphique (G)	**Registre de l'écriture symbolique (S)**	Effectifs de chaque groupe d'étudiants	$G \to S$	$S \to G$	$G \leftrightarrow S$
	$u_1 \in R^3, u_2 \in R^3,$ $u_3 \in R^3, u_4 \in R^3$ $u_1 = 1\,u_1 + 0\,u_2$ $u_2 = 0\,u_1 + 1\,u_2$ $u_3 = k\,u_1 + m\,u_2\,;\, k \in R, m \in R$ $u_4 = n\,u_1 + 0\,u_2\,;\, n \in R$	E1 : 37 E2 : 39 E3 : 23 T1 : 29 T2 : 16	.03 .03 .09 .10 .00	.30 .46 .48 .34 .38	.00 .03 .09 .10 .00

Tableau 9 : Pour faciliter la présentation du tableau, la situation présentée dans la deuxième colonne a été légèrement modifiée par rapport à l'item posé : par exemple, un changement d'ordre des vecteurs peut apparaître (p. ex. le vecteur u_3 à la place du vecteur u_4) sans modification des relations. Dans la dernière colonne figure les taux de réussite pour la conversion directe et pour la conversion inverse.

Nous observons des écarts considérables dans les taux de réussite du tableau précédent. La comparaison des taux de réussites permet de constater que **les deux sens d'une conversion ne sont pas du tout des tâches équivalentes.** Ce phénomène peut être également observé pour la conversion entre le registre des tableaux et celui de l'écriture symbolique :

Registre des tableaux (T)	**Registre de l'écriture symbolique (S)**	Effectif de chaque groupe d'étudiants	$T \to S$	$S \to T$	$T \leftrightarrow S$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|} \hline 1 & 0 & k & p \\ \hline 0 & 1 & m & 0 \\ \hline \end{array}$	$u_1 \in R^2, u_2 \in R^2, u_3 \in R^2,$ $u_4 \in R^2$ $u_1 = 1\,u_1 + 0\,u_2$ $u_2 = 0\,u_1 + 1\,u_2$ $u_3 = k\,u_1 + m\,u_2$ $u_4 = p\,u_1 + 0\,u_2$	E1 : 37 E2 : 39 E3 : 23 T1 : 29 T2 : 16	.00 .00 .35 .00 .13	.84 .62 .74 .66 .75	.00 .00 .35 .00 .13

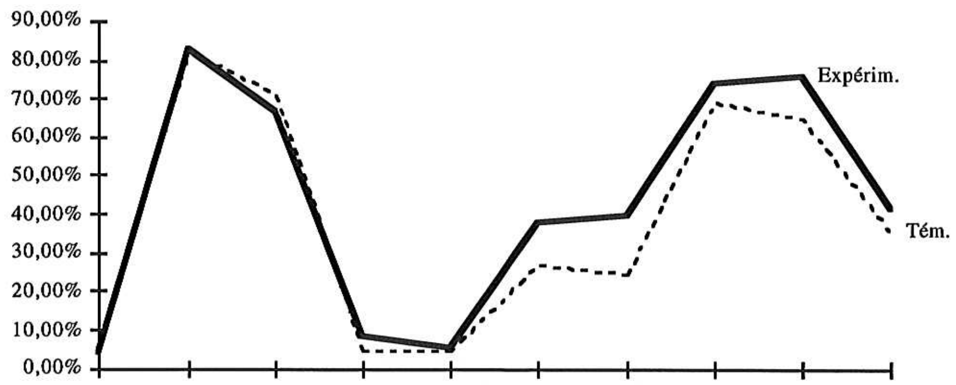
Tableau 10

Nous retrouvons entre *le registre des tableaux et le registre graphique* (voir tableau 8) le même phénomène de variation selon le sens de la conversion à effectuer. Pour la première situation dans le plan (cf. première ligne du tableau 8) nous avons un écart de réussite de 0.15 entre le passage dans un sens et celui dans le sens inverse. De même pour la cinquième situation (cf. cinquième ligne du tableau 8) dans l'espace où deux des trois flèches de référence sont données, il y a aussi un écart de 0.26.

B. Résultats dans le cadre d'une expérience d'enseignement

Nous avons organisé en 1993 une séquence didactique de huit heures dans le but de favoriser la coordination de registres. Nous présenterons cette expérience et son organisation dans un travail ultérieur. Le but de cette expérience était double : il s'agissait d'une part de voir *s'il était possible de réaliser un apprentissage de la conversion* et d'autre part de voir, au cas où un tel apprentissage réussirait, de voir *s'il facilitait l'accès aux objets et aux notions mathématiques.* Cette expérience a été faite avec des étudiants de la filière Mise à Niveau. Nous avons fait une première évaluation avant l'expérience (prétest) et une seconde quelques semaines après (post-test).

Tâche de conversion : résultats globaux du PRETEST



Graphique 1

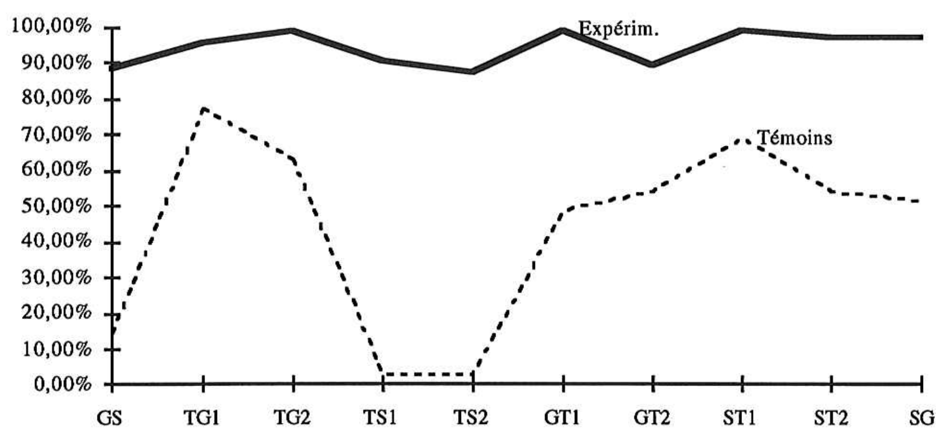
	effectif	GS	TG1	TG2	TS1	TS2	GT1	GT2	ST1	ST2	SG
Expériment.	99	.04	.83	.67	.08	.05	.37	.39	.74	.76	.41
Témoins	45	.07	.82	.71	.04	.04	.27	.24	.69	.64	.36

Rappel : **G** : registre graphique
T : registre des tableaux
S : registre de l'écriture symbolique
GS : registre **G**raphique vers registre de l'écriture **S**ymbolique, etc. ...

Nous pouvons voir que les deux populations (expérimentale et témoin) sont représentées par des courbes qui se confondent presque. Le comportement des sujets des deux groupes est le même devant des tâches de conversion. Nous pouvons dire qu'elles sont des populations du même niveau : des questions purement mathématiques ont aussi été posées, corroborant la similitude observée pour les tâches de conversion.

Regardons maintenant les résultats du post-test pour les tâches de conversion :

Tâche de conversion : résultats globaux du POST-TEST



Graphique 2

	effectif	GS	TG1	TG2	TS1	TS2	GT1	GT2	ST1	ST2	SG
Expériment.	83	.88	.95	.99	.90	.87	.99	.89	.99	.96	.96
Témoins	35	.14	.77	.63	.03	.03	.49	.54	.69	.54	.51

Nous voyons que les deux courbes sont maintenant complètement séparées. La courbe de la population témoin garde à peu près le même profil que pour l'évaluation du prétest. En revanche celle de la population expérimentale oscille près d'une réussite totale pour tous les items, y compris ceux qui sont les plus difficiles, c'est-à-dire ceux qui demandent une conversion vers le registre de l'écriture symbolique. Cette évolution spectaculaire sur les tâches de conversion s'est accompagnée d'une évolution notable dans toutes les questions plus proprement mathématiques. Réservant la discussion et l'interprétation des résultats pour le cadre d'un autre travail, nous nous contenterons de quelques indications sur les deux points suivants :

a) La notion de vecteur

Une question sur la notion de vecteur avait été posée au prétest et elle avait mis en évidence la confusion de l'objet vecteur avec un de ses représentants. Une question analogue a été aussi posée dans le post-test.

La grande majorité des étudiants des groupes expérimentaux (80%) a réussi de *dissocier le vecteur de son aspect purement géométrique*. Leurs justifications s'appuient sur la dimension de l'espace vectoriel qui peut être supérieure à 3, ou sur les différents types de représentation d'un vecteur. Voici quelques réponses typiques :

" ... un vecteur n'est pas seulement un segment de droite. C'est aussi un élément d'un espace vectoriel qui peut s'écrire comme combinaison linéaire d'autres vecteurs."

"Un vecteur peut être une matrice, un tableau, appartenir dans un espace vectoriel dont la dimension est supérieur à 3 ; donc on ne peut pas le représenter comme un segment de droite."

Par contre aucun changement ne peut être remarqué sur l'aspect de la notion de vecteur chez les étudiants de la population témoin comme nous pouvons voir dans le tableau ci-dessous. La plus grande partie des étudiants s'en tient à l'aspect géométrique pour la notion de vecteur et reste attaché à la définition *"un vecteur est l'ensemble de bipoints équipollents, orientés et normés"*.

Population expérimentale		Population témoin	
Prétest (effectif : 99)	Post-test (effectif : 83)	Prétest (effectif : 45)	Post-test (effectif : 35)
.09	.80	.29	.20

Tableau 11 : L'aspect "algébrique" de la notion de vecteur.

Un enseignement basé sur la coordination des registres de représentation peut donc aider les étudiants à distinguer l'objet défini et son représentant.

b) Exercices purement mathématiques

Il s'agit de questions qui n'avaient pas été abordées pendant l'enseignement. Nous avons pu observer chez les expérimentaux une différence significative de réussite. Deux types d'exercices ont été posés :

- les exercices où nous avons demandé de *trouver une famille de vecteurs avec une propriété précise* : la différence des taux de réussite entre les deux populations s'élève à 0.45, et
- les exercices où une *difficulté de type logique intervient* : ce sont les moins bien réussis dans les deux populations, mais nous avons pu constater un taux de réussite nettement supérieure en faveur de la population ayant eu l'enseignement centré sur la coordination des registres (0.09 pour la population témoin et 0.27 pour la population expérimentale).

IV. CONCLUSIONS

Un travail systématique sur la conversion de différents registres de représentation donne des résultats très intéressants à plusieurs niveaux. Il permet de :

1/ faire apparaître des difficultés généralement non remarquées parce qu'elles se situent à un niveau considéré généralement comme élémentaire

Le fait de travailler avec des situations simples, dans différents types de représentations, nous permet de repérer des erreurs très essentielles que nous ne pouvons pas remarquer en traitant une situation beaucoup plus complexe. Par exemple, pendant le passage du registre graphique vers le registre des tableaux (ou l'écriture symbolique), nous avons pu remarquer que la situation donnée : "quatre vecteurs coplanaires dans l'espace" est traduite par "quatre vecteurs du plan", puisque ... la troisième dimension de l'espace n'est pas nécessaire pour les décrire! De même un travail systématique sur le registre de la langue naturelle et le passage vers le registre de l'écriture symbolique que nous n'avons pas présenté dans le cadre de cet article met en évidence des erreurs qui expliquent la grande difficulté de compréhension des formules les plus compliquées, comme celle de la définition de l'indépendance linéaire.

2/ faire distinguer clairement l'objet mathématique et ses représentants

En mobilisant plusieurs registres de représentation pour l'appréhension conceptuelle de cet objet, nous mettons en évidence tous les aspects de cet objet en évitant la confusion de l'objet avec un de ses représentants. Plus précisément, pour la notion de vecteur, la grande majorité des étudiants est passé d'un aspect purement géométrique à un aspect "algébrique".

3/ favoriser un transfert des connaissances acquises

Un apprentissage centré sur la conversion de représentations aide les étudiants à mobiliser les connaissances acquises, même lorsque l'on sort du contexte dans lequel s'est fait l'apprentissage. Et ceci, grâce à cet apprentissage qui peut fournir aux étudiants un modèle plus familier où les traitements sont plus simples ou plus faciles à réaliser.

Une analyse plus fine des résultats obtenus est en cours. L'interprétation de ces résultats fera l'objet d'une prochaine publication où la grande importance du registre de la langue naturelle apparaîtra aussi, ainsi que son articulation avec le registre de l'écriture symbolique. Et ceci est un passage qui ne peut pas être négligé pour un enseignement de l'algèbre linéaire.

REFERENCES

DUVAL R. (1993a), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n°5, IREM de Strasbourg.

DUVAL R. (1993b), *Sémiosis et Noésis*. Preprint.

ROGALSKI M. (1990), Pourquoi un tel échec de l'enseignement de l'algèbre linéaire?, *Enseigner autrement les mathématiques en Deug A première année,* publication inter IREM.

ROGALSKI M. (1991), *Un enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG A première année,* Cahier DIDIREM n°11, IREM de Paris VII.

PAVLOPOULOU K. (1994), Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg (à paraître).

Premières approches pour l'étude de l'enseignement de l'algèbre linéaire à l'Université

Jean-Luc Dorier

This paper describe some aspects of research about the teaching of linear algebra in first year of French science university. We first present a short overwiew of the genesis of elementary concepts in linear algebra. Then we analyse the nature of the teaching of linear algebra through observations of student's productions and we show some procedures that students use according to the tasks.

Tout d'abord précisons que les concepts mathématiques auxquels nous nous sommes intéressés représentent le minimum de ce qui est généralement enseigné en première année du cursus universitaire scientifique (DEUG SSM 1) en cours d'algèbre linéaire, c'est-à-dire : espace vectoriel, sous-espace, famille génératrice, sous-espace engendré, dépendance et indépendance linéaires, familles libre et liée, base, dimension, rang, somme, somme directe, supplémentaire, application linéaire, systèmes d'équations linéaires.

Dans l'édifice mathématique, l'algèbre linéaire n'est apparue en tant que telle qu'au début du siècle, aujourd'hui pourtant , sa place est primordiale. Au niveau de l'enseignement elle est apparue dans le secondaire à la fin des années soixante, et a aujourd'hui entièrement disparu. En premier cycle universitaire ou en classe préparatoire, elle conserve cependant une place importante.

Or l'expérience montre que l'enseignement de l'algèbre linéaire est émaillé de difficultés dont quelques unes sont particulièrement persistantes chez certains étudiants et laissent les enseignants désarmés [RG]. Les étudiants se plaignent par exemple beaucoup du formalisme lié à l'algèbre linéaire et ressentent ce domaine comme étranger à leurs pratiques mathématiques. Ce

© Annales de Didactique et de Sciences Cognitives
5 (1993) (p.95-123) - IREM de Strasbourg

phénomène est en partie lié à l'absence d'enseignement antérieur d'algèbre, mais il induit des pertes de sens et des dérapages, que les enseignants et les étudiants ont du mal à gérer.

Or peu de travaux traitent de l'algèbre linéaire, en France il y a ceux de A. Robert et J Robinet ([RO3-4] et [RI]), aux USA ceux de G Harel [HR1-4] et en allemagne ceux de B. Artmann [AT1-5].

Nous avons voulu examiner les caractéristiques d'un enseignement standard d'algèbre linéaire et analyser les effets qu'il produit au niveau de l'apprentissage. Pour ce faire, nous avons analysé des sujets de devoirs et les réponses des étudiants sur toute une année universitaire, en première année d'une section scientifique. Ce sont les résultas de ces analyses que nous présenterons ici.

Mais avant d'examiner l'enseignement, il nous paraît important de regarder d'un peu plus près l'évolution historique.

I - Quelques éléments importants de la genèse de l'algèbre linéaire

Dans un fascicule d'une quarantaine de pages [RI], J. Robinet présente une esquisse de la genèse des concepts d'algèbre linéaire enseignés en DEUG. Dans une première approche, cette analyse nous a semblé un outil suffisant pour comprendre les aspects essentiels de cette genèse et pour se faire une idée du sens des concepts en jeu. Pourtant certains points tels que les liens avec l'étude des systèmes d'équations linéaires, la genèse du concept de rang ou le rôle joué par la théorie axiomatique nous ont semblé nécessiter une analyse plus détaillée.

Nous avons donc choisi de faire un travail de synthèse en regroupant le plus grand nombre d'éléments qui permettraient de mieux comprendre ce qui avait participé à l'émergence des concepts élémentaires d'algèbre linéaire et à leur regroupement dans une théorie axiomatisée des espaces vectoriels, en même temps que de développer plus particulièrement et de façon originale les points qui avaient été jusqu'alors, à notre avis, délaissés dans les autres analyses.

Il est difficile de tirer des conclusions générales d'une telle étude, sans en réduire la portée.

Nous allons cependant essayer de résumer les éléments essentiels qui composent la genèse des concepts élémentaires d'algèbre linéaire, comme nous l'avons analysée.

i) Les concepts d'algèbre linéaire ont eu très rapidement une nature polymorphe. Ils apparaissent, implicitement ou explicitement, et en général sous une forme différente de ce que nous connaissons aujourd'hui, à des périodes parfois très rapprochées, dans de nombreux domaines : les systèmes d'équations linéaires, la géométrie, l'arithmétique, l'étude des quadriques, les transformations linéaires, les équations différentielles, etc...

ii) Cependant deux domaines, les systèmes d'équations linéaires et la géométrie, ont joué des rôles privilégiés dans cette genèse, bien qu'ils aient agi à des niveaux très différents.

a) L'étude des systèmes linéaires a été, dès le départ, un domaine privilégié. Elle a été à l'origine de l'émergence des tout premiers concepts, et a aussi été le cadre de l'élaboration des premiers résultats théoriques même informels.
Par ailleurs, même si l'étude des systèmes linéaires a connu une période moins productive entre la fin du XVIIIème siècle et la fin du siècle suivant, la généralisation aux systèmes d'une infinité de variables et d'équations, rencontrés dans des problèmes d'analyse fonctionelle, a été pendant la fin du XIXème et le début du XXème siècle, le cadre principal -si ce n'est unique- où se faisaient les progrès dans l'étude des espaces de dimension infinie.
Ainsi l'étude des systèmes linéaires a eu un rôle durable et important dans la genèse des concepts d'algèbre linéaire, non seulement à leurs débuts, où elle était le cadre principal de leur développement, mais encore récemment même si c'est sous un aspect généralisé.

b) La géométrie, elle, a été le cadre à partir duquel se sont faites des généralisations de plus en plus vastes. C'est une sorte de laboratoire d'essai, qui a permis de mettre au point les idées maitresses, que l'on a exportées ensuite, avec le vocabulaire et certaines méthodes, à d'autres domaines.
Il faut bien distinguer cependant la généralisation par augmentation du nombre de coordonnées (aspect analytique) et la généralisation due à l'émergence du concept de structure algébrique (aspect lié à la recherche d'un calcul géométrique intrinsèque). Ces deux aspects, qui se sont développés à partir du cadre géométrique, sont complémentaires par rapport à l'algèbre linéaire mais ils ont eu des sources et des conséquences différentes.

iii) Le concept de rang a longtemps été, même de façon implicite au centre des idées productrices en algèbre linéaire. Il s'est dégagé pas à pas de l'étude de plus en plus approfondie des systèmes linéaires, depuis le paradoxe de Cramer (1750) jusqu'aux travaux de Frobenius (1875). Notre étude montre que l'émergence de ce concept a nécessité plusieurs adaptations et changements de point de vue.

Schématiquement, au début du XVIIIème on admet d'une part que deux courbes algébriques de degré n se coupent en n^2 points, et d'autre part que $n(n+3)/2$ points déterminent entièrement une courbe algébrique d'ordre n. Si $n \geq 3$, apparaît alors le paradoxe dit de Cramer, puisqu'il semble que deux courbes se coupent en plus de points qu'il n'est nécessaire pour en définir une seule.

En 1750 Euler, s'intéressant à ce problème, introduit pour la première fois la notion de dépendance d'équations linéaires et lève le paradoxe en mettant en évidence la dépendance des n^2 équations linéaires obtenues en écrivant avec des coefficients indéterminés l'appartenance à une courbe algébriques de degré n de n^2 points communs à deux courbes. Il conjecture même pour n=4 et 5 le nombre de relations de liaison qui doivent exister entre ces équations, ce qui peut être vu comme une forme primitive du concept de rang.

Après 1750 et les travaux de Cramer, la théorie des déterminants règne en maître sur l'étude des systèmes linéaires. Le concept de rang se trouve alors quelque peu occulté derrière la notion de déterminant principal. Essentiellement opérationelle donc calculatoire, cette technique ne nécessite pas de mettre en évidence l'invariance de l'ordre des déterminants principaux.

En 1875 Frobenius introduit la notion de dépendance des solutions et la relie avec celle des équations. Il est le premier à donner une définition du rang et à démontrer les premiers résultats qui s'y rapportent.

iv) Longtemps une unification implicite des "concepts linéaires" s'est faite autour de certains aspects de la théorie des déterminants. Et puis la définition descriptive des espaces vectoriels comme n-uplets de nombres a rassemblé la plupart de ces résultats, de façon encore très informelle et sans qu'il y ait de réelle théorie centrale. L'œuvre de Grassmann et les premières approches axiomatiques à la fin du XIXème siècle offraient des outils théoriques plus puissants et proposaient un cadre plus général, mais il furent ignorés pour des raisons diverses, dont la principale est le fait qu'on n'en voyait pas l'utilité.

Le passage à une théorie axiomatique regroupant tous les concepts a été tardif. Les raisons qui l'ont justifié tiennent essentiellement à des soucis d'organisation et de cohérence des savoirs mathématiques permettant d'unifier des domaines a priori distinct et de simplifier la résolution des problèmes aussi bien que la transmission du savoir. Cette unification est un des aspects d'une transformation plus générale de l'édifice des mathématiques qui s'est opérée dans la première moitié du XXème siècle, faisant entre autres de l'algèbre non plus l'étude des équations mais l'étude des structures. Par ailleurs, les applications à des espaces de fonctions, et principalement les travaux de Banach ont montré l'intérêt théorique de l'approche axiomatique pour rendre compte des résultats de l'algèbre linéaire en dimension infinie (par exemple le fait que deux espaces de même dimension linéaire, c'est-à-dire tels que chacun est isomorphe à un sous-espace fermé de l'autre, ne sont pas nécessairement isomorphes)

Ainsi l'utilisation de la théorie axiomatique des espaces vectoriels comme cadre privilégié (voire unique) de l'étude des concepts et des résultats de l'algèbre linéaire constitue une reconstruction du savoir qui est un choix récent, obéissant essentiellement à un souci d'organisatio. Cela aboutit à l'unification et la simplification de l'étude de différents domaines, grâce à des outils et des méthodes généraux et performants.

Ceux-ci ne sont pourtant réellement nécessaires que dans le cadre des espaces de dimension infinie et pour des questions non élémentaires.

II- Méthode d'analyse pour les devoirs.

Nous présentons maintenant notre analyse dans le suivi de productions d'étudiants [DR1,3-4]

1- Nos objectifs

- Nous voulions tout d'abord mieux baliser le contenu de l'algèbre linéaire telle qu'elle est enseignée et évaluée en première année d'université, au moins en relevant les types de tâches proposées aux étudiants et les procédures qu'ils emploient pour les aborder.

- Nous voulions ensuite mieux décrire des types d'évolution des compétences en algèbre linéaire chez un même individu, en particulier en fonction de ses connaissances antérieures en logique et en algèbre élémentaires. Il s'agissait donc de se concentrer sur les méthodes, procédures et erreurs des étudiants en fonction des tâches proposéees d'une part, et des connaissances antérieures de chaque individu d'autre part. On verra que la méthodologie employée devrait permettre, à partir d'un échantillon représentatif, de tracer des types d'histoires individuelles.

- Nous voulions enfin dégager des hypothèses sur les interactions entre les différents domaines internes ou connexes à l'algèbre linéaire. Cette dernière étape nous a conduit à nous interroger sur les contenus possibles d'un cours d'algèbre linéaire et leur signification, en fonction de différents objectifs d'apprentissage.

2- Méthodologie

Nous avons choisi une section de DEUG SSM quasi standard, dans laquelle nous n'interve-nions ni en tant qu'enseignant ni en tant que didacticien. Nous avons analysé les copies d'un prétest de logique élémentaire et d'algèbre, et de tous les exercices ou problèmes faits en temps limité et sous surveillance portant sur l'algèbre linéaire, pendant une année universitaire.

Voici le nom de chaque devoir et le nombre de copies analysées :

- Prétest :	84 copies.
- Devoir surveillé n°1 :	39 copies.
- Partiel :	74 copies.
- Devoir surveillé n°2 :	46 copies.
- Test "vrai/faux" :	58 copies.
- Devoir surveillé n°3 :	58 copies.
- Devoir surveillé n°4 :	50 copies.
- Examen :	73 copies.

Avec les recoupements, nous avons disposé des huit copies pour malheureusement seulement dix-neuf étudiants, à cause de raisons matérielles indépendantes de notre volonté.
Les sujets de ces devoirs sont le produit de la seule équipe enseignante, hormis le prétest et le "vrai/faux", qui ont été mis au point en collaboration avec des didacticiens. De même, à part quelques interventions de nature expérimentale en début d'apprentissage, l'enseignement dans la section étudiée aussi bien que les options d'évaluation ont été "habituels". Nous avons ainsi délibéremment choisi de nous placer dans des conditions réelles quasi standard.
Pour chaque devoir (prétest, devoirs surveillés, tests, partiel et examen) nous avons commencé par faire une "analyse a priori", c'est-à-dire :

- une analyse du contenu de chaque question, en déterminant le type de tâche proposée, les connaissances qu'elles mettent en jeu, le type de question, la part d'implicite qu'elle comporte, sa place dans l'ensemble de l'exercice ou du devoir ...
- mais aussi en fonction de cette première analyse, l'explicitation des types de procédures que les étudiants peuvent mettre en œuvre, les raisons qui peuvent les y pousser, les savoirs et les conceptions correspondants, l'implication que cela peut avoir sur l'ensemble de l'exercice ou du devoir...

L'analyse a priori est une méthode qui utilise les outils et les concepts de la didactique des mathématiques. Elle permet de recueillir des données qui ne reposent pas sur les mêmes critères d'évaluation que ce que ferait un enseignant qui voudrait noter ces étudiants. En particulier l'explicitation en terme de procédures permet de mieux différencier l'apprentissage de la réussite.

a- Le prétest

Le texte de ce prétest est donné en annexe.
A partir de l'analyse a priori, nous avons défini, en fonction des tâches proposées et des cadres d'intervention des concepts, des "blocs de connaissance", sur le modèle proposé par A. Robert et F. Boschet ([RO1] et [BC]). Ces blocs, qui rendent compte des résultats de chaque étudiant au prétest, nous ont permis d'obtenir une information plus maniable et adaptée à la suite de l'analyse.

Pour définir les blocs liés à la logique, nous avons distingué tout d'abord deux catégories de contenus:

(EQ) Les questions faisant intervenir une implication et/ou une équivalence logique
(QA) Les questions liées à des problèmes de quantification

Puis trois niveaux :

(N1) La compréhension brute : on demande si une proposition écrite en langage formel est vraie ou fausse
(N2) On demande d'effectuer une tâche entièrement dans le domaine formel, en l'occurence de donner la négation d'une proposition quantifiée
(N3) Il faut passer d'un cadre "informel" (langage usuel, graphisme,...) à la traduction en langage formel ou vice-versa

Il n'y a pas a priori de hiérarchie évidente entre les trois niveaux ; si ce n'est peut-être que N1 correspond à la tâche la plus simple. Il s'agit en fait au sens de R. Douady [DO], d'être capable de faire fonctionner un même concept dans différents cadres (ce qui correspond à nos niveaux). Or des travaux ont montré qu'à certains seuils, il est plus efficace d'avoir des connaissances même moindres dans plusieurs cadres que des connaissances plus fines dans un nombre restreint de cadres, ce qui justifie cette différenciation en niveaux [RO1].

En outre le découpage par bloc ne suit pas nécessairement le découpage en questions à la lettre,

c'est-à-dire que l'on peut distinguer des niveaux différents à l'intérieur d'une même question. Par exemple examinons les questions 9 et 10, dans chacune on demande de dire si un énoncé formalisé est vrai ou faux, d'en écrire la négation et de dire si la négation est vraie ou fausse. Ecrire les deux négations entre évidemment dans le bloc QA2. Mais pour les réponses vrai/faux, la situation est plus complexe.
Tout d'abord nous avons tenu compte de la cohérence des réponses vrai/faux par rapport aux négations éventuellement fausses données par les étudiants. Mais il y a un autre type de cohérence à avoir, en effet si une proposition est vraie sa négation est fausse et vice versa, et ce type de connaissance se rattache au niveau 2. Ainsi nous avons fait intervenir dans QA2, une bonification si dans chacune des deux questions 9 et 10, les réponses vrai/faux étaient cohérentes par rapport à cette règle, même si les deux réponses étaient fausses par ailleurs.
Vues les tâches impliquées dans le prétest, nous avons eu à considérer cinq blocs: EQ1; EQ3; QA1; QA2 et QA3.
Pour les questions d'algèbre (moins nombreuses) nous avons distingué les questions touchant à des domaines numériques **(AN)** de celles relatives aux structures **(AS)**.

Pour chaque bloc, nous avons défini en fonction de l'analyse a priori et des procédures employées par chaque étudiant une note entre 0 et 1.

Nous avons ensuite examiné la répartition des notes obtenues à chaque bloc par l'ensemble des étudiants, ce qui nous a permis de dégager trois niveaux d'acquisition (bloc vide, plein et demi-plein), en essayant à chaque fois d'équilibrer numériquement la répartition et en essayant de donner une interprétation de l'appartenace à chaque bloc. Nous avons ensuite créé la variable **B** qui comptabilise le nombre de blocs vides pour un même individu, ce qui mesure donc son nombre de lacunes.

Dans un dernier temps nous avons déterminé les blocs les plus significatifs. Ceci nous a conduit à créer un nouveau bloc **Q** à partir des blocs QAi. Finalement nous avons gardé avec la note globale **N** au prétest, les sept blocs suivants, EQ1 plein **(EQ1(2))**, EQ3 plein et vide **(EQ3(2) et EQ3(0))**, Q plein et vide **(Q(2) et Q(0))**, AN et AS pleins **(AN et AS(2))**. De plus pour le nombre de lacunes nous avons choisi la répartition **B=0, B≤1, B≤2 et B≥3.** Nous avons ainsi réduit l'information, mais cela est compensé par la possibilité d'interpréter ces résultats de façon opérationnelle dans la suite.

b- Les autres devoirs

Pour les autres devoirs, en nous basant sur l'analyse a priori, nous avons codifié les procédures le plus souvent rencontrées, établi une note à chaque tâche en faisant intervenir des systèmes de bonus ou de malus en fonction de l'emploi de certaines procédures, puis nous avons donné sous forme de tableau les résultats du dépouillement en reportant en lignes les étudiants et en colonne les codes et les notes question par question.
Cette méthode nous a conduit à donner une note globale à chaque devoir. en étudiant la courbe des notes, nous avons divisé chaque échantillon en trois tranches (dénommées : supérieure, médianne et inférieure) numériquement équilibrées. Cette dernière étape globalisante donc réductrice d'information correspond encore une fois à un souci de maniabilité des données.
Dans un deuxième temps, nous avons testé la représentativité de l'échantillon, par rapport aux résultats du prétest. Ainsi nous avons regroupé dans un même tableau, pour la population totale évaluée au prétest et pour l'échantillon des étudiants ayant rendu le devoir correspondant, la moyenne et l'écartype au prétest, les pourcentages d'étudiants ayant obtenu les blocs EQ1(2), EQ3(2), EQ3(0), Q(2), Q(0), AN, AS(2), B=0, B≤1, B≤2, B≥3.

Chaque fois, nous avons obtenu des écarts très faibles (≤10% et même souvent ≤5%).
De même nous avons vérifié la représentativité de l'intersection de tous les échantillons, c'est-à-dire des dix-neuf étudiants dont nous avions l'ensemble des copies, non seulement par rapport au prétest mais aussi pour chaque devoir en comparant les moyennes et écartypes et le nombre d'étudiants dans chacune des trois tranches de chaque devoir. On a pu observer que ce dernier échantillon était globalement légèrement plus fort, ce qui s'explique assez bien puisque ces étudiants avaient assisté à tous les devoirs pendant toute l'année, or on sait que l'assiduité et souvent corrélée à un meilleur niveau. Néanmoins on peut dire qu'à cette remarque près les dix-neuf étudiants de l'échantillon final sont assez représentatifs des quatre-vingt quatre de départ.
Par ailleurs les étudiants testés provenaient de trois groupes de travaux dirigés différents. Nous avons donc, à chaque devoir, essayé de mettre en évidence les caractéristiques de chaque groupe.

Dès le prétest on peut assez bien différencier les groupes par leur moyenne et leur écart-type. En effet le groupe 2 a la plus faible moyenne (12,8) et le plus grand écart-type (3,36), il est donc globalement faible mais hétérogène. Le groupe 3 a lui la meilleure moyenne (13,8), mais un

écart-type encore assez élevé (3,08), c'est donc un groupe globalement fort mais aussi assez hétérogène. Enfin le groupe 1 a une assez bonne moyenne (13,2) et un écart-type plus faible (2,59), c'est donc un groupe moyen et plutôt homogène.
Il est intéresant de constater que ces caractéristiques se retrouvent tout au long de l'année en allant même, dans une certaine mesure, en s'accentuant. Ainsi le groupe 1, devient de plus en plus homogène tout en obtenant des notes globalement plus élevées. C'est celui qui a en général, le plus d'étudiants, en pourcentage, dans la tranche médianne des notes à chaque devoir. On peut avancer l'hypothèse que l'homogénéité a favorisé un nivellement par le haut.

Le groupe 3 reste toujours globalement le plus fort (il faut préciser qu'il comportait un fort pourcentage de redoublants), par contre son hétérogénéïté a tendance à s'accentuer. Il semblerait dans ce cas que les évolutions individuelles aient pris le dessus sur les effets de groupe. Enfin le groupe 2 reste globalement faible et très hétérogène, c'est en général celui qui présente le plus d'étudiants dans la tranche inférieure des notes à chaque devoir, tout en maintenant un pourcentage assez constant dans la tranche supérieure.

Par ailleurs, à certaines questions, nous avons noté des différences de réussite assez nettes entre les groupes, qui ne peuvent s'expliquer que par la situation conjoncturelle de l'enseignement pratiqué. Ce phénomène est somme toute assez rare, mais quand nous avons cru l'avoir détecté, nous avons essayé de ne pas trop faire intervenir la question correspondante dans notre évaluation, pour ne pas biaiser les résultats.

Enfin nous avons également essayé d'évaluer la corrélation entre les résultats à chaque devoir et les résultats du prétest. Pour ce faire nous avons réalisé à chaque devoir pour l'échantillon testé, un tableau croisé. Celui comporte, en colonne les moyennes et écart-types au devoir et au prétest ainsi que le nombre d'étudiants ayant eu les blocs : EQ1(2), EQ3(2), EQ3(0), Q(2), Q(2), AN, AS(2), B=0, B≤1, B≤2, B≥3, et en ligne la répartition globale, les moyennes au devoir, et la répartition dans les trois tranches de notes au devoir. Chaque fois nous avons donné deux versions de ce tableau, une première où les pourcentages sont calculés sur la ligne, c'est-à-dire que pour chaque tranche de note on sait le pourcentage de gens qui ont eu tel ou tel bloc, et une deuxième version où les pourcentages sont calculés sur la colonne, c'est-à-dire que l'on sait dans chaque bloc les pourcentages d'étudiants dans chaque tranche de notes au devoir.

A titre d'exemple, voici les tableaux croisés prétest / DS n°3 :

	EFF	MOY	EQ1(2)	EQ3(2)	EQ3(0)	Q(2)	Q(0)	AN	AS	B=0	B≤1	B≤2	B>2
TOTAL	49	13,5	55%	20%	18%	37%	35%	82%	61%	39%	66%	86%	14%
MOY	4,8		5,1	6,1	3,8	5,6	4,4	4,7	4,9	5,4	5,3	5	3,1
N≤3	12	12,3	33%	8%	33%	17%	42%	83%	58%	25%	42%	67%	33%
4≤N≤5	19	13,3	68%	11%	11%	32%	37%	89%	47%	37%	68%	95%	5%
N≥6	18	14,6	56%	39%	17%	56%	27%	72%	78%	50%	78%	89%	11%

(les pourcentages sont calculés sur la ligne)

	EFF	MOY	EQ1(2)	EQ3(2)	EQ3(0)	Q(2)	Q(0)	AN	AS	B=0	B≤1	B≤2	B>2
TOTAL	49	13,5	27	10	9	18	17	40	30	19	32	42	7
MOY	4,8		5,1	6,1	3,8	5,6	4,4	4,7	4,9	5,4	5,3	5	3,1
N≤3	24%	12,3	15%	10%	44%	11%	30%	25%	23%	16%	16%	19%	57%
4≤N≤5	39%	13,3	48%	21%	23%	34%	41%	42%	30%	37%	40%	43%	14%
N≥6	37%	14,6	37%	70%	34%	56%	29%	32%	47%	47%	44%	38%	29%

(les pourcentages sont calculés sur la colonne)

c- Analyse globale

Dans un dernier temps nous avons fait une analyse globale des corrélations entre tous les devoirs et le prétest. Pour cette partie, en collaboration avec un statisticien (C. Lavergne), nous avons utilisé le logiciel SPAD.N (système portable pour l'analyse des données), pour réaliser les analyses en composantes principales nécessaires.

Le détail de la méthodologie employée ici dépasserait le propos de cet article et nous renvoyons le lecteur intéressé aux réferences données en début de paragraphe.

III - Les résultats

Les tâches

Pour déterminer la nature des tâches proposées, nous nous sommes essentiellement appuyés sur les analyses a priori que nous avons faites de chaque devoir. Nous donnons ci-dessous les éléments généraux principaux que nous avons dégagés.

- La nature même des concepts d'algèbre linéaire nous semble conduire à un enseignement dichotomique où coexistent d'une part des problèmes développant des "techniques-objets" dans un cadre purement formel et d'autre part des problèmes concrets qui requièrent des aptitudes dans l'utilisation de techniques algébriques parfois pointues et où les concepts d'algèbre linéaire ne sont pas absolument nécessaires, si bien que les étudiants ne les utilisent que par un effet de contrat ("c'est la question posée", "il faut utiliser les connaissances du cours"), faute de voir la généralisation ou la simplification qu'ils apportent. Nos analyses ont permis de mettre à jour cette dichotomie à travers la nature des sujets abordés.

Dans l'enseignement, on rencontre d'abord des problèmes qui présentent une utilisation de l'algèbre linéaire pour résoudre un problème qui se place dans un autre cadre (polynômes, fonctions, suites etc...). Ils présentent deux spécificités :

* L'utilisation de l'algèbre linéaire est locale, et nécessite la résolution de ce qu'on peut appeler des questions d'approche, qui se situent entièrement dans le cadre où le problème est posé. Or certaines de ces questions d'approche posent des difficultés d'ordre technique aux étudiants qui ne sont souvent pas familiers avec le cadre dans lequel on les fait travailler. Ainsi dans certains des devoirs que nous avons analysés (DS1, partiel et DS2), beaucoup d'étudiants n'ont pas réussi à faire les premières questions et se sont trouvés bloqués ou ont résolu la fin en contournant la démarche proposée par le devoir, c'est-à-dire en n'utilisant pas d'algèbre linéaire.

* Par ailleurs certains problèmes présentent des problèmes, où l'utilisation de l'algèbre linéaire peut être vue comme une simplification ou une généralisation, mais à condition qu'on ait les moyen de comprendre que cela offrent une méthode générale utilisable telle quelle, avec d'autres données numériques, et même généralisable à des problèmes voisins. Mais les problèmes posés aux étudiants ne sont pas en général présentés dans cette optique, et aucun commentaire métamathématique ne les acompagne. Aussi les étudiants passent-ils souvent complètement à

côté du but, ils arrivent même parfois à ne pas utiliser d'algèbre linéaire pour répondre aux questions. En tous cas s'ils utilisent de l'algèbre linéaire ce n'est qu'à cause du découpage des questions qu'on leur impose, ou sous l'effet du contrat général qui veut qu'on utilise dans les problèmes les notions en cours d'apprentissage. Mais le côté simplificateur et unificateur des concepts échappe trop souvent aux étudiants. L'activité devient entièrement artificielle et l'approche épistémologique est impossible.

On constate par ailleurs que rapidement en cours d'apprentissage, les problèmes proposés se situent entièrement dans des espaces formels. Singulièrement cette tendance est irréversible et après les quelques tentatives d'applications de l'algèbre linéaire à d'autres domaines, les devoirs ne visent plus que l'utilisation purement interne des concepts dans un contexte très général.
Ce deuxième type de tâches posent alors d'autres difficultés, en effet on constate souvent que les questions ne faisant intervenir que le cadre purement formel sont sources de réponses apparemment incohérentes dont on a l'impression que seule la pression de l'obligation à donner une réponse peut les justifier, ce que l'on peut appeler un comportement du type "la fin justifie les moyens".

En outre nos analyses ont permis de mettre à jour une deuxième dualité dans les types de tâches proposées, qui se superpose à la précédente. Schématiquement le premier type de tâches est calculatoire ou algorithmique, la trame de la question est connue de l'étudiant, seules les données sont nouvelles, le deuxième type touche aux questions plus conceptuelles où la tâche ne correspond pas à un raisonnement stéréotypé, mais nécessite une bonne connaissance intrinsèque des concepts souvent dans plusieurs cadres. Dans ces questions la part créative de l'étudiant est plus grande, et donc ces chances d'erreurs également. En effet outre les problèmes d'initiative, il y a de forts risques de dérapage et de perte de sens.

Cette distinction, calcul/concept dans les tâches, contrairement à la précédente n'est pas spécifique de l'algèbre linéaire. Son évolution est en fait un effet pervers du contrat pédagogique global, en particulier des options d'évaluation. La nécessité d'évaluer par un spectre de notes classant les étudiants selon des critères tranchés pousse toujours en effet à privilégier les calculs et les techniques algorithmiques au détriment de points plus conceptuels dont la mise en fonctionnement est difficilement évaluable.

Les diverses difficultés issues de ces deux dualités conduisent donc l'enseignement de l'algèbre linéaire à se réduire rapidement à des problèmes d'une part où il n'est plus fait référence à un cadre extérieur, donc à une vraie problématique, mais aussi où l'utilisation du formalisme est réduite, puisqu'enfin il ne s'agit plus ou moins que d'appliquer des algorithmes bien ciblés, à quelques variantes près. Ce constat est un peu sévère mais à peine exagéré. On a vu que les problèmes posés dans des cadres concrets engendrent des difficultés liées à des connaissances antérieures de techniques algébriques et que les problèmes trop formels conduisent à une perte de contrôle du sens par les étudiants qui sont prêts à écrire "n'importe quoi" pour donner une réponse. On comprend dans ces conditions l'évolution inéluctable que subissent les sujets des problèmes et le soulagement que peuvent ressentir les enseignants quand ils peuvent enfin aborder des questions de diagonalisation et de trigonalisation, qui font classiquement l'objet des sujets d'examen.

Les évolutions individuelles

Ceci dit, l'enseignement et les problèmes étant ce qu'ils sont, avec ces difficultés, quelles sont les grandes hypothèses que l'on peut avancer sur le comportement des étudiants en fonction des tâches proposées et des connaissances antérieures ?

La nature des compétences antérieures dans le domaine de la logique élémentaire semble avoir un effet sur la réussite globale en algèbre linéaire. Les deux domaines ne sont pas cependant dans une situation de transfert direct, il apparaît que dans le niveau d'acquisition des connaissances antérieures en logique, il existe un seuil global au delà duquel les chances de réussite en algèbre linéaire deviennent plus élevées. On peut penser qu'alors s'opère une transformation du quantitatif vers le qualitatif. L'important est de ne pas avoir de "trou" dans les connaissances antérieures, au delà d'un certain minimum de compétences dans le domaine de la logique élémentaire (le quantitatif), un réinvestisement peut s'opérer qui permet d'accéder à une connaissance nouvelle en algèbre linéaire donc plus fine, hiérarchiquement plus élevée (le qualitatif). En particulier la variable B est toujours la mieux corrélée dans nos analyses. Il est intéressant de remarquer que l'on retrouve peut-être ici une interprétation proche de l'idée piagétienne sur l'acquisition des différentes facettes d'un schème comme prérequis à l'acquisition du schème lui-même. Or ce résultat va à l'encontre de l'idée naïve, qui veut que les connaissances s'acquièrent par petits pas successifs, de proche en proche. Nous pensons plutôt et nos résultats semblent le confirmer que l'apprentissage est fait de ruptures et de sauts,

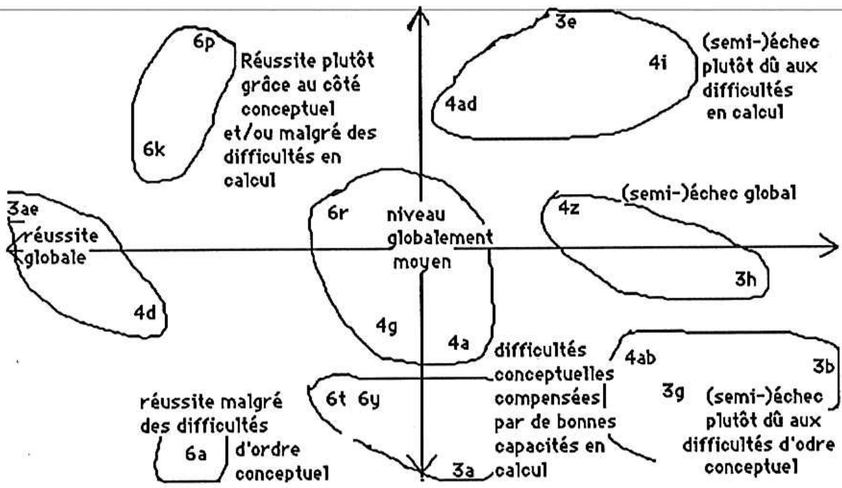
qu'alternent des périodes de déséquilibration et de rééquilibration permettant aux connaissances de s'organiser selon des processus plus complexes que la simple progression linéaire.
De plus ce résultat sur la corrélation aves les connaisssances antérieures est identique à celui trouvé par A. Robert à propos des concepts élémentaires d'analyse réelle [RO1].

Cependant certaines difficultés en algèbre linéaire, a priori très liées à des compétences de logique (par exemple la confusion entre hypothèse et conclusion dans la définition d'une famille libre), ne semblent pas être mieux résolues par les étudiants ayant les résultats les plus élevés au prétest de logique. On peut donc penser qu'indépendamment du constat précédent, un enseignement préalable de la logique ne résout pas tous les problèmes liés au formalisme de l'algèbre linéaire et que certaines questions de logique ne seront abordées avec profit que dans le cadre de l'algèbre linéaire.

La nature des problèmes d'algèbre linéaire favorise les erreurs du type "la fin justifie les moyens". La perte de contrôle du sens et le manque de recul sont des difficultés générales à toute activité mathématique, mais elles deviennent particulièrement fortes ici, d'une part dans les problèmes formels où les appuis ne sont pas solides et les dérapages fréquents, mais aussi dans les problèmes faisant référence à un cadre concret où la démarche est induite par les questions mais jamais explicitée par un discours métémathématique, et où il s'agit plus, finalement, de faire de l'algèbre linéaire (contrat) que de résoudre des problèmes.

Sur le plan individuel, on remarque qu'il existe des comportements très variés. Il faut distinguer la réussite aux problèmes algorithmisés, où l'aspect calculatoire est fort, et la réussite moins facilement évaluable à des questions mettant en jeu des connaissances plus conceptuelles. Les deux aspects ont des influences sur la réussite apparemment assez équilibrées mais aussi quasi indépendantes.

C'est ce qu'illustre le schéma ci-dessous, qui représente la position des étudiants dans le plan principal correspondant à l'ACP sur les notes des devoirs. (L'axe 1 évalue le niveau de réussite et l'axe 2 oppose les tâches calculatoires ou algorithmiques à celles plus conceptuelles.)



Un minimum de connaissances antérieures en logique mais aussi dans des domaines de techniques algébriques sont des facteurs favorables à la réussite au niveau conceptuel.
Les compétences dans la résolution des systèmes d'équations linéaires semblent avoir une influence directe sur le côté calculatoire mais aussi, pour les systèmes avec paramètre(s), une influence plus profonde et qui agit sûrement à des niveaux très divers sur de nombreuses compétences en algèbre linéaire. Le contrôle du sens nécessaire pour mener à bien une discussion de cas dans une telle résolution pourrait donc apparaître comme un bon début pour aborder le côté formel des concepts plus évolués d'algèbre linéaire.
La nature des tâches et le spectre assez large des connaissances antérieures exigibles selon différents types de questions, rendent les possibilités de réussite et d'échec en algèbre linéaire fort complexes.
Les remarques qui précèdent sont, dans une certaine mesure, le constat de l'échec d'un enseignement qui, ne pouvant assurer une bonne mise en fonctionnement des premiers concepts, dans leur aspect le plus fort, se réfugie dans des tâches algorithmisées et calculatoires. Pour surmonter cette difficulté, il pourrait être utile de jouer sur les connaissances antérieures. Mais apparemment cela ne suffira sûrement pas. Enseigner de la logique hors contexte est un point délicat et c'est un sujet que l'on épuise vite.

Par ailleurs les techniques algébriques nécessaires dans les divers problèmes d'algèbre linéaire sont tellement diversifiées et en même temps si ponctuelles, que l'on voit mal comment organiser, de façon rationnelle, un enseignement préalable profitable de ces notions. La résolution des systèmes d'équations linéaires, principalement quand ils dépendent de paramètre(s), pourrait par contre se prêter tout à fait à un enseignement préalable qui peut être une bonne introducion à un cours d'algèbre linéaire.

Apparemment la notion de connaissances antérieures de logique semble donc devoir être redéfinie, de même que la notion de connaissances antérieures en techniques algébriques. Dans ces deux domaines en effet si des connaissances antérieures semblent être un atout pour l'algèbre linéaire, cela ne suffit pas et des connaissances spécifiques semblent devoir être acquises en début d'apprentissage.
Pourquoi alors ne pas traiter ces deux problèmes conjointement et ce, d'emblée dans le contexte de l'algèbre linéaire, mais en se limitant à des questions d'un niveau élémentaire ?

Notre proposition consite à réduire en volume la première phase de l'enseignement de l'algèbre linéaire (par rapport à ce qui se fait couramment). Par exemple en excluant toutes les notions ayant trait au calcul matriciel, et même éventuellement les notions de noyau et d'image. On pourrait ainsi faire un travail en traitant des exemples dans des espaces variés, mais en n'utilisant que des concepts élémentaires d'algèbre linéaire, auxquels on donnerait ainsi leur sens simplificateur et unificateur, tout en renforçant les compétences en logique et en techniques algébriques. En effet si techniques algébriques, logique et concepts élémentaires d'algèbre linéaire sont indissociables, pourquoi ne pas faire travaillller les étudiants *explicitement* sur les trois en même temps, plutôt que de se borner à ne travailler que sur le dernier domaine en gérant forcément mal les lacunes dans les deux autres ?

L'algèbre linéaire est un domaine vaste, dont les contours sont mal définis, même pour les concepts élémentaires. En tout début d'apprentissage, il est fréquent que des problèmes étiquetés "d'algèbre linéaire", fassent appel à des compétences qui ne sont pas toujours du domaine de l'algèbre linéaire au sens strict du terme, mais qui permettent ensuite de faire un réel travail sur les concepts d'algèbre linéaire.

Le gain de temps obtenu par la suppression du calcul matriciel pourrait être réinvesti dans une approche plus en profondeur des tout premiers concepts (sous-espace, dépendance, générateurs, bases, dimension, supplémentaire) et on pourrait alors aussi, élargir explicitement l'objet d'enseignement aux compétences spécifiques à certains cadres intervenant dans les problèmes ainsi qu'à des compétences en logique pour l'algèbre linéaire.

IV- Critiques méthodologiques

Portée et limite de nos données et de nos résultats

Les quelques remarques qui précèdent, sont le fruit de notre étude, ce qui fait qu'elles sont la conséquence directe de la nature de notre analyse. Or il nous faut ici, en en faisant la critique, rappeler les limitations que nous imposent les données qui sont à la source de ce travail aussi bien que la méthodologie employée. Tout d'abord les connaissances antérieures que nous avons évaluées à travers le prétest ont été l'objet d'un choix arbitraire qui aurait pu être tout autre (autres questions de logique, plus de questions d'algèbre etc...) pourtant ils conditionnent de nombreux résultats de nos analyses de façon très forte. On aurait également pu envisager d'évaluer des compétences en géométrie analytique en guise de connaissances antérieures. En effet après notre travail, la question des rapports entre les compétences en géométrie analytique et en algèbre linéaire reste entière, faute d'avoir des données sur nos étudiants dans le premier domaine. C'est pourtant un point qui mériterait d'être éclairci.

De plus le choix des sujets des problèmes concernés par notre évaluation aurait pu être très différent tout en restant représentatif... Nous n'avons pas utilisé, volontairement, de moyen de contrôle sur le contenu des épreuves pas plus que sur leurs conditions de passage. En particulier la mixité des sujets (analyse/algèbre) est un facteur dont on ne peut mesurer les effets. Il est bien évident que ces restrictions limitent d'autant la portée de notre analyse et donc de nos résultats

Par ailleurs même si nous avons essayé de répertorier des procédures et si nous ne nous sommes pas contenté de seulement noter les réponses, et même si nous avons employé pour le prétest la technique d'évaluation par bloc, nous ne pouvons toujours pas réellement distinguer dans nos analyses apprentissage et réussite. Or s'il y a certainement de grands rapports entre les deux notions, il est assez clair que la réussite n'est qu'une apparence d'un apprentissage ; nous touchons là une question méthodologique de fond, qu'il nous semble illusoire de pouvoir résoudre dans l'état actuel.

Tout au plus devons-nous nous contenter de réduire le décalage en allant chercher au delà des simples réponses, les comportements, les procédures qui les ont motivées. La nature figée des réponses écrites est néanmoins une barrière incontournable qui en limite les possibilités d'analyse.

Par contre nous tenons à préciser ici que si l'échantillon final de dix-neuf étudiants peut paraître numériquement faible, jnous avons d'abord montré qu'il avait toute les raisons de présenter des caractéristiques très voisines de celles de la population intiale de qutre-vingt trois étudiants. De plus nous n'avons pas cherché à faire une étude statistique sur des grands nombres de type sociologique, mais plutôt une étude, de type éthnographique, c'est-à-dire que nous voulions mettre en évidence l'existence de certains types d'évolution des connaissances en algèbre linéaire chez un même individu. En ce sens dégager un type d'évolution, même sur un seul individu répond à notre attente.

Le choix des méthodes statistiques utilisées, quant à lui, a bien sûr conditionné nos résultats, mais c'est aussi en fonction de ce que nous voulions regarder que nous avons mis en place ces outils. Or il peut sembler que nous avons mis en place un système assez lourd pour donner des conclusions plus souvent sous forme de questions que sous forme de certitudes. Ce pourrait sembler être une faiblesse, mais d'une part nous nous méfions des interprétations trop peu justifiées et d'autre part, rien ne prouve qu'avec moins de données, nos conclusions n'auraient pas encore été plus incertaines. Une idée synthétique qui puisse se justifier par des résultats précis est en effet le fruit d'une longue réflexion qui se nourrit de beaucoup de matériaux ; son aspect réducteur, qui en fait la force, a tendance à faire oublier ce point fondamental. De plus nous espérons que des lecteurs avertis pourront dans les résultats détaillés que nous avons mis à jour ([DR1 ou 2]), trouver des renseignements plus spécifiques qui n'apparaissent donc pas dans nos conclusions, voire qu'ils feront des interprétations qui nous ont échappées et qui leur semblent intéressantes.

Ces remarques, indispensables pour mieux relativiser nos conclusions, étant faites, on peut se

poser la question de l'utilité d'une analyse, telle que nous l'avons faite.
Savoir comment les connaissances antérieures de logique élémentaire conditionnent la réussite en algèbre linéaire constitue la question initiale qui a motivé notre travail. Les éléments de réponses que nous avons été à même de donner restent limités.

Une lecture rapide de nos résultats pourraient se résumer à la seule conclusion que les étudiants ayant de bons connaissances antérieures réussissent mieux, autrement dit que les bons étudiants restent toujours les meilleurs. On nous dira -avec raison- qu'une analyse aussi longue était inutile pour justifier une telle évidence.
On pourrait alors souligner qu'un premier résultat intéressant de notre travail est de mettre en lumière le fait que la formation des connaissances nouvelles et les rapports qu'elles entretiennent avec les connaissances antérieures sont des phénomènes complexes sur lesquels il faut se garder d'avoir des opinions trop hâtivement fondées et/ou trop tranchées. Le savoir ne se constitue pas petit à petit dans un processus quasi linéaire où la maîtrise de certains connaissances antérieures serait à elle seule le garant de l'accession à un nouvelle connaissance. Les processus en jeu sont beaucoup plus complexes et il est difficile d'en cerner tous les aspects. En fait, nous avons quelques éléments de réponses qui sont donnés par les études en psychologie cognitive et en didactique des mathématiques mais, au niveau de études de terrain, les limites méthodologiques de l'investigation ne permettent pas de bien préciser les résultats.
D'autre part, dans notre cas, le choix d'une complète indépendance par rapport à l'enseignement représentait une idée séduisante et en quelque sorte un pari, mais cela nous a conduit à beaucoup d'incertitude sur la nature des données recueillies. Nous pensons a posteriori que même pour ce type de pré-analyse, il aurait fallu contrôler, même très peu, la nature des épreuves, voire leur coordination, et les conditions de passage etc... Nous aurions pu ainsi avoir plus de confiance dans ce que nous aurions recueilli et faire un travail plus riche sans beaucoup plus de coût. Nous pensons qu'apparaît ici un deuxième résultat didactique qui remet en cause la portée des évaluations a priori, dont il semblerait, contrairement à une opinion répandue, qu'elles restent très limitatives.

Un certain type de contrôle de l'enseignement lui-même aurait sans doute était préférable, bien que difficilement gérable. On a pu observer, à propos de certains exercices, que des écarts dans les réponses de trois groupes différents ne semblaient pouvoir s'expliquer que par des différences dans l'enseignement pratiqué dans chaque groupe par un enseignant différent. Ce genre de parasitage, qui peut dans des cas moins caractérisés nous échapper entièrement, est un phénomène gênant. On pourrait semble-t-il y remédier, au moins partiellement, en donnant des directives aux enseignants, mais pour être efficace ce devrait être fastidieux et finalement rendre le contexte moins standard. Une autre solution consisterait à faire des observations en cours et/ou en TD, afin de faire entrer dans l'analyse une variable prenant en compte les différences entre les enseignants, mais cela demanderait de passer beaucoup de temps à mettre en place une méthodologie pour les observations, de plus c'est un problème délicat.

Conclusion

Finalement en dépit des améliorations qu'il resterait à faire, qu'avons nous obtenu ?
Tout d'abord nous avons pu recueillir une analyse des tâches qui nous semble intéressante sur le plan didactique. Cependant ce n'est qu'une analyse en l'état et, hors-mis des hypothèses plus ou moins fondées, nous n'avons encore aucun élément de réponse sur les effets que des modifications éventuelles pourraient apporter.
Notre position sur la nature des connaissances antérieures en logique élémentaire et sur les techniques algébriques, ainsi que sur la façon dont ils s'articulent avec l'acquisition des concepts d'algèbre linéaire est, à la suite de notre travail, beaucoup plus argumentée et surtout elle s'appuie sur des résultats précis. Cependant nous devons, faute de données, rester plus vague en ce qui concerne certains connaissances antérieures en algèbre et surtout en ce qui concerne la géométrie analytique.

Pour ce qui touche aux évolutions individuelles des étudiants, notre appréciation du problème a pu s'éclaircir. Nous cernons mieux en particulier certains types de comportements, mais aussi il nous est plus facile de "prévoir", avec assez de certitude, sur des tâches précises, les procédures qui ont le plus de chance d'être mise en œuvre par les étudiants, en fonction de leurs connaissances antérieures. Ce point reste bien sûr encore flou, tant il est vrai que les comportements ne sont pas prédéterminés. Il est simplement possible à partir d'un diagnostic de la tâche proposée et des connaissances antérieures d'un individu donné, de savoir ce qu'il saura sûrement faire et ce qu'il ne saura sûrement pas faire. Cependant cette analyse, doublée d'une réflexion épistémologique et didactique, peut permettre à petite échelle d'espérer améliorer un enseignement.

Il est important pour comprendre la portée que peut avoir notre travail, de bien mesurer la part de didactique qu'il comprend. Extérieurement, cette étude peut en effet sembler se situer à un niveau seulement pédagogique. Nous pensons pourtant qu'elle a, à pratiquement tous les niveaux, des spécificités didactiques. Dès le départ le choix de la méthode d'analyse par blocs est une option didactique, qui repose sur l'idée que l'on peut caractériser les connaissances selon leur fonctionnement et suivant les cadres où elles agissent. Cette technique associée à la caractérisation des réponses en termes de procédures, nous a permis de relier connaissances antérieures et connaissances nouvelles selon un mode qui correspond mieux à ce que nous semblent être les processus d'acquisistion des connaissances. Autrement dit nous nous sommes appuyés sur des travaux didactiques et des hypothèses sur la construction du savoir, pour analyser les données recueillies. En particulier l'idée que l'on n'apprend pas petit à petit mais qu'il existe des phases de déstabilisation suivie par des périodes de réorganisation, ou bien le concept de contrat, sont des éléments qui nous ont permis de regarder nos données sous un autre angle et surtout d'en donner des interprétations différentes.

Le travail didactique est bien sûr visible également au niveau de l'analyse des tâches. En particulier, l'introduction de la dimension épistémologique est fondamentale, pour pouvoir en arriver à nos conclusions. C'est parce que nous nous sommes d'abord interrogé sur la nature des concepts de l'algèbre linéaire et sur leur origine, que nous avons par exemple dégagé une dichotomie au niveau des tâches et cette réflexion préalable nous a guidé dans beaucoup de nos interprétations. La façon même dont nos conclusions ont pu être reprises, pour donner les propositions que nous avons énoncées plus haut, relève d'une démarche où l'apport didactique est fondamental.

Références bibliographiques

[AT1] - B. ARTMANN, Ansichten der linearen Algebra, in "Mathematik-Unterricht", Heft 2, 27ème année, pp. 68-75, Ernst Klett Stuttgart, 1981.

[AT2] - B. ARTMANN - G. TOERNER, lineare Agebra, Grund- und Leistungskurs, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1983.

[AT3] - B. ARTMANN, Linear algebra als hochschuldisziplin, in "Postdamer Vorschungen", Heft 41, pp.124-136, 1984.

[AT4] - B. ARTMANN, Lineare Algebra, Birkhäuser, Basel, 1986.

[AT5] - B. ARTMANN - H. REIFFERT, Characteristische Zugänge zu den begriffen der Lineare Algebra am beispiel von determinante und skalarprodukt., in "Praxis des Mathematik" (28), 1986, Nr2, pp. 74-80.

[BC] - F. BOSCHET - A. ROBERT , Acquisition des premiers concepts d'analyse sur R dans une section ordinaire de première année de DEUG, Cahier de didactique des mathématiques n°7, IREM de Paris VII.

[DO] - R. DOUADY, Jeu de cadres et dialectique outil-objet, Thèse d'état. Université de Paris VII-1984.

R. DOUADY, Même titre, in Recherche en Didactique de Mathématiques (RDM) vol 7 n°2 1986 pp 5-31.

[DR1] - J-L. DORIER, Contribution à l'étude de l'enseignement à l'université des premiers concepts d'algèbre linéaire. Approches historique et didactique, Thèse de Doctorat de l'université J. Fourier - Grenoble 1, 1990.

[DR2] - J-L. DORIER, Analyse dans le suivi de productions d'étudiants de DEUG A en algèbre linéaire, Cahier DIDIREM n°6, IREM de Paris VII, avril 1990.

[DR3] - J-L. DORIER, Analyse historique de l'émergence des concepts élémentaires d'algèbre linéaire, Cahier DIDIREM n°7, IREM de Paris VII, juin 1990.

[DR4] - J-L. DORIER, Continuous anlaysis of one year of science students' work in linear algebra, in first year of French university, in the proceedings of the XIVth annual congress of the PME-Mexico, 1990.

[HA1] - G. HAREL,Variation in linear algebra content presentations, in For the learning of mathematics 7,3, Montreal, Novembre 1987.

[HA2] - G. HAREL, A comparison between two approaches to embodying mathematical models in the abstract system of linear algebra, in the proceedings of the 8th annual conference of the PME-NA, G. Lappan ed., Michigan, 1986.

[HA3] - G. HAREL, Learning and teaching linear algebra : difficulties and an alternative approach to visualizing concepts and processes, in Focus on learning problems in mathematics, II-(2), pp. 139-148, 1989.

[HA4] - G. HAREL, Applying the principle of multiple embodiements in teaching linear algebra : aspects of familiarity and mode of representation , in School Sciences and Mathematics, Vol 89(1), pp. 49-57, 1989.

[HA5] G. HAREL, using geometric models and vector arithemetic to teach high-school students basic notions in linear algebra, in ?, 1990.

[RG] M. ROGALSKI, Pourquoi un tel échec dans l'enseignement de l'algèbre linéaire, in Enseigner autrement les mathéamtiques en DEUG aI, Brochure Inter IREM- Universités, CI2U, Lille,1990.

[RO1] - A. ROBERT, Rapport enseignement/apprentissage (début de l'analyse sur R). Fascicule 1, Analyse d'une section de DEUG A première année (les prérequis et l'apprentissage), Cahier de didactique des mathématiques n°181, IREM de Paris VII.

[RO2] - A. ROBERT, De quelques spécificités de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement post-obligatoire, Cahier de didactique des mathématiques n°47, IREM de paris VII, Septembre 1987.

[RO3] - A. ROBERT, J. ROBINET et I. TENAUD, De la géométrie à l'algèbre linéaire, Brochure de l'IREM de Paris VII n°72, Décembre 87.

[RO4] - A. ROBERT et J. ROBINET, Quelques résultats sur l'enseignement de l'algèbre linéaire, Cahier de didactique des mathématiques n°53, IREM de Paris VII, 1989.

[RO5] - A. ROBERT, L'acquisition de la notion de convergences des suites numériques dans l'enseignement supérieur, Thèse d'Etat Université de Paris VII, 1982.

[RI] - J. ROBINET, Esquisse d'une génèse des notions d'algèbre linéaire enseignées en DEUG , Cahier de didactique des mathématiques n°29, éd. IREM de Paris VII. Mai 1986.

ANNEXE

Texte du prétest

1- Soit a un nombre réel, les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses : (rayez les mentions inutiles)

i) a=3 -> a2 = 9 VRAI / FAUX
ii) a2 = 9 -> a=3 VRAI / FAUX
iii) a=3 <-> a2 = 9 VRAI / FAUX
iv) a≠3 <-> a2 ≠ 9 VRAI / FAUX
v) √4 = ±2 VRAI / FAUX
vi) √4 = 2 VRAI / FAUX
vii) √4 = -2 VRAI / FAUX
viii) √4 =|-2 | VRAI / FAUX

2- a)Si x est un nombre réel non nul ,
-1< x <3 entraine toujours 1< x2<9 VRAI / FAUX

b) Quelle est l'inégalité vérifiée par x2 ? ......< x2 <......
(Répondez par des nombres)

3-Trouvez le sous ensemble X de N défini par les deux propriétés: 0 êêe X et pour tout a:
a e X si et seulement si a+1 e X .
4- Soient f1, f2, f3 trois fonctions de R dans R. Traduire graphiquement les propriétés suivantes:

a) pour tout entier i, i=1;2;3, il existe un élément a de R
tel que fi(a)=1.
b) il existe un entier i, i=1;2;3, tel que pour tout réel a, fi(a)=1.
c) il existe un réel a tel que, pour tout entier i, i=1;2;3, fi(a)=1.
d) pour tout réel a, pour tout entier i, i=1;2;3, fi(a)=1.

5-Ecrire dans un langage le plus formalisé possible la phrase suivante:
Etant donnée une suite (un) de réels, tout intervalle de R de centre 0 contient un élément de la suite.

6- Soit E un ensemble, qu'appelle-t-on loi associative sur E ?

7-Citez un groupe en précisant la loi de groupe.

8-Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses: (rayez la mention inutile):

a) Pour tout entier naturel x, il
existe un entier naturel y tel que: VRAI / FAUX
x = 6y .

b) Pour tout entier naturel y, il
existe un entier naturel x tel que: VRAI / FAUX
x = 6y .

c) Il existe un entier naturel y, tel
que pour tout entier naturel x : VRAI / FAUX
x = 6y .

9-Soit (P) la proposition suivante:

(P) Il existe un entier n tel que pour tout entier p, $p \leq n$.
Quelle est la négation (P') de cette proposition?

Dire si 9bis) (P) est vraie VRAI / FAUX
9ter) la négation (P') est vraie VRAI / FAUX

10-Soit (Q) la proposition suivante:
(P) pour tout n Œ N, Il existe n' Œ N tel que , n' > n.
Quelle est la négation (Q') de cette proposition?

Dire si 10bis)(Q) est vraie VRAI / FAUX
10ter) la négation (Q') est vraie VRAI / FAUX

Contenu mathématique

Espace vectoriel, sous-espace,
Famille génératrice,
Sous-espace engendré,
Dépendance/indépendance,
Famille libre/liée,
Base, dimension, rang,
Somme,
Somme directe,supplémentaire,
Application linéaire,

Systèmes d'équations linéaires.

Conditions de départ de ma recherche

1- Peu de travaux de recherche en didactique ou en épistémologie sur l'algèbre linéaire.

2- Peu de travaux de didactique sur l'enseignement supérieur et encore moins sur des savoirs d'algèbre au delà du secondaire.

3- Les concepts élémentaires de la théorie des espaces vectoriels représentent un domaine vaste et qui touche à de nombreux autres.
L'objet d'étude est très étendu et difficilement délimitable.
Epistémologie

A travers l'étude historique d'une genèse, on cherche à dégager :
- Les problèmes qui ont été à l'origine de l'émergence des concepts.
- Les contextes d'émergence et de développement de ces concepts.
- Les périodes d'avancée, d'arrêt, de reprise et de reconstruction.

Nos buts

1 -Eclaircir et développer :
+ Les liens entre l'étude des systèmes linéaires et l'émergence des premiers concepts.
+ La genèse de concepts centraux tels que celui de rang.

+ Le passage de résultats épars à une théorie unifiée.
+ L'apparition des premières approches axiomatiques et les raisons de leur prédominance tardive.

2 - Regrouper, d'un point de vue épistémologique, les principales étapes de cette genèse, afin de mieux situer la place et l'importance relative de chaque évènement par rapport à l'ensemble.
Synthèse

- Très tôt : ubiquité des concepts
(systèmes d'équations, géométrie, arithmétique, formes quadratiques, équations différentielles etc...)

- Systèmes linéaires et géométrie: deux domaines importants ayant cependant joué des rôles à des niveaux différents :
systèmes linéaires : émergence des premiers concepts et des premiers résultats explicites. Plus tard généralisation en dimension infinie à la suite de Hilbert (étape transitoire).
Géométrie : laboratoire d'essai avant une généralisation du langage et des méthodes à des espaces plus variés.

- Le rang : un concept central.

- Unification par étapes :
autour des déterminants
n-uplets de nombres
axiomatisation.
La dernière étape correspond à une volonté d'organisation des savoirs. Problématique d'unification et de simplification.
Deux propositions admises
au XVIIIème siècle

Prop 1 : Une courbe algébrique de degré n est en général déterminée de façon unique par n(n+3)/2 de ses points.

Prop 2 : Deux courbes algébriques d'ordre m et n se coupent en général en mn points.

Le paradoxe de cramer

si n≥3, n(n+3)/2 ≤ n2, donc deux courbes algébriques d'ordre n ont en commun plus de points qu'il n'en suffit pour déterminer de façon unique une seule d'entre elles !

EULER:

"En réfléchissant bien sur l'état de la première proposition, nous remarquerons qu'il peut y avoir des cas où (nn+3n)/2 points donnés ne sont pas suffisants pour déterminer la courbe d'ordre n, qui peut être tirée par ces points ou, ce qui revient au même que (nn+3n)/2 équations ne suffisent pas pour déterminer autant de coefficients ou pour déterminer le rapport entre ((nn+3n)/2)+1 coefficients."
EULER - 1750
"Sur une contradiction apparente
dans la doctrine des lignes courbes"

Quand deux lignes du quatrième ordre s'entrecoupent en 16 points, puisque 14 points, lorsqu'ils conduisent à des équations toutes différentes entre elles, suffisent pour déterminer une ligne de cet ordre, ces 16 points seront toujours tels que trois ou plusieurs des équations qui en résultent sont déjà comprises dans les autres. de sorte que ces 16 points ne déterminent pas plus que s'il n'y en avait que 13 ou 12 ou encore moins et partant pour déterminer la courbe entièrement on pourra encore à ces 16 points ajouter un ou deux points.

Objectifs de l'analyse
dans le suivi
des productions d'étudiants

1- Mieux baliser le contenu de ce qui est enseigné , relever :
- les types de tâches proposées
- les procédures employées par les étudiants.

2- Décrire des types d'évolutions des compétences en algèbre linéaire chez un même individu en particulier en fonction de ses connaissances antérieures dans certains domaines.

3- Dégager des hypothèses sur les interactions entre les différents domaines internes ou connexes à l'algèbre linéaire.
- Prétest : 84 copies.
- Devoir surveillé n°1 : 39 copies.
- Partiel : 74 copies.
- Devoir surveillé n°2 : 46 copies.
- Test "vrai/faux" : 58 copies.
- Devoir surveillé n°3 : 58 copies.
- Devoir surveillé n°4 : 50 copies.
- Examen : 73 copies.

Une analyse du contenu de chaque question, qui vise à déterminer le type de tâche proposée, les connaissances qu'elles mettent en jeu, le type de question, la part d'implicite qu'elle comporte, sa place dans l'ensemble de l'exercice ou du devoir ...
Mais aussi en fonction de cette analyse, l'explicitation des types de procédures que les étudiants peuvent mettre en œuvre, les raisons qui peuvent les y pousser, les savoirs et les conceptions correspondants, l'implication que cela peut avoir sur l'ensemble de l'exercice ou du devoir...
Définition des blocs
Deux types de contenus en logique
(EQ)implication ou équivalence
(QA) quantification
Trois niveaux :
(1)On demande si une proposition écrite en langage formel est vraie ou fausse (compréhension brute)
(2) On demande d'effectuer une tâche entièrement dans le domaine formel, par exemple de donner la négation d'une proposition quantifiée
(3) On demande de passer d'un cadre "informel" (langage usuel, graphisme...) à la traduction en langage formel ou vice-versa
5 blocs EQ1, EQ3, QA1, QA2, QA3
Deux blocs d'algèbre
(AN) algèbre numérique
(AS) algèbre des structures

COMPARAISON DES RESULTATS AU PRETEST DE LA POPULATION INITIALE ET DE L'ECHANTILLON EVALUE AU DEVOIR N°3

(LES POURCENTAGES SONT CALCULES SUR LA LIGNE)

TABLEAU CROISE DS N°3-PRESTEST (1)
(LES POURCENTAGES SONT CALCULES SUR LA LIGNE)

TABLEAU CROISE DS N°3-PRESTEST (2)
(LES POURCENTAGES SONT CALCULES SUR LA COLONNE)

Aspects sémantiques des traitements linéaires

Eugénie Adam Koleza

Many studies have printed out the part played by semantic organisation in linear problem solving. From this issue, we constructed a hierarchy of problems based on the semantic aspects wich are linked to different kinds of situation. A questionnaire, in accordance with this hierarchy, has been tested with 12 years old students.
In this paper, we analyse only the answers to ten questions. The levels of success match very well with our hierarchy. Our goal being teaching, we have also understook an experience in classroom, according to this hierarchy. That will be set out in another paper. But the results show that performances are bringing closes for students of *"experimental population"*, without inversion in hierarchy order.

La proportionnalité est un domaine central et difficile de l'enseignement général des mathématiques.
Depuis 1913 elle a suscité de nombreuses études. Celles-ci ont surtout cherché à répondre à l'une des trois questions suivantes :

- Quels sont les facteurs, propres à la nature de la tâche proposée, qui interviennent dans la difficulté d'un problème de proportionnalité ?

- Quelles sont les caractéristique individuelles (âge...) liées à l'acquisition du raisonnement proportionnel ?

- Quelles sont les procédures (de réussite ou d'échec) utilisées par les élèves dans un problème de proportionnalité ?

La plupart des études, centrées sur la première question, ont surtout examiné l'influence de la structure numérique du problème sur le comportement des élèves. Elles se sont intéressées aux paramètres relatifs aux données mathématiques du problème (taille des nombres, nature de l'opérateur etc...) pour voir comment ils favorisent certaines procédures.

© Annales de Didactique et de Sciences Cognitives
5 (1993) (p.125-148) - IREM de Strasbourg

Mais elles ont prêté beaucoup moins d'attention aux types de situations (non mathématiques au départ) à travers lesquelles un problème de proportionnalité est présenté ; ces situations sont par exemple celles d'achat et de vente, d'échange, de consommation, de mélange, d'agrandissement ou de réduction etc... Ces situations évoquent des processus de nature différente. Les individus, en vertu de leur expérience propre ou de leur représentation de ces situations peuvent recourir à des procédures différentes selon ces types de situation : c'est ce que nous appelons l'aspect sémantique des problèmes de proportionnalité.

Dans un problème de proportionnalité, la compréhension des processus propres à chaque situation proposée est aussi importante que la maîtrise d'une procédure mathématique.

Dans ce travail, nous allons mettre en évidence l'importance des aspects sémantiques des problèmes de proportionnalité.

I Quelques questions soulevées par les études précédentes

1.1 L'apport des études précédentes

Parmi les différentes situations possibles, c'est celle de mélange qui a le plus retenu l'attention du chercheur.

Les études de QUINTERO - SCHWARTZ (1982) et GOLD (1978)[10] ont montré que les problèmes de mélange sont plus difficiles que les autres problèmes de proportionnalité.

Cela pourrait être expliqué par la présence, dans un problème de mélange, des grandeurs continues lesquelles semblent plus difficilement maîtrisables par les élèves que les grandeurs discrètes (HOROWITZ, 1981) [10].

KARPLUS et al. (1980) ont également signalé la difficulté des problèmes de mélange : dans le cadre d'une étude détaillée du raisonnement proportionnel [6] ils ont proposé 8 problèmes de mélange (*"le monde (??) puzzle"*) du type comparaison, à 60 élèves de CM2 (sixth graders) et 60 élèves de 5e (eight graders).

Dans six de ces problèmes, au moins l'un des opérateurs : *"fonction" ("within recipe ratio") ou "scalaire" ("between recipe ratio")*, était un nombre entier. Les résultats observés sont donnés dans le tableau suivant :

TABLEAU I

Type de problème	WB	W	B	N	WBX	WX	BX	NX
% réussite	55	63	38	18	34	35	19	10

W : opérateur *"fonction"* entier
N : aucun opérateur entier
B : opérateur *"scalaire"* entier
X : rapports sous comparaison, inégaux

Pour déterminer le rôle du contexte du problème, KARPLUS et al. (1983) [7], ont aussi proposé six problèmes de comparaison formulés dans deux autres contextes que celui de mélange : la grandeur quotient était un nombre avec dimensions, et l'un au moins de deux opérateurs : *"fonction"* ou *"scalaire"* était un nombre entier.

La population interrogée, consistait en 116 élèves de CM2 et 137 élèves de 5e. Les résultats observés sont donnés dans le tableau suivant :

TABLEAU II

Type de problème	W	WB	WX	WBX
% réussite	56,6	55,2	39,5 - 53,6*	40 - 51,3*

* suivant le contexte.

D'après ces résultats, KARPLUS et al. remarquent que dans le cas où les données numériques sont les mêmes (W, WB, ...,) les taux de réussite pour les deux types de problèmes (mélange ou autre) sont comparables.

Néanmoins, il y a une différence significative en ce qui concerne l'apparition de la procédure additive : sa fréquence est beaucoup plus grande dans les problèmes de mélange. Cette observation conduit les auteurs à la conclusion suivante : **un grand nombre d'élèves sont sensibles non seulement aux caractéristiques numériques, mais aussi à la signification des données.**

Bien que fort intéressante, cette étude détaillée de KARPLUS et al. ne nous permet pas, cependant, de répondre à ces trois questions :

- Aurait-on approximativement le même taux de réussite pour les deux types de problèmes, dans le cas où aucun opérateur ne serait un nombre entier (cas : N et NX) ?

- Peut-on également attendre cette homogénéité de résultats dans le cas des *"problèmes de valeur manquante"* ("missing value problems") ?

- La difficulté d'un *"problème de mélange"* ayant été comparée à celle d'un problème décrivant une autre situation que celle de mélange auprès des élèves de même âge, aurait-on les mêmes résultats si la comparaison se faisait auprès des mêmes élèves ?

Une réponse aux deux dernières questions apparaît avec les résultats d'une étude effectuée par

F. TOURNIAIRE [11] - bien que les élèves interrogés fussent plus jeunes que ceux interrogés dans le cadre de l'étude précédente.

Six problèmes de proportionnalité de contextes différents (*"problèmes de mélange"* et autres) et de structure numérique quasi-homogène (nombres entiers inférieurs à 10, rapports entiers-prix unitaire inclus) ont été proposés à 180 élèves de CE_1, CE2 et CM_1 (3^d, 4^{th} et 5^{th} graders).

Deux facteurs, relatifs au contexte du problème étaient pris en compte :

- la familiarité de la situation présentée dans l'énoncé,
- la présence d'un mélange.

Les résultats observés sont donnés dans le tableau suivant :

TABLEAU III

Problèmes	Paint (M)*	O,?? (M)	Dollar (A) *	Candy (A)	Weight (A)	Mr Tall (A)
% Réussite	37	60	70	70	73	37

** M : problème de mélange*
A : autre.

Au vu de ces résultats, l'auteur remarque que :

- Ce n'est pas la présence d'une situation de mélange qui fait augmenter la difficulté d'un problème, mais plutôt le fait que cette situation soit *"familière"* ou *"moins familière"* aux élèves.

- Un problème caractérisé comme *"non familier"* (par exemple *"Dollar"*) peut être aussi bien réussi qu'un autre considéré comme *"familier"* (par exemple *"Candy")*

Ces remarques conduisent F. TOURNIAIRE à formuler l'hypothèse suivante : **Un paramètre éventuellement plus important que la familiarité du contexte, est la "familiarité" des élèves avec l'utilisation des rapports dans ce contexte[11].**

1.2 Remarques sur les résultats de F. TOURNIAIRE

Une conclusion commune aux études de KARPLUS et al. et de F. TOURNIAIRE relative aux problème de mélange est - au moins dans le cas des rapports entiers - que ces problèmes ne sont pas significativement plus difficiles que d'autres problèmes de proportionnalité formulés dans un contexte différent.

La question reste bien sûr ouverte, pour le cas des rapports non entiers.

Les résultats obtenus par F. TOURNIAIRE font cependant apparaître un nouveau paramètre : la familiarité des élèves avec l'utilisation des rapports dans un contexte.

Mais l'hypothèse formulée par F. TOURNIAIRE relative à l'importance de ce paramètre appelle deux remarques.

La première concerne les limites de l'hypothèse elle-même : le fait d'avoir manipulé des rapports simples (par exemple des nombres entiers) dans un contexte permettrait-il à l'élève d'aborder avec une relative facilité d'autres problèmes formulés dans le même contexte, mais de nature numérique moins simple ?

Autrement dit, la manipulation des rapports entiers entre grandeurs suffit-elle à assurer une réelle compréhension de la relation multiplicative entre ces grandeurs ?

La limitation volontaire de F. TOURNIAIRE à des rapports entiers, inférieurs à 10, ne nous permet pas de répondre avec certitude à cette question.

La seconde remarque concerne la possibilité d'une *"application"* de l'hypothèse en milieu scolaire. Supposons qu'un enseignant veuille choisir des problèmes de proportionnalité. A-t-il le moyen de savoir *a priori* si ses élèves sont *"familiarisés"* avec l'utilisation des rapports dans un contexte donné et donc la possibilité de distinguer les problèmes *"faciles"* de ceux qui le sont moins ? A notre avis, la réponse est négative.

La conclusion du travail de F. TOURNIAIRE aide certainement à expliquer a posteriori le comportement des élèves, mais elle ne donne pas la possibilité de prévoir ce comportement.

Pour organiser un enseignement il est important de disposer d'une échelle (même approximative) de difficulté pour les problèmes de proportionnalité. Nous pensons que les résultats de notre travail permettent d'établir une telle échelle.

II Nos hypothèses et leur mise en oeuvre

2.1 L'apport de notre étude

Comme F. TOURNIAIRE , nous avons centré notre étude sur le rôle des paramètres liés aux situations décrites dans l'énoncé du problème. Mais à la différence de F. TOURNIAIRE nous ne pensons pas que le comportement des élèves dépende de leurs *"vécus"*, nous pensons au contraire qu'il s'explique par la structure même du problème.

Plus précisément, l'hypothèse qui commande notre travail est la suivante : la mathématisation - sous forme traitable par linéarité - de situations différentes, varie selon les situations présentées : elle est plus difficile, ou plus coûteuse, pour certaines que pour d'autres. En outre, la mathématisation fait partie du processus d'appropriation même de la proportionnalité.

Montrons-le sur deux exemples :
P_1 : *"Madame X a payé 60 F pour 5 Kg de prunes. Combien doit-elle payer pour 7 Kg de prunes de même qualité ?"*

P_2 : *"Un orfèvre construit des bijoux en utilisant un alliage d'argent et de bronze. Pour 60 g d'argent il utilise 40 g de bronze. Pour le bracelet qu'il m'a vendu il a utilisé 90 g d'argent. Quelle quantité de bronze a-t-il utilisé ?"*

La relation des deux grandeurs (Kg et F) dans l'énoncé du problème P1 est, sans doute, sémantiquement plus facile à concevoir : il y a une grandeur *"quotient" ("prix du Kg")* qui est l'expression de cette relation. Existant par elle-même, elle évoque un rapport multiplicatif de ses deux composants. Au contraire, le type de relation existant entre les grandeurs du problème P2 n'est pas évident ; la représentation du processus évoqué dans l'énoncé suggère sans aucune invraisemblance une relation additive entre les deux grandeurs.

Pour élaborer la classification suit des problèmes de proportionnalité, en fonction de leurs *"aspects sémantiques"*, nous avons pris comme critère le caractère et le rôle spécifique de chacune des variables décrivant la situation présentée dans l'énoncé de chaque problème.

2.2. Classification des problèmes

Nous distinguons deux grands types de problèmes, le second se partageant lui-même en deux sous-types.

1° Les problèmes dont l'énoncé décrit un phénomène ou un concept (physique, économique, etc)

La situation évoquée est décrite à l'aide de deux variables sémantiquement hétérogènes : aucune opération additive entre elles ne peut avoir de sens puisque les variables sont sémantiquement hétérogènes. Pour de simples raisons de commodité dans ce qui suit nous appellerons les problèmes relevant de ce type : *"différenciation"*. Pour poser le problème, la référence à au moins deux états du phénomène est nécessaire.

Soit par exemple la situation *"achat-vente"* : elle est décrite par deux variables nécessaires au concept de marchandise :

V : quantité ou poids de la marchandise,

W : prix de la marchandise.

Les valeurs de ces variables interviennent dans plusieurs occurrences du phénomène. Une fois les unités t et u choisies, on aura :

phénomène en état 1 : $V_1 = m_1 t \quad W_1 = n_1 u$,

phénomène en état 2 : $V_2 = m_2 t \quad W_2 = n_2 u$,

où m_1 m_2 sont les valeurs numériques de la variable V en état 1 et en état 2, et n_1, n_2, les valeurs numériques de la variable W en état 1 et en état 2 respectivement.

Le nombre n_1/m_1 est la mesure d'une nouvelle grandeur, qu'on appelle *"grandeur quotient"* dont l'unité est u/t. Dans ce cas précis, il s'agit du prix unitaire : prix de l'unité de la quantité achetée.

Dans un problème de ce type, la *"grandeur quotient"* peut être plus ou moins "familière". Le *"prix du Kg"* est en principe un concept plus familier que par exemple la *"consommation"* (en litres d'essence pour 100 Km) d'un véhicule.

2° Les problèmes dont l'énoncé se réfère à un objet composé, comme par exemple un mélange, un alliage, un gâteau, etc.
Les parties de l'objet composé ne sont pas strictement homogènes : pour une recette on ne considère pas la farine et le beurre comme des objets homogènes ; le jus d'orange et l'eau non plus, dans un mélange. **Cependant, le fait de réduire l'information sur ces objets à leur poids** (pour le gâteau), **ou à leur volume** (jus d'orange et eau), **conduit à traiter comme homogènes les parties de l'objet composé.**

Cette identification peut avoir une influence sur le traitement arithmétique du problème. En effet, lorsque les variables d'une situation sont associées à la même grandeur, **un traitement additif de ces variables apparaît pertinent.** Cette caractéristique des variables nous amène à appeler ce deuxième type de problèmes : *"problèmes à variables fusionnables"*. Pour des raisons de commodité, nous parlerons de problèmes *"fusion"*. Nous distinguerons deux cas de problèmes *"fusion"* :

1. Les problèmes *"fraction"* (FF).
2. Les problèmes *"partition"* (FP).

Dans l'énoncé des problèmes *"fraction"*, les informations données concernent la relation : partie-tout. Les deux mesures en jeu sont celles de l'objet (le tout) et d'un seul composant (partie) à la fois. Dans les problèmes *"partition"*, on donne les mesures de deux (ou plus) partitions de l'objet initial.

Un exemple d'un problème *"fusion"* est celui d'un alliage :

n (u) = 100 g d'alliage :	n_1 (u) = 130 g de bronze	n_2 (u) = 200 g d'argent
m (u) = 150 g d'alliage :	m_2 (u) = 120 g de bronze	m_2 (u) = 300 g d'argent

(1) (2)

(1) : problème *"fraction"* (2) : problème *"partition"*

L'analyse précédente nous conduit à avancer l'hypothèse qu'en général les problèmes *"différenciation"* doivent être mieux réussis que les problèmes *"fusion"* et en particulier que ceux de type *"partition"*.

Cette affirmation ne peut être que relative, étant donnée l'existence d'autres paramètres qui interviennent et qui influencent aussi le niveau de difficulté d'un problème. Ces paramètres sont aussi bien de nature numérique que sémantique.

Un questionnaire a été mis au point en fonction de cette classification du problème. Nous n'en avons retenu ici qu'une famille de questions, celles présentant les divers cas qui, selon nous, méritent d'être distingués.

III Résultats

Nous avons proposé 23 problèmes à deux populations d'élèves de 12-13 ans :
- l'une de 46 élèves (*"population expérimentale"*) avait suivi un enseignement organisé sur une analyse sémantique de chacune des situations traitées pendant le cours ;
- l'autre de 98 élèves (*"population de référence"*) avait eu un enseignement *"classique"* de la proportionnalité.

Nous consacrerons un autre article aux caractéristiques précises de l'enseignement proposé à la population expérimentale et nous ne présentons ici que les résultats à 10 des 23 problèmes proposés.

Parmi ces 10 problèmes (dont l'énoncé figure en annexe) :
- 6 sont des problèmes *"différenciation"*.
- 4 sont des problèmes *"fusion"*, dont 2 sont de type *"fraction"* et 2 sont de type *"partition"*.

Tous,sont des problèmes de *"valeur manquante"*. Ces 10 problèmes ont été choisis tels que leur structure numérique soit quasi-homogène : nombres entiers, rapports non entiers. Notons aussi que l'utilisation des calculatrices a été autorisée. Nous avons considéré cette condition comme importante pour l'homogénéité de nos problèmes, vu la difficulté d'un grand nombre d'élèves à effectuer des calculs à la main, surtout de divisions de type a : b, a <<b [1].
Les taux de réussite pour chacun des problèmes sont indiqués dans le tableau IV, les deux populations étant réunies :

TABLEAU IV

Problèmes	Type	% Réus.
ACHAT (A)	D	61
ACHAT (B)	D	64
ACHAT (C)	D	53
CONSOM (A1)	D	54
CONSOM (A2)	D	55
RECETTE (A)	D	68
RECETTE (B)	FP	39,5
RECETTE (C)	FP	44,5
PRUNES	FF	46
ALLIAGE	FF	60,5

A partir de ce tableau nous pouvons faire trois remarques :

1. Les problèmes *"différenciation"* (D) sont généralement mieux réussis que les problèmes *"fusion"* (FP ou FF).

2. Mais des problèmes de même type (*"différenciation"* ou *"fusion"*) ne sont pas toujours également réussis. L'écart pour les problèmes *"différenciation"* est de 15 % et pour les problèmes *"fusion"* de 21 %.

3. De même les problèmes formulés dans le même contexte ne sont pas toujours également réussis. Dans le cas par exemple des problèmes ACHAT (B) et ACHAT (C) l'écart des taux de réussite atteint 11 %.

Les remarques précédentes nous conduisent à penser qu'en plus de la hiérarchie des problèmes en fonction de leur aspect sémantique il y a d'autres paramètres qui jouent sur le niveau de difficulté du problème. Ces paramètres peuvent être liés autant au contenu numérique du problème, qu'aux caractéristiques sémantiques de l'énoncé.

Le tableau V montre aussi l'influence de ces paramètres. On y voit clairement que les procédures de résolution favorisées par les élèves varient d'un problème à l'autre et cela même lorsque les problèmes sont du même type.

TABLEAU V

Problèmes	NR	ADD	MUF	AUT	SE	CO	SCA	FCN	UNI
Achat (A)	28	3	10	15	23	2	15	33	15
Achat (B)	15	1	13	23	21	20	12	24	15
Achat (C)	31	8	13	17	23	1	16	24	11
Consom (A1)	27	0	21	18	21	2	16	24	15
Consom (A2)	34	1	7	23	19	6	16	23	15
Recette (A)	10	1	0	35	32	8	13	14	31
Recette (B)	9	68	2	8	11	0	28	11	7
Recette (C)	20	44	7	9	19	0	33	7	5
Prunes	7	61	5	5	19	1	5	31	10
Alliages	9	41	3	4	22	4	16	38	7

* effectifs

Procédures de traitement observées:

NR	non-réponses
ADD	procédures additives
MUF	procédures multiplications erronées et partielles ?
AUT	autres erreurs
SE	réponses correctes sans explication
CO	procédure "constructive"
FON	calcul de l'opérateur "fonction"
SCA	calcul de l'opérateur "scalaire"
NI	recours à l'unite

Le choix d'une procédure (correcte ou fausse) de résolution de chaque problème, reflète la façon dont les élèves conçoivent la situation décrite dans l'énoncé de ce problème. Ainsi, à partir du tableau V, nous pouvons faire les remarques suivantes :

i) Dans les problèmes *"différenciation"*, la somme des fréquences des procédures *"fonction"* et *"unitaire"* est plus du double de la fréquence des procédures *"scalaires"*. Au contraire, dans les problèmes *"fusion"* du type *"partition"* c'est la procédure *"scalaire"* qui est la plus souvent utilisée.

ii) Tandis que dans le problème *"différenciation"* l'apparition de la procédure *"additive"* est rare, dans les problèmes *"fusion"* sa fréquence varie entre 28,5 % et 47 % du total des réponses.

Ces deux remarques concernent même les problèmes qui sont formulés dans le même contexte. Tel est le cas par exemple du problème RECETTE (A) et des problèmes RECETTE (B), RECETTE (C1) et RECETTE (C2).

iii) Dans les problèmes *"fusion"* du type *"fraction"* on observe une augmentation considérable de la fréquence des procédures *"fonction"* - par rapport aux problèmes *"partition"* - et une diminution importante des procédures *"scalaire"*.

Les deux premières remarques témoignent de la difficulté des élèves à saisir la relation correcte entre les deux grandeurs en jeu. Cet obstacle sémantique fait que les élèves les plus *"forts"* recourent à l'opérateur *"scalaire"* ; quant aux moins *"forts"*, ils établissent entre les deux grandeurs une relation additive.

L'augmentation de la fréquence des procédures *"fonction"* dans les problèmes *"fusion"* du type *"fraction"* (remarque iii) semble tout à fait logique si on pense à la structure sémantique de ces problèmes : le fait que l'une des deux grandeurs, dans l'énoncé, constitue une partie de l'autre, oriente les élèves plutôt vers une procédure *"fonction"* que vers une procédure *"scalaire"*.

Il est, cependant, important de souligner le petit nombre de recours à l'unité pour ces mêmes problèmes. Cela témoigne de la difficulté rencontrée par les élèves pour donner une signification à la valeur *"unitaire"*.

Quelqu'un pourrait imputer cette difficulté au fait que dans un problème *"fusion"* la valeur *"unitaire"* est un nombre pur. Néanmoins, cela n'empêche nullement qu'elle ait une signification. Dans le problème ALLIAGE, par exemple, l'opérateur *"fonction"* : 100g/40g = 2,5 est un nombre pur, mais il a une signification particulière : il représente le nombre de grammes d'alliage correspondant à un gramme d'argent.

Les remarques précédentes montrent bien l'influence de certains paramètres sémantiques - que nous allons analyser par la suite - sur le processus de résolution d'un problème de proportionnalité par les élèves.

IV Paramètres sémantiques

Nous venons de voir que notre hiérarchie des problèmes, par rapport aux aspects sémantiques mis en jeu, éclaire les niveaux de réussite observés chez les élèves. Cependant, nous avons aussi relevé des écarts, dans les taux de réussite, par rapport à ce que notre analyse nous permettait de prévoir (§ 3.2). Cela s'explique par l'influence d'autres facteurs sémantiques qui jouent de façon transversale à la hiérarchie établie : ils rendent plus difficile un problème à variables différenciées, ou au contraire ils facilitent la tâche des problèmes de type fusion.

Deux de ces facteurs sont particulièrement importants :
A) La *"signification"* de l'opérateur *"fonction"*.

B) La congruence (ou non congruence) sémantique entre les deux parties de l'énoncé.

Analysons chacun de ces facteurs séparément :

A) La compréhension de la situation décrite dans l'énoncé d'un problème de proportionnalité, constitue le premier pas pour la résolution de ce problème. Le traitement numérique ne fait que traduire en opérations mathématiques les relations trouvées entre les différentes grandeurs que la situation met - à la fois - en jeu. Cela nous amène à dire que parmi les paramètres sémantiques, la *"signification"* de l'opérateur *"fonction"* - qui est l'expression de ces relations -, est peut-être le plus important.

C'est cette tendance des élèves à essayer de comprendre la relation de deux grandeurs mises en jeu dans l'énoncé d'un problème, qui pourrait expliquer la plus grande fréquence de la procédure *"fonction"* - par rapport à la procédure *"scalaire"* - observée par KARPLUS et al dans [6] :

"... Yet it does not shed any light on why within recipe relations are favored so greatly... Noelting's theoretical comments do not clarify these issues either. We believe that the greater salience of the "within" relationships ... explain our observations ..."

Lorsque l'opérateur *"fonction"* renvoie l'élève à un concept familier, nous nous attendrons à ce que le problème soit relativement facile. C'est cette raison qui nous a conduit à penser que les problèmes *"différenciation"* doivent être en général mieux réussis que les problèmes *"fusion"*, ce qui s'est trouvé corroboré par les résultats de notre expérience.

A partir de nos résultats, nous pouvons affirmer que parmi les trois explications que F. TOURNIAIRE propose pour expliquer la difficulté de problèmes de mélanges celle se basant sur la difficulté de la conceptualisation d'une situation de mélange est prédominante :
"... The presence of a mixture does appear to increase the difficulty of problems. It may be because mixture situations are less familiar to the subjects, because continuous quantities are involved, or because mixtures are more difficult to conceptualize. [11]".

Même dans le cas de problèmes de même type, il arrive qu'un opérateur *"fonction"* soit plus familier qu'un autre : pour les problèmes *"différenciation"*, par exemple, l'opérateur "F/Kg" est plus souvent rencontré dans la vie courante que l'opérateur "Kg/F" ou "F/g". A son tour, l'opérateur, par exemple, "F/g" est plus familier que l'opérateur "l/Km". D'où la différence de réussite même entre des problèmes de même type.

B) Dans l'énoncé de n'importe quel problème de valeur manquante, il faut distinguer deux parties :
- la partie *"information"*, où l'on donne les valeurs de deux grandeurs mises en jeu,
- la partie *"question"*, où la valeur d'une seule grandeur est donnée et l'autre est demandée.

Le calcul d'un des deux opérateurs *"fonction"* possibles, peut rendre les deux parties de l'énoncé congruentes ou non congruentes sémantiquement [4].

Prenons le cas du problème ACHAT (A) :

> *"Madame Danaud a payé 93 F pour 7,5 Kg de raisins.*
> P
> *Quelle quantité de raisins aurait-elle avec 62 F"*

Après le calcul de l'opérateur "F/Kg" le problème devient :

> *"1 Kg de raisins coûte 12,4 F.*

P1

Quelle quantité peut-on acheter avec 62 F ?"

L'énoncé du problème P1 est un énoncé *"non-congruent"*.

Dans le cas où on calcule l'opérateur "Kg/F", le problème devient :

"Avec 1 F on achète 0,08 Kg de raisins.

P2

Quelle quantité peut-on acheter avec 62 F

L'énoncé du problème P2 est un énoncé *"congruent"*.

Une analyse détaillée du corpus des réponses pour l'ensemble des problèmes, a montré que parmi les deux opérateurs *"fonction"* possibles, les élèves préfèrent calculer celui qui rend les deux parties de l'énoncé congruentes.

Prenons, par exemple, le cas des problèmes CONSOM (A1) et CONSOM (A2), qui, en fait, sont deux questions posées à partir d'une même information : *"une voiture a consommé 28 l d'essence pour 350 km"*. La solution la plus *"économique"* serait de calculer un des deux opérateurs *"fonction"* (pour le cas où l'élève choisit la procédure *"fonction"*) et répondre aux deux questions. Néanmoins, nous avons observé un comportement différent :

- Parmi les 39 élèves qui utilisent une procédure *"fonction"* ou *"unitaire"* au problème CONSOM (A1), 30 calculent l'opérateur qui rend l'énoncé congruent : la quantité d'essence dont on a besoin pour 1 km.
- Parmi les 38 élèves qui utilisent une des deux procédures précédentes pour résoudre le problème CONSOM (A2), 33 calculent également l'opérateur qui rend l'énoncé congruent : le nombre de kilomètres que l'on peut parcourir avec 1 litre d'essence.

Dans le cas où la *"congruence"* de l'énoncé d'un problème résulte du calcul d'un opérateur *"fonction"* familier, le taux de réussite à ce problème est assez élevé.

Prenons comme exemple le problème ACHAT (B). Le calcul de l'opérateur "F/g" rend l'énoncé congruent. D'où les 64 % de réussite (36 parmi les 39 élèves qui utilisent une procédure *"fonction"*, calculent l'opérateur "F/g").

En revanche, au problème ACHAT (A), bien que l'opérateur "F/Kg", soit plus familier que l'opérateur "F/g", l'énoncé non-congruent qui résulte après son calcul fait que le taux de réussite à ce problème ne dépasse pas 61 %.

Au problème ACHAT (C) l'opérateur "g/F" est encore moins familier que les deux précédents. Or, malgré le fait que après son calcul l'énoncé devient congruent, le taux de réussite ne dépasse pas 53 %.

Pour mieux démontrer l'effet positif d'un énoncé congruent qui résulte du calcul d'un opérateur *"fonction"* familier, nous présentons un dernier exemple : le problème suivant a été proposé à 74 élèves du même âge que ceux qui ont eu les trois problèmes précédents, avant l'enseignement de la proportionnalité.

"Madame Didier a payé 76 F pour 8 Kg de tomates. Combien doit payer Madame Ripp qui a acheté 10 Kg de tomates de même qualité ?"

Le taux de réussite observé a été de 73 %.

V Conséquences didactiques

5.1. Implications pour l'enseignement

Nous avons vu que la réussite à un problème de proportionnalité dépend largement de la difficulté de l'interprétation de la situation décrite dans l'énoncé de ce problème.

Or, il y a des problèmes où le type de relation entre grandeurs, exprimé en principe par la valeur unitaire, est si évident que l'application du raisonnement proportionnel s'effectue sans grandes difficultés ; c'est le cas, par exemple, d'une situation d'achat-vente.

Par contre, il y a d'autres problèmes où la relation entre grandeurs est moins évidente ; c'est le cas, par exemple, des problèmes *"fusion"* du type *"partition"*.

Nous avons également vu que l'écart des réussites, dû aux difficultés sémantiques diminue considérablement après un enseignement qui prévoit une analyse spécifique à chaque type de problèmes et qui propose une réflexion sur leurs difficultés.

Nous pensons donc qu'un enseignement organisé selon le principe précédent pourrait faciliter l'acquisition du raisonnement proportionnel, et ceci, sans obliger les élèves à respecter une formalisation *"mathématique"* dont ils ignorent souvent le sens.

5.2. L'importance d'une analyse sémantique des problèmes de proportionnalité.

L'écart entre la réussite aux problèmes *"différenciation"* et celle aux problèmes *"fusion"* après une période d'enseignement centrée sur les aspects sémantiques a été plus petit que nous l'attendions (voir tableau IV, où est donné le niveau de réussite, pour chaque problème, de l'ensemble des 144 élèves).

Nous avons supposé que cela était dû aux performances de la *"population expérimentale"* : en effet, l'enseignement de la proportionnalité aux élèves du groupe *"expérimental"*, avait été basé sur une analyse sémantique des problèmes traités pendant le cours. Nous ne nous étions pas contentés d'une décision de la part des élèves en ce qui concernait les calculs à effectuer pour arriver à la solution, mais nous avions toujours demandé un raisonnement plus complet, une justification de la procédure qu'ils choisissaient.

Pour vérifier cette explication, nous avons repris séparément les réponses à chaque problème, des élèves de chaque groupe. A l'aide d'une classification non hiérarchique [9], nous avons partagé les élèves de chaque groupe en deux niveaux selon les réponses données :
- le niveau I (élèves forts et moyens) et
- le niveau II (élèves plutôt faibles et faibles).

Le tableau suivant présente la répartition par niveau des élèves du groupe *"expérimental"* (G.E.) et celle du groupe de *"référence"* (G.R.)

TABLEAU VI

Groupe	GE	GE	GR	GR
Niveau	(fréquen.)	(pourcen.)	(fréquen.)	(pourcen.)
I	30	65	38	38,5
II	16	35	60	61,5

Ce tableau montre qu'effectivement la diminution de l'écart entre les problèmes *"différenciation"* et les problèmes *"fusion"* est dûe aux performances des élèves du groupe *"expérimental"*, lesquelles sont nettement meilleures que celles de la *"population de référence"* : pour 65 % de la *"population expérimentale"* contre 38,5 % de la *"population de référence"*, il y a une relative maîtrise des problèmes de proportionnalité.

Conclusion

Le traitement d'un problème de proportionnalité par les élèves est d'abord de type sémantique avant d'être mathématique. Nous avons vu une grande variété de traitements sémantiques qui aboutissent à la même séquence d'opérations mathématiques.

Le type de raisonnement demandé n'est pas le même pour tous les problèmes de proportionnalité. La difficulté du raisonnement proportionnel se trouve surtout dans la traduction de la relation entre deux grandeurs en jeu en opération mathématique et dépend largement de deux paramètres :
- la signification de l'opérateur *"fonction"*,
- la congruence (ou non congruence) entre les deux parties de l'énoncé.

Un enseignement qui serait organisé selon la hiérarchie résultant de la classification que nous avons présentée et qui proposerait non seulement une analyse sémantique de chaque type de problèmes, comme nous l'avons fait, mais aussi une réflexion sur leurs différences, pourrait conduire à des résultats supérieurs à ceux que nous avons obtenus.

REFERENCES

(1) BELL (A). - *Diagnostic teaching experiments with mulltiplicative problems*, in "Actes de la IV° école d'été de didactique des mathématiques", p. 327-351, Ed. IREM Paris VII.
(2) DOUADY (R.). (1984). - *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques*. - Une réalisation dans tout le cursus primaire. - Thèse d'Etat, Université Paris VII.
(3) DUPUIS (C.), PLUVINAGE (F.) (1981). - *La proportionnalité et son utilisation*, in "Recherches en Didactique des Mathématiques", vol. 2.2., p. 165-212 (1981)
(4) DUVAL (R.) (1988). - *Ecarts sémantiques et cohérence mathématique*, in "Annales de Didactique et de Sciences Cognitives", vol. 1, Ed. IREM Strasbourg
(5) FREUDENTHAL H. (1983). - *Didactical phenomenology of mathematical structures*. - D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
(6) KARPLUS R., PULOS S; and STAGE E. (1980). - *Early adolescent's structure of proportional reasoning*, in "Proceedings of the fourth international conference for the

psychology of mathematics education", p. 136-142, Ed. R. KARPLUS, Lawrence Hall of Science, University of California.

(7) KARPLUS R., PULOS S. and STAGE E. (1983). - *Early adolescent's proportional reasoning on "rate" problems.* - in "Educational Studies in Mathematics", vol. 14, p. 219-233.

(8) KOLEZA - ADAM E. (1987). - *Décalages cognitifs dans les problèmes de proportionnalité (préalables à toute séquence didactique pour des élèves de 10-12 ans).* - Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg I.

(9) LEBART L., MORINEAU A., FENELON J.P. (1982). - *Traitement des données statistiques - Méthodes et programmes* -, Bordas, Paris.

(10) TOURNIAIRE F., PULOS S. (1985). - *Proportional reasoning : a review of the literature.* - in "Educational Studies in Mathematics", vol. 16, p. 181-204.

(11) TOURNIAIRE F. (1986). - *Proportions in elementary school* - in "Educational Studies in Mathematics", vol. 17, p. 401-412.

ANNEXE

ACHAT (A) : Madame DANAUD a payé 93 F pour 7,5 Kg de raisins. Quelle quantité de raisins aurait-elle avec 62 F ?
ACHAT (B) : Le prix d'un kilo de jambon est 64 F. J'ai acheté 800 g. Combien dois-je payer ?
ACHAT (C) : 350 g de foie gras coûtent 91 F. Quelle quantité de foie gras peut- on acheter avec 65 F ?

Une voiture a consommé 28 litres d'essence pour 350 Km.
CONSOM (A1) : Combien a-t-elle consommé en moyenne aux 100 Km ?
CONSOM (A2) : Quelle distance peut-elle parcourir si son réservoir contient au départ 42 litres ?

RECETTE (A) : Une recette de pudding pour 4 personnes prévoit 150 g de sucre. Quelle quantité de sucre doit-on prévoir pour 6 personnes ?
RECETTE (B) : Une recette de cuisine donne les quantités à utiliser en pots de yaourt. Je lis : Vous mélangez 6 pots de sucre avec 9 pots de semoule. Je n'ai que 5 pots de sucre. Combien de pots de semoule dois-je utiliser ?
RECETTE (C) : Un livre de cuisine donne une recette de pâte brisée : On mélange 180 g de farine, 75 g de beurre, et de l'eau. Je n'ai que 120 g de farine. Combien de beurre dois-je utiliser ?

PRUNES : Madame DUPONT prépare chaque année des prunes en conserve. Pour cela, elle dénoyaute les prunes, c'est-à-dire qu'elle enlève les noyaux. A partir de 5 Kg de prunes entières, on obtient 4 Kg de prunes dénoyautées. Si elle achète 7 Kg de prunes entières, combien aura-t-elle de prunes dénoyautées ?

ALLIAGE : Un orfèvre construit des bijoux en utilisant un alliage d'argent et de bronze. Dans 100 g de cet alliage, il y a 40 g d'argent (le reste est du bronze). Le bracelet qu'il m'a vendu pèse 120 g. Quelle quantité d'argent a-t-il utilisé pour le construire ?

Les problèmes de mise en équation, en 3ème et en 2nde.

Nicole Cordier

The difficulties that the students meet in modelling with equations the given information of a problem are well known. A recent research has shown that these difficulties come from the errors of representation of the objects described in the statement and it has established a systematic inventory. This paper presents the results of this research as well as two teaching experiments. The first of these experiments aimed to make the students aware of the errors of representation. The second one is based on the use of an intermediate representation for learning how to select the relevant information from the statement and organise it in function of writing a system of equations.The possibility of an efficient teaching of modelling in equations is also put in evidence.

La mise en équation des données d'un problème est une activité qui se révèle difficile pour les élèves de troisième et même pour ceux de seconde. Alors même que les algorithmes de résolution d'un système d'équations sont bien maîtrisés, le passage du texte de l'énoncé à l'écriture des équations s'avère souvent impossible à effectuer correctement. On voit alors apparaître des erreurs sémantiques sur le choix des variables, des incompréhensions ou des oublis dans la lecture de l'énoncé concernant la détermination des relations à prendre en compte, quand il n'y a pas un abandon pur et simple devant une tâche insaisissable. Une telle situation impose avec évidence la nécessité d'un enseignement spécifique, comme cela a été souligné: "c'est la mise en équation des problèmes qui est la plus difficile, l'extraction des informations pertinentes et leur traduction algébrique devraient être l'objet d'un enseignement plus systématique" (G. Vergnaud et A. Cortez, 1986). Mais l'élaboration d'un tel enseignement est

© Annales de Didactique et de Sciences Cognitives
5 (1993) (p.149-176) - IREM de Strasbourg

loin d'être évidente. Les programmes officiels de la classe de 3ème (1989) sont sur ce point révélateurs. Très clairs pour ce qui concerne les algorithmes de résolution (méthode de substitution, de combinaison, graphique, interprétation du résultat), ils se contentent, pour la mise en équations, de suggérer de donner "des exemples variés de problèmes se ramenant au 1° degré".

L'extraction des informations pertinentes de l'énoncé est une démarche complexe. Elle recouvre en réalité deux opérations d'identification différentes. La première est l'identification des objets auxquels réfère le texte de l'énoncé: des erreurs de représentation sur les objets décrits dans le texte entraînent des erreurs d'identification, lesquelles peuvent se traduire par des erreurs dans la redésignation algébrique des objets au moyen de lettres (x, y, z...). La seconde opération est l'identification des relations que le texte de l'énoncé établit entre les objets auxquels il réfère : une compréhension insuffisante du texte entraîne une identification floue de ces relations et se traduit par un abandon ou par des erreurs dans l'écriture du système d'équations.

Il est important de bien distinguer ces deux opérations. Car, contrairement à ce qu'on pourrait croire, beaucoup de difficultés rencontrées par les élèves de troisième ou de seconde se rapportent d'abord à cette première opération d'identification. Ces difficultés ne sont pas toujours faciles à repérer, car elles se trouvent souvent mélangées avec celles propres à la seconde opération. Une recherche récente a montré l'importance des "défauts de représentation" concernant les objets à identifier dans un énoncé de problème, et elle en a établi un inventaire systématique (Kourkoulos, 1990). Il reste bien évidemment les difficultés liées à la seconde opération et qui renvoient aux difficultés propres à la compréhension d'un texte. Un enseignement centré sur la mise en équations semblerait donc devoir combiner à la fois un travail de prise de conscience des défauts de représentation concernant les objets et un apprentissage de la lecture des énoncés de problèmes de mise en équation. On peut se demander cependant si un apprentissage pour la première opération n'entraîne pas un bénéfice tel qu'un travail sur la seconde opération devient inutile, ou si , à l'inverse, un apprentissage de la lecture des énoncés permet de résoudre les difficultés liées à la première opération. C'est cette question que nous nous proposons d'examiner dans cet article.

Pour cela, nous présenterons d'abord les différents défauts de représentation mis en évidence par Kourkoulos, ainsi que leurs conséquences sur l'écriture des équations. Les difficultés relatives à la première opération dépendent de ces défauts de représentation. Puis nous présenterons deux expériences d'enseignement. Une qui privilégie un apprentissage de la première opération, en visant à la prise de conscience de ces différents défauts de représentation: elle a été conduite par

Kourkoulos. Une autre, qui privilégie la seconde opération, et dans laquelle l'apprentissage est davantage conçu comme un apprentissage de compréhension de texte. Ces deux approches ne sont évidemment pas antagonistes, au contraire, elles peuvent être comparées non seulement du point de vue de l'importance des progrès enregistrés, mais aussi du point de vue du coût temporel de leur organisation.

I. Étude des difficultés de mise en équation.

Avant d'analyser les difficultés rencontrées par les élèves lors de la mise en équation d'un problème, il faut définir le cadre à l'intérieur duquel cette étude s'est faite. Tout d'abord, le choix des exercices proposés aux élèves, et qui servent de support à la recherche, a été mûrement réfléchi, car **tous les exercices ne permettent pas de repérer les défauts des élèves** concernant la mise en équations. D'autre part, il faut préciser les méthodes utilisées pour l'analyse des réponses des élèves.

A. Le choix des exercices proposés pour repérer les différentes difficultés que peuvent rencontrer les élèves.

Les exercices utilisent une situation réelle, afin de faciliter la compréhension du texte. Ils ne peuvent pas être résolus par l'arithmétique pratique. Ils doivent aboutir à un système de 2 équations du 1er degré à 2 inconnues. On impose les caractéristiques suivantes :

1. Pour mettre à jour les différents défauts, il est nécessaire de prendre des énoncés comportant 2 dimensions et 2 références. La dimension concerne bien sûr les unités choisies, et la référence est liée à une action, à une situation, à un objet. Par exemple un énoncé évoquant un vélomoteur qui monte puis descend une colline (la montée et la descente sont les deux références), avec des données de temps et de distance parcourue (le temps et la distance sont les deux dimensions). Un des défauts les plus répandus est de ne prendre en compte que les références ou que les dimensions.
2. La première équation à obtenir doit être du type $x+y = a$ ou $x-y = a$, pour ne pas rebuter les élèves d'entrée de jeu. La seconde équation doit être du type $bx+cy = d$, afin d'obliger les élèves à concevoir une multiplication avec les inconnues.
3. Les exercices doivent être donnés sous des versions différentes, afin d'obliger les élèves à réfléchir à la signification des informations et à s'adapter à de nouvelles relations. Voici par exemple une variation possible d'énoncé:

Dans une usine, on fabrique du chocolat. Une première machine produit 13 kg de chocolat par minute. Au bout d'un certain temps, on la remplace par une deuxième machine qui produit 21kg de chocolat par minute. La fabrication dure en tout 510 minutes. *La première machine a fabriqué* 238 kg *de plus que la seconde.* Combien de temps a travaillé la première machine.

Dans une usine, on fabrique du chocolat. Une première machine produit 18 kg de chocolat par minute. Au bout d'un certain temps, on la remplace par une deuxième machine qui produit 24 kg par min. La fabrication a duré en tout 231 min. *La production totale est de* 5040 kg de chocolat. Combien de temps a travaillé la première machine?

4. Certains problèmes doivent être proposés avec des quantités discrètes, c'est-à-dire des quantités qu'on peut séparer en unités ("18 grosses billes..;"), et d'autres avec des quantités continues, associées à des nombres réels ("une barre en zinc pèse 11 g.."). Les élèves réussissent mieux avec les quantités discrètes.

Une liste de problèmes remplissant ces différentes conditions est donnée dans l'annexe A.

B. l'analyse des réponses des élèves.

Kourkoulos a mis au point un ensemble d'exercices répondant aux conditions précédentes et a fait travailler les élèves de 3ème et de 2nde sur ces exercices. Tout d'abord, il a fait passer un questionnaire contenant 4 exercices à mettre en équation puis à résoudre. En analysant les réponses il a remarqué que souvent elles ne permettaient pas de savoir quel avait été le raisonnement de l'élève ayant conduit à ces réponses. De plus, il y avait des réponses où coexistaient plusieurs défauts, ce qui en rendait l'interprétation difficile. Il a donc alors paru nécessaire de recourir à des entretiens individuels pour identifier les défauts de représentation : les élèves étaient invités à expliquer le pourquoi de leurs réponses à chaque étape du raisonnement. C'est de cette manière que Kourrkoulos est passé des erreurs observées à l'identification de défauts typiques, et relativement stables, dans les démarches de résolution. Il a ainsi établi une liste de dix défauts primitifs de représentation.

Un enseignement de la mise en équation utilisant sur des exercices appropriés et progressifs a été ensuite proposé. Là aussi, les élèves étaient invités, à chaque étape de la résolution, à expliquer ce qu'ils écrivaient. Cela a permis de mieux observer les phases où les défauts de représentation provoquaient des difficultés. Et cela a permis également des interventions mieux adaptées.

Il est donc important de bien comprendre que **le repérage et la correction des défauts des élèves ne peuvent pas se faire dans n'importe quelles conditions.** Cela veut dire qu'iI ne faut pas se méprendre sur les problèmes que l'on donne aux élèves. Il y a , en effet, des problèmes qui peuvent être réussis même par les élèves qui ont certains des défauts de représentation. Le premier problème "brioches et croissants" donné en annexe en est un bel exemple. Des problèmes de ce type sont très souvent proposés dans les manuels, et ils contribuent à cacher, aux yeux de l'enseignant comme à ceux des élèves, les difficultés et les procédures d'analyse propres aux problèmes de mise en équation. Les problèmes choisis par Kourkoulos, en revanche, sont destinés à faire apparaître les défauts de représentation: ils ne peuvent pas être réussis tant que subsistent ces défauts de représentation. On dit que ce sont de "bons filtres à défauts". Mais un problème pouvant être un bon filtre pour un défaut déterminé et un mauvais filtre pour un autre, il importe de recourir à plusieurs problèmes.

C. Les défauts primitifs de représentation à l'origine des difficultés de mise en équation

Kourkoulos a identifié 10 défauts primitifs de représentation. Ils constituent une base de défauts: la variété des réponses qui peuvent être observées s'explique par la présence de ces défauts pris séparément ou par leur combinaison. Nous allons les présenter brièvement en les illustrant par des exemples.puis nous en donnerons un tableau récapitulatif.

1. Le défaut de **variable référentielle**:

Il y a défaut de variable référentielle quand le seul aspect pris en compte pour le choix d'une inconnue est une action particulière, ou une situation concrète, comme le montre le texte de l'énoncé.

Un vélomoteur monte une colline à la vitesse de 15 mètres par seconde; puis il redescend de l'autre côté à la vitesse de 21 mètres par seconde. Le parcours total a duré 270 secondes, et la montée est de 126 mètres plus longue que la descente. Combien de temps a duré la montée?

Ce défaut de représentation conduit à écrire :

x : la montée, y : la descente

$$x+y=270$$

$$x=y+126$$

2. Le défaut de **somme référentielle**:

Il y a défaut de somme référentielle quand le seul aspect pris en compte pour effectuer une somme est celui des différents "objets" désignés dans le texte, en négligeant la dimension sémantique ou conceptuelle dont ces "objets" relèvent. Une somme "non homogène" est alors effectuée. Ce défaut de représentation conduit à écrire :

x: durée de la montée

puis $(x-126)+x=270$

3. Le défaut de la **variable <u>indice</u>**:

Il y a défaut de la variable indice quand l'indice dimensionnel d'une quantité connue est choisi comme inconnue:

Pour le même problème, un élève ayant ce défaut transforme 15m/s en 15x

4. Le défaut d' **égalité de correspondance:**

Il y a défaut d'égalité de correspondance quand ne sont pris en compte que les objets de référence que le texte met en correspondance. L'égalité écrite signifie seulement une correspondance.

Dans une usine, on fabrique du chocolat. Une *première machine produit* 13 kg de chocolat par minute. Au bout d'un certain temps, on la remplace par *une deuxième machine qui produit* 21 kg de chocolat par minute. La fabrication dure 510 minutes en tout. La *première machine a produit* 238 kg de plus *que la seconde machine.* Combien de temps a fonctionné la 1ère machine?

Un élève ayant ce défaut de représentation écrit:

13x: quantité produite par la 1ère machine

21y: quantité produite par la 2ème machine

$$13x+21y=510$$

5. Le défaut de la **variable indicée**:

Il y a défaut de la variable indicée quand un bloc ax représente une correspondance, mais non pas une multiplication.

Pour le même problème un élève ayant ce défaut écrit:

x est la durée de travail de la 1ère machine

13x signifie que pendant le temps x la machine produit 13 kg/min.

13x représentant pour l'élève une durée il pose donc le système suivant:

$$13x+21y=510$$
$$13x=21y+238$$

On peut noter que s'ajoute ici le défaut de somme référentielle, puisque qu'une durée se trouve additionnée avec des poids.

6. Le défaut de **coefficient de proportionnalité référentiel**:

Il y a défaut de coefficient de proportionnalité référentiel quand l'unité et la quantité qui lui correspond sont représentées par le même symbole.

Une barre métallique est construite en deux parties: la 1ère est en zinc et chaque cm de cette partie pèse 11g. La 2ème est en fer et chaque cm de cette partie pèse 17g. La partie en fer est de 14 cm plus longue que la partie en zinc. La barre pèse en tout 980g. Quelle est la longueur de la partie en zinc?

L' élève ayant ce défaut de représentation estime que 17g c'est pour 1cm et donc que 17g représente 1cm. Il peut alors écrire:

$$11x+17y=980$$
$$11x+14=17y$$

Ce défaut présente une similitude avec le défaut "variable référentielle". En effet, pour celui qui a le défaut de variable référentielle, x signifie soit la masse de la partie en fer, soit sa longueur. Et, pour celui qui a le défaut de coefficient de proportionnalité référentiel, 17 signifie soit 1 cm, soit les 17g. que pèse 1cm

Ce défaut est assez difficile à localiser car, dans un grand nombre d'exercices, il n'empêche pas d'arriver quand même au système correct. Le problème suivant en est un exemple.

Paul a 18 grosses billes et 13 petites billes. Toutes les grosses billes ont la même masse, et toutes les petites aussi. Une grosse bille pèse 7 grammes de plus qu'une petite bille. La masse totale des 18 grosses billes fait 206 grammes de plus que la masse totale des 13 petites. Quelle est la masse d'une petite bille?

Tout en estimant que x signifie soit une petite boule, soit le poids d'une petite boule, on peut écrire:

$$x+7=y$$
$$13x+206=18y$$

7. Le défaut de **variable dimensionnelle**:

Il y a défaut de variable dimensionnelle quand le seul aspect pris en compte pour le choix d'une inconnue est la dimension selon laquelle les quantités relatives à deux objets vont varier. Il apparaît lorsque le seul aspect qui détermine l'emploi de la variable est la dimension.

Pour le problème des barres métalliques cité en 6, ce défaut de représentation conduit à écrire :

x la longueur

$$11x+17x=980$$

8. Le défaut de **bloc référentiel de forme multiplicative**:

L'élève utilise un bloc ax, sans en comprendre précisément la signification, seul l'aspect référentiel est pris en compte.

Pour le même problème des barres métalliques, ce défaut de représentation conduit à écrire :

x : longueur du zinc   y : longueur fer

11x: partie en zinc   17y:partie en fer

Le système suivant est ensuite posé :

11x+17y=980

11x+14=17y

Cet exemple permet de voir la difficulté qu'il peut parfois y avoir à bien identifier les défauts en présence. En effet, avec la seule écriture de ce système d'équations, on pourrait aussi bien diagnostiquer un défaut de somme référentielle, un défaut de coefficient de proportionnalité référentiel, ou encore un défaut de variable indicée. C'est seulement par un entretien avec l'élève que le défaut de représentation ayant effectivement conduit à l'écriture d'un tel système peut être identifié.

9. Le défaut de **coefficient de proportionnalité unité**:

Il y a défaut de coefficient de proportionnalité unité quand, pour un coefficient de proportionnalité, le bloc ax est posé pour une quantité dont la valeur est égale à x, alors que a est différent de 1.

Pour le problème des barres métalliques, ce défaut de représentation conduit à écrire :

x: nombre de cm de zinc

11x: longueur de la partie en zinc

10. Le défaut de **"non mise en parenthèses"**:

Il est très connu de tous les enseignants.

Pour le problème des barres métalliques, un élève ayant ce défaut de représentation écrit:

x: longueur de la partie en zinc

x+14: longueur de la partie en fer

11x+17x+14=980

Ces 10 défauts de représentation constituent la base de tous les défauts de représentation possibles concernant la mise en équations des données de l'énoncé. Il y a bien sûr des défauts concernant la résolution du système d'équations. Comme cela sort du cadre du problème que nous étudions, nous nous contenterons de mentionner ceux relevés par Kourkoulos:

-la non-homogénéité des équations,

-les défauts dans l'algorithme de résolution.

Défauts de représentation concernant :	Un vélomoteur monte une colline à la vitesse de 15 mètres par seconde; puis il redescend de l'autre côté à la vitesse de 21 mètres par seconde. Le parcours total a duré 270 secondes, et la montée est de 126 mètres plus longue que la descente. Combien de temps a duré la montée?	Dans une usine, on fabrique du chocolat. Une *première machine produit* 13 kg de chocolat par minute. Au bout d'un certain temps, on la remplace par *une deuxième machine qui produit* 21 kg de chocolat par minute. La fabrication dure 510 minutes en tout. La *première machine a produit* 238 kg de plus *que la seconde machine.* Combien de temps a fonctionné la 1°machine?	Une barre métallique est construite en deux parties: la 1ère est en zinc et chaque cm de cette partie pèse 11g. La 2ème est en fer et chaque cm de cette partie pèse 17g. La partie en fer est de 14 cm plus longue que la partie en zinc. La barre pèse en tout 980g. Quelle est la longueur de la partie en zinc?
la *variable* référentielle	x : la montée, y : la descente x+y=270 x=y+126		
la *somme* référentielle	x: durée de la montée (x-126)+ x=270		
la variable indice	15m/s transformé en 15x		
l'égalité de correspondance		13x: quantité 1ère machine 21y: quantité 2ème machine 13x+21y=510	
la variable indicée		x durée de la 1ère machine, 13x pendant le temps x La machine produit 13 kg/min. 13x représentant une durée 13x+21y=51 13x=21y+238	
le coefficient de proportionnalité *référentiel*			17g c'est pour 1cm, donc 17g représente 1cm. 11x+17y=980 11x+14=17y
la variable dimensionnelle			x la longueur 11x+17x=980
le bloc référentiel de forme multiplicative			x : longueur du zinc y : longueur fer 11x: partie en zinc 17y:partie en fer 11x+17y=980 11x+14=17y
le coefficient de proportionnalité *unité:*			x: nombre de cm de zinc 11x: longueur de la partie en zinc
la non mise entre parenthèses			x: longueur de la partie en zinc x+14: longueur de la partie en fer 11x+17x+14=980

Au cours de son travail Kourkoulos a fait passer un questionnaire dans 3 classes de 3ème et dans 3 classes de 2nde. Ce questionnaire comportait 4 problèmes à mettre en équation et à résoudre. Il l'a fait suivre d'une centaine d' entretiens individuels. Les résultats de cette évaluation approfondie ont été les suivants:

* 22 élèves (24%) ne présentaient pas de défauts de représentation
* 60 élèves (65%) présentaient un des 10 défauts précédents
* 6 élèves traitaient les exercices par des essais d'arithmétique pratique, et 4 effectuaient des mises en équation erronées, qui n'ont pas permis pas de conclure s'ils avaient des défauts de représentation.

On peut donc estimer que la grande majorité des élèves n'était pas, alors, en mesure d'utiliser correctement les symboles algébriques pour représenter les relations entre les quantités.

D. Les élèves et la conception de la multiplication

Pour mettre un problème en équation, une fois que les inconnues sont bien choisies, il faut savoir exprimer correctement les relations entre elles. C'est pourquoi Kourkoulos s'est aussi intéressé aux multiplications que les élèves doivent concevoir pour trouver une quantité inconnue du problème à partir de 2 autres. Il a découvert que les élèves utilisent, au choix, une des 4 procédures suivantes:

1. La **procédure additive** :

Pour le problème déjà cité des barres métalliques, on trouve le dessin suivant

11g 11g 11g
I___I___I___I____________________I_________________________I
1cm 1cm 1cm
ZINC FER

La situation pour la partie en zinc est ensuite décrite de la façon suivante:

1cm............11g
2cm..............22g
x(cm)...........x fois 11g

Cette démarche représente une discrétisation de la longueur (c'est-à-dire qu'elle est séparée en plusieurs morceaux unitaires). Elle est appliquée, par analogie, au cas de la partie en fer y(cm)............y fois 17g

2. La **procédure de transfert des rapports:**
Lorsqu' il y a distribution homogène entre 2 grandeurs, les rapports entre les quantités correspondantes sont conservés:

si q1=kq2, alors q'1= kq'2

Pour le problème du vélomoteur cité plus haut, cette procédure conduit à écrire: en 1s il parcourt 15m, en 2s il parcourt 2 fois plus, et en x secondes, il parcourra x fois plus, donc 15fois x

3. La **procédure de reconnaissance symbolique:**
La symbolisation du coefficient de proportionnalité est utilisée pour trouver la composition multiplicative à faire:
Pour le problème des machines cité plus haut cette procédure conduit à dire: "13kg par minute, c'est des kg sur des minutes, donc on multiplie par des minutes et le résultat c'est des kg"

4. La procédure provenant de **l'utilisation de la règle de trois (et des tableaux de proportionnalité)** :
ex: pb. 2 l'élève utilise un schéma du type:
1 min________13kg x min?

Peu importe qu'un élève utilise l'une ou l'autre de ces procédures, il est essentiel qu'il puisse choisir. S'il fait une erreur dans le développement de sa démarche, il faut l'aider à poursuivre avec la méthode qu'il a choisie. Kourkoulos a trouvé des possibilités de remédiation aux difficultés qu'un élève peut rencontrer dans chacune de ces procédures. Il vaut mieux privilégier les capacités de l'élève à raisonner seul, plutôt que lui faire apprendre par coeur une formule du type : vitesse = longueur/temps.
Par ailleurs, les règles de représentation et le statut des symboles utilisés influencent la représentation des compositions multiplicatives. Ainsi, certains élèves ayant les défauts "coefficient de proportionnalité unité" ou "blocs référentiels" ne conçoivent pas qu'il faille multiplier. Au contraire, lorsqu'un élève utilise correctement les symboles algébriques pour représenter les relations entre les quantités, il anticipe la recherche conduisant à la conception de la multiplication et bénéficie de critères de contrôle.

Lors d'une évaluation en classe de troisième, avant une expérience d'enseignement, il est apparu que 4 seulement des 28 élèves de la classe concevaient correctement les multiplications.
Une mauvaise conception des compositions multiplicatives entre les différentes quantités peut donc être une deuxième source d'échecs pour la mise en équations. Mais elle s'accompagne souvent d'un défaut de représentation ou peut se trouver renforcée par ce défaut.

II. Un enseignement centré sur la prise de conscience des défauts de représentation

Après avoir identifié les défauts primitifs de représentation pour la mise en équation, Kourkoulos a organisé un enseignement centré successivement sur deux objectifs:
D'abord, l'apprentissage de la résolution des équations et des systèmes d'équations.
Cet apprentissage a duré 10h dans une classe de 3ème. Nous ne nous y attarderons pas, il faut simplement retenir que *cet apprentissage doit absolument être séparé de celui de la recherche de la mise en équation.*
Puis, l'acquisition d'une méthode de travail pour apprendre à mettre un problème en équation.
C'est seulement l'enseignement visant ce second objectif que nous allons présenter ici.

Cet enseignement a été proposé pendant 9H à une classe de 3ème, un mois après la fin de l'enseignement de la résolution des systèmes.
Cette expérience s'est déroulée ainsi:
— passage d'un test initial, pour évaluer les élèves
— une heure de travail collectif consacrée à la recherche de la mise en équation du problème "vélomoteur"
— alternance du travail individuel par exercices, avec aide personnalisée et explications au tableau pour tous (il y a progressivement moins d'aide pour les exercices proposés)
— passage d'un test final.
A la suite de ce test, il est apparu que 18 élèves sur 28 n'avaient plus de défauts de représentation (contre 3 avant cet enseignement) et que 17 élèves concevaient correctement les multiplications (contre 4 seulement avant).

La première heure de cours est importante, elle est consacrée à la présentation d'une procédure qui permet d'effectuer la mise en équation du problème du "vélomoteur" (annexe problème 5). En voici le déroulement.

1. Identification des données.

La première activité a pour objectif de faire identifier **toutes les quantités qui interviennent explicitement ou implicitement dans l'énoncé.** Pour cela, l'enseignant écrit au tableau tout ce qui, d'habitude, est passé sous silence. Ainsi, après la lecture de l'énoncé, il demande aux élèves de relever toutes les quantités qui interviennent dans la situation décrite par l'énoncé, *même celles qui sont sous-entendues* ou pour lesquelles aucune valeur numérique n'est donnée. L'enseignant les écrit au tableau au fur et à mesure avec l'expression qui leur donne un statut d'objet de référence:

-vitesse de la montée: 15m/s

-vitesse de la descente: 21m/s

-durée du parcours total: 270s

-durée de la montée

-durée de la descente

-longueur de la montée

-longueur de la descente

-différence entre les 2 longueurs: 126m.

La deuxième activité porte sur l'organisation de cette liste **par regroupement en une seule donnée des quantités susceptibles d'avoir un lien entre elles.** Ces regroupements peuvent être effectués sous deux aspects, soit sous l'aspect référentiel (montée et descente), soit sous l'aspect dimensionnel. La liste des données obtenues après les regroupements est écrite au tableau. Les lettres x et y sont alors attribuées aux quantités inconnues.

Regroupement effectué selon l'*aspect référentiel,*	Regroupement effectué selon l'*aspect dimensionnel*
vitesse de la montée: 15m/s	durée de la montée: x
durée de la montée: x	durée de la descente: y
longueur de la montée:?	durée totale: 270s
vitesse de la descente: 21m/s	vitesse de la montée: 15m/s
durée de la descente: y	vitesse de la descente: 21m/s
longueur de la descente:?	longueur de la montée: ?
ensuite ce qui concerne le parcours entier:	longueur de la descente: ?
durée totale: 270 s	différence des longueurs: 126m.
différence entre les 2 longueurs:126m	

2. *Mise en relations des données identifiées.*

La troisième activité a pour objectif de **dégager les relations entre ces différentes données.**

Sur la liste obtenue par regroupement dimensionnel, et en regardant les données relatives aux durées les élèves trouvent rapidement la première équation:

$$x+y=270$$

En revanche aucune relation ne peut être trouvée pour les données relatives aux vitesses. Enfin, pour ce qui concerne les données relatives aux longueurs, un travail d'explicitation est nécessaire. Celui-ci est introduit en demandant de revenir à la signification de la vitesse:

en 1s..........15m de montée parcourus

en 2s...........30m

en xs...........? Les élèves trouvent 15x.

Pour y la procédure de transfert des rapports permet d'écrire rapidement:

en y s............21y parcourus.

Les élèves arrivent alors à la deuxième équation:

$$15x=21y+126$$

Selon cette méthode, ce sont les quantités mentionnées explicitement ou implicitement, avec indication d'une valeur numérique ou sans valeur numérique qui se trouvent mises en avant aux yeux des élèves. ***Un travail de réécriture de la première liste obtenue, suivi d'un travail d'interprétation des données de la dernière liste obtenue est donc nécessaire pour arriver à l'écriture du système d'équations.***

Pour bien faire comprendre cette méthode, on recommence la démarche pour le même problème, *mais en prenant pour réécrire la première liste obtenue un regroupement effectué selon l'aspect référentiel et non plus selon l'aspect dimensionnel.*

Puis on recommence une troisième fois la démarche pour le même problème, mais en proposant un choix d'inconnues différent :

— x étant le longueur de la montée et y étant la longueur de la descente, les élèves doivent alors concevoir une division.

— x étant la durée de la montée, alors la durée de la descente est exprimée par 270-x.

— 4 inconnues, deux pour les durées et deux pour les longueurs.

A chaque fois les élèves doivent chercher les équations, résoudre le système et vérifier qu'ils obtiennent bien les mêmes résultats.

Cette première séance, consacrée aux différentes mises en équation possibles du même problème, permet de comprendre que l'identification des données de l'énoncé est une tâche à part entière. Il faut du temps pour écrire la liste des quantités, et pour trouver leurs regroupements, avant de chercher comment les représenter par des symboles algébriques, et d'écrire leurs relations.
Durant les deux séances suivantes, les élèves travaillent individuellement, avec une aide personnalisée. Il y a ensuite un deuxième cours présentant un autre problème, sous 2 versions différentes qui ne conduisent pas au même résultat. Enfin les cinq dernières séances sont consacrées à des exercices que les élèves doivent traiter de manière de plus en plus autonome. (Kourkoulos, p. 517 à 522).

Voici, à titre indicatif, l'évolution des performances enregistrée au terme de cet enseignement qui a porté sur 9 séances consacrées à l'apprentissage de la résolution des systèmes d'équations, après 10 séances visant le premier objectif (Kourkoulos 1990, p.546,549). Certains ont déjà été mentionnés plus haut.

	Défauts de Représent.		Défauts de Concp. Mul	
28 élèves	oui	non	oui	non
avant	25	3	24	4
après	10	18	10	17

Une comparaison des résultats des élèves de cette classe, sur deux problèmes avec des élèves d'une classe de seconde a donné les résultats suivants (*ibid.* p.552) :

		Réussite	Échec
Modalité A, problème	15 élèves. de 3ème	10	5
type "chocolat"	48 de 2nde	6	42
Modalité B, problème	13 élèves de 3ème	10	3
type "vélomoteur"	44 de 2nde	5	39

Au terme de neuf séances d'un enseignement spécifiquement consacré à la mise en équations des données d'un énoncé, Kourkoulos semble être parvenu à faire évoluer environ un élève sur deux. Ce résultat peut apparaître plus ou moins spectaculaire selon que l'on prend en compte, ou non, le temps que l'enseignement a exigé, et selon aussi qu'on le compare à la situation habituelle ou à ce que l'on est en droit d'attendre si l'on veut mettre à l'épreuve une théorie de l'apprentissage.

L'enseignement proposé par Kourkoulos, présente plusieurs caractéristiques. Tout d'abord il est centré sur l'identification des objets liés aux différentes quantités du texte ou à leur regroupement. Sans négliger l'identification des relations nécessaires pour écrire des équations correctes, celle-ci un travail d'interprétation pour lequel les listes de données obtenues par regroupement ne constitue plus véritablement une aide. Cela explique peut-être pourquoi ce sont surtout les relations entre les objets qui restent mal comprises, plus que la procédure d'identification des objets.

Ensuite, en demandant un inventaire de toutes les quantités explicites ou implicites, il tend à glisser du texte de l'énoncé à la situation décrite par l'énoncé ce qui suppose qu'il n'y a pas de problème pour la compréhension du texte de l'énoncé.

On peut se demander si un travail plus directement centré sur la compréhension du texte de l' énoncé, compréhension qui implique la saisie simultanée des objets et de leurs relations, ne permettrait pas d'améliorer encore les résultats obtenus par Kourkoulos, soit en diminuant le coût temporel de l'enseignement soit en faisant évoluer davantage d'élèves.

III. Un enseignement centré sur la compréhension des énoncés

Des observations ont mis en évidence qu'il ne suffit pas de bien identifier les objets et de pouvoir les redésigner par des lettres pour pouvoir ensuite écrire les équations (Damm1991, p.206-208). *L'identification des relations établies dans un texte entre deux objets dépend d'un facteur non négligeable, le fait qu'il suffise de s'en tenir à la lecture d'une seule phrase, ou qu'il faille au contraire prendre en compte les informations données dans deux phrases différentes.* En outre, la prise en compte de la compréhension du texte s'avère également importante pour l'identification des objets, il faut que l'élève dispose de critères pour contrôler le fait qu'il a bien identifié tous les objets nécessaires à l'écriture d'un système d'équations. Sans revenir ici sur les conditions requises pour développer la compréhension du texte (R. Duval,1986, 1993), indiquons seulement qu'il est essentiel de fournir aux élèves des outils de **représentation du texte** qui permettent d'accomplir simultanément les deux opérations impliquées dans toute compréhension d'un texte:

— l'*identification des objets* dont "parle" le texte, et pour un énoncé de problème de mise en équation, il s'agit des objets à désigner par des lettres,

— l'*appréhension synoptique des relations* établies entre tous ces objets.

Ce moyen de représentation doit pouvoir fonctionner comme une "**grille de questions**" pour interroger le texte et pour en extraire les informations pertinentes. Naturellement un tel moyen doit être plus général qu'une grille de questions en ce sens qu'il ne peut s'agir d'une liste de questions préalablement formulées.

Pour fonctionner comme une telle grille de questions, ce moyen de représentation devra permettre d'écrire le système d'équations par simple lecture de l'organisation propre à la représentation. A ce titre, on pourra parler dans cette phase de "représentation intermédiaire entre le texte et le système d'équations".

A. Un apprentissage des opérations de compréhension pour la lecture des énoncés.

Un énoncé de problème de mise en équation comporte des informations qui relèvent de plusieurs dimensions sémantiques ou conceptuelles. La distinction de ces dimensions entre elles est aussi importante que la distinction dimension/objet mise en oeuvre dans le travail de Kourkoulos. Lorsqu'il y a deux dimensions, on songe naturellement à une représentation du type tableau.

Mais attention, *ce n'est pas le tableau déjà construit, partiellement rempli ou non, qui constitue la représentation*! Car alors, un tel tableau déjà construit ne pourrait plus fonctionner comme lieu de travail pour la compréhension de l'énoncé. **Le tableau ne peut apparaître que comme la trame d'une séquence de questions qui se déroule selon les phases suivantes:**

Phase 1 : identification des dimensions sémantiques ou conceptuelles selon lesquelles les informations sont données. Ceci amène à **catégoriser les colonnes et les lignes.** Cette première phase peut être simplifiée lors d'une première séance en donnant la catégorisation d'une des deux dimensions.
Phase 2 : identification des quantités pouvant être directement transcrites dans les cases déterminées par la catégorisation des colonnes et des lignes. On remarquera que cette procédure oblige à **considérer d'emblée les quantités comme étant déterminée par deux catégories.**
Phase 3 : identification des quantités ne pouvant pas être transcrites dans les cases déterminées par la catégorisation des lignes et des colonnes, mais exigeant **la prise en compte de "marges".**
Phase 4 : **choix des inconnues** (on remarquera que le choix des inconnues n'intervient ici qu'en phase 4, ce n'est surtout pas la première opération à faire)
Phase 5 : compléter certaines cases vides par **composition des inconnues et des données directement transcrites.**
Le texte de l'énoncé se trouve ainsi converti en un tableau. La lecture par colonnes (ou par lignes), celles où les inconnues figurent, permet d'écrire les équations.

Il est important de remarquer que, dans cette conversion du texte en tableau, le choix des inconnues et l'identification de toutes les données ne sont ni des objectifs, ni les premières opérations à effectuer. Ce sont les phases 1 et 3 qui sont décisives. La première, l'identification des dimensions, est la condition nécessaire pour qu'il n'y ait pas de défaut de variables référentielles. La deuxième, l'identification des données pouvant être obtenues par composition, est la condition nécessaire pour que toutes les données nécessaires soient bien extraites de l'énoncé.

B. Un exemple

Revenons, pour illustrer notre propos, au problème déjà cité des machines.

Après lecture de l'énoncé, le professeur annonce qu'il va construire un tableau à 2 entrées pour consigner toutes les données. Comme il est question de 2 machines, ce tableau va se présenter ainsi : une ligne pour la 1ère machine, une ligne pour la 2nde. Une ligne marge est également ajoutée :

	.....	....	....
1ère machine			
2nde machine			
....			

*Phase 1 :

on demande aux élèves quelles informations on peut mettre en colonne. Ils répondent: vitesse de production, durée et quantité produite. On reporte les réponses dans le tableau et on obtient:

	vitesse	temps	quantité
1ère machine			
2nde machine			

*Phase 2 :

on demande alors aux élèves de remplir les cases du tableau avec les données de l'énoncé. On obtient:

	vitesse	temps	quantité
1ère machine	13 kg/min		
2nde machine	21 kg/min		

*Phase 3 :

les élèves ont compris la nécessité d'une 3ème ligne, car ils ne peuvent reporter les autres données de l'énoncé. Cette ligne concernera les liens entre les 2 machines. On l'appellera, faute de mieux, "les deux "ensemble" " et on y mettra les renseignements communs. Il y a les données purement relationnelles exprimées par une proposition. On peut alors reporter soit la proposition telle qu'elle, soit une forme paraphrasée et abrégée. On obtient :

	vitesse	temps	quantité
1ère machine	13 kg/min		
2nde machine	21 kg/min		
les deux machines "ensemble"		la fabrication dure 510 mn en tout	La 1ère machine a produit 238 kg de plus que la 2nde,

Naturellement on attire l'attention sur le fait que cette ligne n'est pas la somme des 2 autres!

*Phase 4 :

Il faut maintenant choisir les inconnues. Comme l'énoncé le demande, on appelle x le temps de travail de la première machine, et donc y celui de la seconde. On marquera d'un "?" les cases non remplies, mais nécessaires à la suite des calculs. Il peut rester des cases vides si elles n'ont pas d'utilité dans le raisonnement. Il est alors nécessaire de substituer aux propositions en français une forme paraphrasée ou abrégée. On obtient :

	vitesse	temps	quantité
1ère machine	13 kg/min	x	?
2ère machine	21 kg/min	y	?
les deux machines "ensemble"		le temps de ma.1 plus le temps de ma.2 = 510min	la produc de ma.1 moins la produc. de ma.2 = 238kg

*Phase 5 :

Il faut maintenant que les élèves expriment les quantités représentées par un "?", en utilisant la dénomination des inconnues et les autres informations de la même ligne. C'est un problème de conception de multiplication, qu'on résout en revenant à la procédure additive. Les propositions abrégées de la troisième ligne peuvent alors être traduites. On obtient donc:

	vitesse	temps	quantité
1ère machine	13kg/min	x	13x
2nde machine	21kg/min	y	21y
les deux machines "ensemble"		temps de ma.1 + temps de ma.2 = 510min OU x+y = 510	produ. de ma.1 — prod. de ma.2 = 238kg OU 13x-21y=238

Il ne reste plus qu'à écrire le système, pour lequel on conseille de ne pas écrire d'unités, afin de simplifier sa résolution:

$$x+y=510$$
$$13x-21y=238$$

Comme on le voit, il ne s'agit pas d'abord d'utiliser un tableau, mais de **mettre en oeuvre sur le texte de l'énoncé une grille de questions.** Celle-ci porte successivement sur les dimensions, sur les objets explicitement nommés et associés à une donnée numérique, et enfin sur ceux qui doivent être redésignés par une lettre. Ce sont là trois types de questions très différentes.

Mais cette grille de questions est inséparable d'une organisation **bi-dimensionnelle** des données identifiées. Par cette approche, **les données quantitatives ne sont pas identifiées indépendamment de leur double catégorisation sémantique et des relations que le texte de l'énoncé fixe entre elles.** Il n'y a donc pas séparation entre l'identification des données et l'identification des relations, comme dans l'expérience d'enseignement élaborée par Kourkoulos.

C'est pourquoi l'organisation en tableau peut être une représentation intermédiaire pour convertir le texte d'un énoncé en l'écriture algébrique d'un système d'équations et peut donc constituer un véritable outil de compréhension. Mais cette organisation en tableau ne sera telle qu'à la condition expresse de fonctionner d'abord comme une grille ordonnée de questions.

C. Réalisation dans deux classes

Nous avons présenté cette méthode de travail dans deux classes de troisième, et comparé les résultats obtenus à deux autres classes témoins. L'expérimentation s'est déroulée ainsi :

— quatre classes de 3° du collège ont passé un test initial

— deux des classes reçoivent un enseignement spécifique pendant 4h chacune,

— les quatre classes passent un test final, afin de mesurer l'impact de l'enseignement en question

L'enseignement s'est déroulé de la façon suivante :

Première séance. L'enseignant distribue une fiche de problèmes, et procède avec les élèves à une organisation des données en tableau pour le problème des machines. Il explique comment dégager de cette organisation les deux équations. Les élèves sont ensuite invités à utiliser la même méthode pour mettre en équation des problèmes qui sont des variantes du problème des machines. Cela pour bien faire comprendre la méthode, comme dans l'expérience menée par Kourkoulos. Les premières phases du travail sont effectuées en commun et le travail est poursuivi individuellement.

Deuxième et troisième séances. L'enseignant distribue une autre fiche de problèmes sur des thèmes tous différents: barre de fer, vélomoteur, billes, bateau,...Pour chaque problème, le cadre du tableau est fixé (nombre de lignes et de colonnes) mais il doit être entièrement rempli selon les trois types de questions mentionnés plus haut. Puis on passe à des exercices où le cadre du tableau n'est pas fixé.

Quatrième séance. Les élèves reçoivent une autre fiche de problèmes présentant les principaux cas difficiles (on utilise une division et pas une multiplication, on a une seule inconnue ou trois,...). A la fin, presque toute la classe a trouvé le système correspondant au problème n°6 (annexe), malgré sa complexité.

Pour évaluer l'effet de cet enseignement de quatre séances, nous avons analysé les réponses des élèves aux tests, initial et final, selon deux critères. Le premier est évidemment celui de la réussite d'un point de vue mathématique. Cela implique non seulement l'écriture correcte d'un système d'équations mais aussi sa résolution. C'est le plus important, mais pas nécessairement le plus significatif pour évaluer l'acquisition réelle des élèves. Aussi nous avons pris un second critère, celui de la présence ou de l'absence de défauts de représentation, tels que Kourkoulos les

a définis. Pour parler d'acquisition ou de compréhension en ce qui concerne la mise en équations, il ne suffit pas d'enregistrer une augmentation statistiquement significative des réussites, il faut aussi enregistrer une diminution importante des défauts de représentation. Les deux ne sont pas nécessairement fortement corrélés. Car, d'une part, cela dépend des problèmes proposés, tous les problèmes n'étant pas de bons filtres à défauts et, d'autre part, des élèves peuvent ne pas encore parvenir au stade d'une réussite systématique tout en ayant progressé.
Un examen approfondi des réponses a fait apparaitre une diminution importante des défauts de représentation chez les élèves ayant suivi les quatre séances (Cordier,1992). En outre, le nombre des non-réponses, en nette diminution, montre que les élèves n'ont plus renoncé devant des questions difficiles.
L'analyse des réponses selon le premier critère montre une hausse de la réussite des élèves des deux classes expérimentales sur le problème le plus difficile.

Comparaison des réussites

test initial (Voir Annexe B)	population expérimentale (59)	population témoin (55)
1.	.62	.78
2.	.O8	.O9

test final (Voir Annexe B)	population expérimentale (57)	population témoin (55)
1'.	.70	.51
2'.	**.51**	.16

Enfin, il n'est peut être pas inutile de souligner l'intérêt particulier et la forte participation dont les élèves ont fait preuve au cours de ces quatre séances.

Conclusion

Passer du texte d'un énoncé de problème à l'écriture du système d'équations qui permettra de le résoudre est une activité dont la complexité cognitive intrinsèque semble largement sous-estimée, même par ceux qui constatent les difficultés que suscite ce genre de problèmes pour les élèves. Le choix des inconnues n'est pas la première opération. Il résulte d'un ensemble d'opérations qui sont généralement passées sous silence ou très évasivement évoquées sous des consignes du genre "chercher les données pertinentes", ou sous des expressions réductrices comme "traduction d'un énoncé en langage mathématique". Car chacun pense qu'en mathématiques, s'il ne s'agit que de "traduire" il n'y a pas de difficultés.
Le travail de Kourkoulos a montré l'importance de ces opérations qui précèdent le choix des inconnues, en identifiant une liste de dix défauts primitifs de représentation. Mais le repèrage de ces défauts de représentation permet-il d'identifier les opérations cognitives en jeu dans la conversion de certaines données d'un texte en l'écriture d'un système d'équations? Et sur quoi fonder un véritable apprentissage de la mise en équations?
L'expérience d'enseignement organisée par Kourkoulos était centrée sur une prise de conscience des défauts de représentation: il s'agissait essentiellement de proposer des activités qui fassent surgir tous les défauts de représentation et qui permettent d'y remédier. Celle que nous avons tentée était au contraire centrée sur les opérations permettant la conversion d'un texte en une représentation qui

— en rende visible l'organisation,
— montre la double catégorisation sémantique des quantités,
— situe les informations données ainsi que les informations manquantes de l'énoncé les unes par rapport autres.

Ces opérations de conversion étant effectuées "la traduction en langage mathématique" peut alors seulement commencer. Le lecteur pressé, ou en quête d'une recette qui soit efficace et surtout très simple, retiendra une image familière, celle du tableau. Il négligera donc le fait qu'il ne s'agit là que d'une représentation intermédiaire ne pouvant être utile que si elle est utilisée d'abord comme une grille de questions. Mais, après tout, on peut estimer qu'on peut aussi bien découvrir la montagne en montant en téléphérique qu'en escaladant puisque le résultat visible est le même dans les deux cas: on se retrouve au sommet!

En tous cas, par delà les différences d'évaluation et d'interprétation auxquelles ils peuvent donner lieu, ces deux essais d'enseignement prouvent au moins deux choses, un enseignement non subjectif de la mise en équations est possible, et un tel enseignement ne se réduit pas à la mise en place d'algorithmes.

RÉFÉRENCES

Cordier, N., 1992, " La Mise en équation ", Strasbourg, Mémoire de D.E.A...

Damm, W., 1991, Compréhension d'un énoncé de problème: le choix de la donnée de référence *Annales de Didactique et Sciences cognitives*, 4, p.197-225

Duval, R., 1986, *Lecture et compréhension des textes*, Strasbourg, IREM.

Duval, R, 1993, *Sémiosis et Noésis*, Préprint.

Kourkoulos, M., 1990, *Modélisation mathématique de situations aboutissant à des équations du 1er degré*, Strasbourg, Thèse ULP.

Vergnaud, G., & Cortez, A., 1986, Colloque franco-allemand de Didactique des Mathématiques

ANNEXE A

1) Pierre achète 5 brioches et 6 croissants pour 41F. Avec 5F de plus, il aurait pu acheter 8 brioches et 4 croissants. Quel est le prix d'une brioche et celui d'un croissant?

2) Dans une usine, on fabrique du chocolat. Une première machine produit 13 kg de chocolat par minute. Au bout d'un certain temps, on la remplace par une deuxième machine qui produit 21 kg de chocolat par minute. La fabrication dure 510 minutes en tout. La première machine a produit 238 kg de plus que la seconde machine. Combien de temps a fonctionné la première machine?

3) Une barre métallique est construite en deux parties: la première est en zinc et chaque cm de cette partie pèse 11g. La seconde est en fer et chaque cm de cette partie pèse 17g. La partie en fer est de 14 cm plus longue que la partie en zinc. La barre pèse en tout 980g. Quelle est la longueur de la partie en zinc?

4) Paul a 18 grosses billes et 13 petites billes. Toutes les grosses billes ont la même masse, et toutes les petites aussi. Une grosse bille pèse 7 grammes de plus qu'une petite bille. La masse totale des 18 grosses billes fait 206 grammes de plus que la masse totale des 13 petites. Quelle est la masse d'une petite bille?

5) Un vélomoteur monte une colline à la vitesse de 15 mètres par seconde; puis il redescend de l'autre côté à la vitesse de 21 mètres par seconde. Le parcours total a duré 270 secondes, et la montée est de 126 mètres plus longue que la descente. Combien de temps a duré la montée?

6) On remplit un réservoir en utilisant un robinet qui débite 9 litres d'eau à la minute. Quand ce réservoir est plein, on continue de remplir un deuxième réservoir avec, cette fois, un débit de 13 litres par minute. Quand ce réservoir est plein, on remplit un 3° réservoir en gardant le même débit. Quand le 3° réservoir est plein, on ferme le robinet. En tout, le robinet a marché pendant 93 minutes. Le premier réservoir contient 53 litres de plus que le second réservoir, le troisième réservoir contient 3 fois autant que le second réservoir. Combien de temps a t-il fallu pour remplir le premier réservoir?

ANNEXE B

1. Jean a 18 grosses billes et 13 petites billes. toutes les grosses billes sont de la même masse, et toutes les petites aussi. Une grosse bille pèse 7 grammes de plus qu'une petite. la masse totale des 18 grosses billes fait 206 grammes de plus que la masse totale des 13 petites. Quelle est la masse d'une petite bille ?

2. Un vélomoteur monte sur une colline à la vitesse de 13 mètres par seconde, puis il redescend de l'autre côté à la vitesse de 21 mètres par seconde. La montée est de 238 mètres plus longue que la descente. Le parcours total dure 510 secondes. Combien de temps a duré la descente?

1'. Jean a des boîtes qui contiennent des bonbons rouges et d'autres boîtes qui contiennent des bonbons verts. En tout, il y a boîtes. Chaque boîte de bonbons verts contient 17 bonbons, chaque boîte de bonbons rouges contient 21 bonbons. Jean compte tous ses bonbons : le nombre de bonbons verts dépasse de 102 le nombre de bonbons rouges. Combien jean a-t-il de boîtes de bonbons verts ?

2' Une voiture va d'un village A vers un village B, à la vitesse constante de 60km par heure. Puis elle va du village B au village C à la vitesse de 75 km par heure. Le trajet total dure 5 heures, et la distance de A à B est de 30 km plus longue que celle de B à C. Combien de temps a duré le parcours BC?

La résolution des problèmes arithmétiques verbaux : propositions pour un enseignement pro-actif.

Jean-Paul Fischer

The author reviews some recent learning experiments in arithmetical word problem solving : Willis & Fuson (1988), Lewis (1989), and Ehrlich (1990). In synthesizing these experiments, he comes to new, more consistent, and more general proposals for teaching arithmetical word problem solving.
The main originality of the proposals is the parsing of elementary arithmetic problems into three categories. Each categorie is represented by a prototypical perceptuo-cognitive chunk, and each chunk cues relevant procedural knowledge.
Recent theories of problem solving by experts, the personal theory of the author (Fischer, 1992), as well as a teaching experiment in a class of third graders, support the proposals.

Au début des années 1970, avec la réforme dite des "mathématiques modernes", l'ordre d'introduction des 4 opérations arithmétiques devenait nettement hiérarchisé : d'abord l'addition (au CP), ensuite la soustraction et la multiplication (au CE1), enfin la division (au CE2). Implicitement, la nature de l'opération arithmétique impliquée devenait donc, dans les problèmes verbaux, essentielle aussi. Par exemple, au CP, on se gardait de poser des problèmes de partage comme

Gaël a reçu 6 bonbons de sa maman. Il les partage avec sa soeur Maveline. Combien de bonbons aura chacun des 2 enfants ?

pour la bonne raison qu'il s'agit de problèmes typiques de division, une opération qui ne figure au programme que deux ans plus tard !

Ce fut donc une surprise que de (re-)découvrir[1], notamment à la suite de l'article de Vergnaud et Durand (1976), que la nature arithmétique de l'opération impliquée était loin d'être le seul déterminant - ni peut-être même le déterminant majeur - de la difficulté d'un problème arithmétique (voir, par ex., Fischer, 1979).

© Annales de Didactique et de Sciences Cognitives
5 (1993) (p.177-210) - IREM de Strasbourg

[1] *Je rappelle que, antérieurement à 1970, les 4 opérations arithmétiques figuraient quasi-simultanément au programme du CP, voire de l'Ecole Maternelle. Implicitement, on ne pensait donc pas que la différence de nature des 4 opérations arithmétiques était un facteur important à gérer.*

Une littérature plus qu'abondante a alors essayé de dégager les autres déterminants. L'objet de cet article n'est pas de faire une revue de cette littérature (pour une revue récente, nous renvoyons à Fayol, 1991, ou à Bergeron & Herscovics, 1990). Il est, dans la première partie, de faire la revue de quelques expériences d'apprentissage qui ont pris pour point de départ les catégories ou facteurs de difficulté dégagés par ces recherches psychologiques. Nous nous limiterons à trois de ces expériences d'apprentissage : Willis et Fuson (1988), Lewis (1989) et Ehrlich (1990). Le choix de ces trois expériences a été motivé par le fait qu'elles nous permettent, dans la deuxième partie de l'article, de déboucher sur des propositions précises d'enseignement. Ces propositions concernent tout l'enseignement élémentaire et peuvent même être prolongées au collège. Elles n'ont toutefois donné lieu qu'à une expérimentation, très locale, en fin de CE2. C'est cette dernière que nous rapporterons dans la troisième partie de l'article. Enfin, dans la discussion générale (dernière partie), nous essayerons de montrer que nos propositions s'accordent bien avec certaines idées théoriques dérivées de l'Intelligence Artificielle et prolongent notre propre théorie PDup (Fischer, 1992).

Revue de trois expériences d'apprentissage

Les schémas de Willis et Fuson. Willis et Fuson (1988) reprennent la distinction, devenue classique, de trois catégories de problèmes arithmétiques élémentaires : les problèmes de changement, de combinaison et de comparaison. L'intérêt didactique de cette distinction ne provient pas du fait que ces catégories sont clairement hiérarchisées, bien que, génétiquement, les problèmes de comparaison soient certainement postérieurs aux autres (voir Fischer, 1981). Il provient du fait que chaque catégorie peut être représentée par un schéma approprié. En distinguant les changements additif et soustractif, Willis et Fuson proposent ainsi les quatre types de schémas représentés sur la figure 1. Ils indiquent, pour chacun des schémas, un énoncé qui peut lui correspondre :

(a) John et Bill ont 814 jouets ensemble (*Total*). John a 342 jouets (*Part*). Combien Bill a-t-il de jouets (*Part*) ?

(b) John a 342 jouets (*Petite Part*). Bill a 472 jouets de plus (*Différence*). Combien Bill a-t-il de jouets ?

(c) John avait des jouets (*Départ*). Alors Bill lui a donné 342 jouets de plus (*Changement*). Maintenant John a 814 jouets (*Arrivée*). Combien de jouets John avait-il au départ ?

(d) John avait 814 jouets (*Départ*). Alors il en a donné certains à Bill (*Changement*). Maintenant John a 342 jouets (*Arrivée*). Combien de jouets John a-t-il donnés à Bill ?

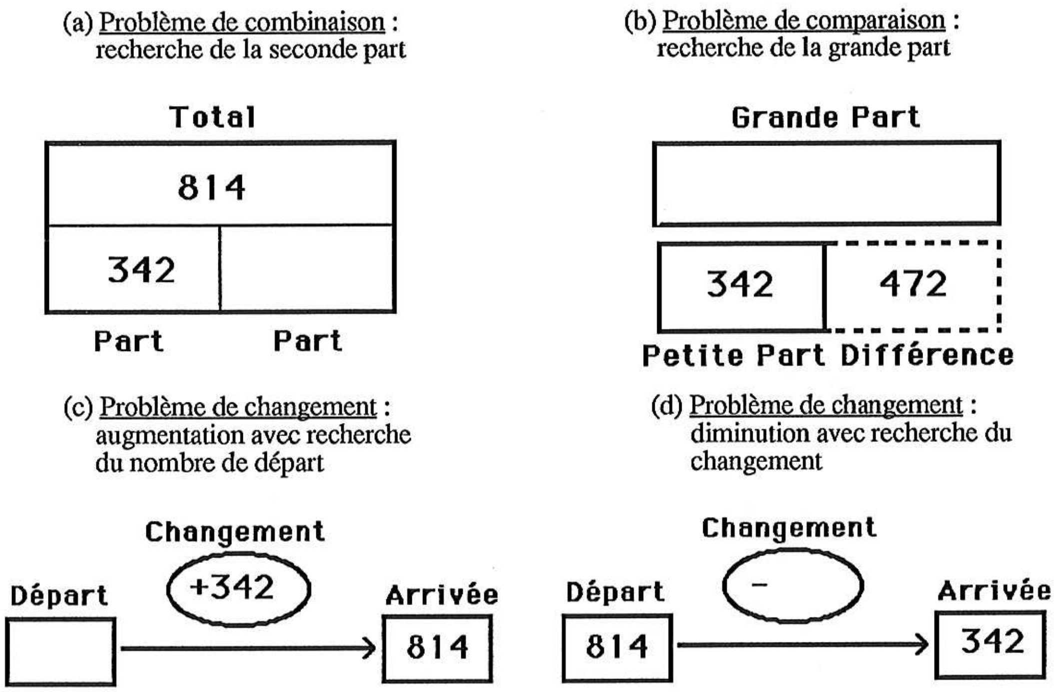


Figure 1. Quatre types de problèmes et leur schématisation
(d'après Willis & Fuson, 1988)

Willis et Fuson ont entraîné des élèves américains (moyens, ou supérieurs à la moyenne, en mathématiques) de 2ème année d'école à l'utilisation de tels schémas. Ils devaient choisir le schéma correspondant au problème, puis placer les nombres de l'énoncé dans les emplacements adéquats et, enfin, s'aider de cette représentation pour trouver l'opération mathématique à exécuter. Les performances au post-test sont qualifiées de bonnes ou excellentes par les auteurs.

L'apprentissage par intégration de Lewis. Lewis (1989) part de l'observation que les mots inducteurs, dans les problèmes de comparaison, sont une source sérieuse de difficulté. Pour surmonter la difficulté Lewis a expérimenté deux types d'apprentissage qu'elle qualifie d'apprentissage respectivement par segmentation et par intégration.

L'apprentissage par segmentation consiste à analyser l'énoncé en distinguant données, questions et relations entre données. L'apprentissage par *intégration* consiste à représenter les données sur une droite numérique, en les intégrant au fur et à mesure de leur apparition dans l'énoncé aux données déjà représentées. Nous illustrons cet apprentissage dans la figure 2 sur la première partie d'un énoncé proposé par Lewis :

Megan a économisé 420 F pour ses vacances. Elle a économisé 5 fois moins que James. Combien James a-t-il économisé ?

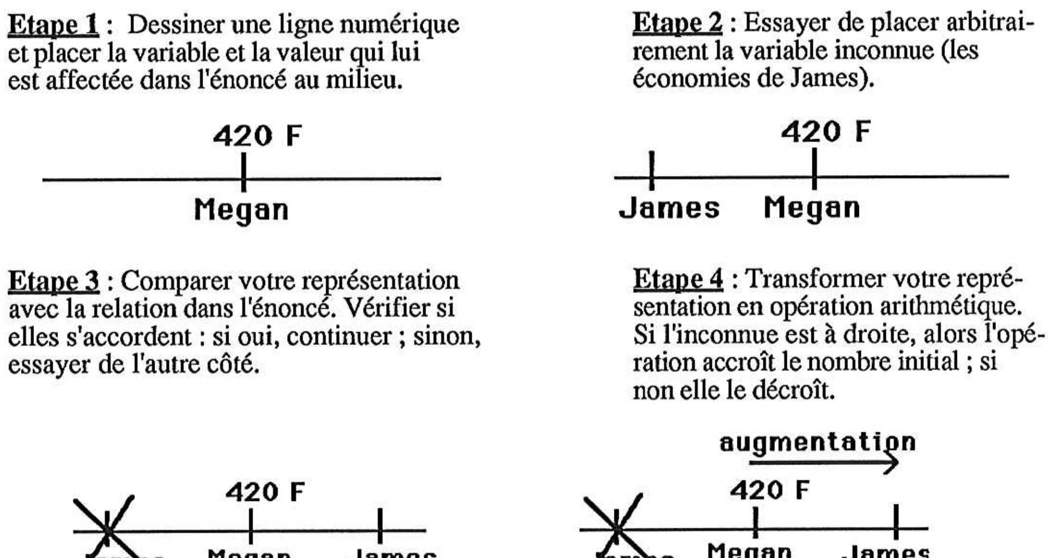


Figure 2. Représentation des 4 étapes de l'intégration
(pour un problème de comparaison, d'après Lewis, 1989 p.523)

La dernière étape (l'avant-dernière aussi) représentée sur la figure 2 permet de voir que le schéma apporte par lui-même une information qui était beaucoup moins transparente dans l'énoncé verbal, à savoir que c'est James qui a le plus d'économies. Mais si on sait donc qu'il faut accroître le montant des économies de Megan pour arriver à celui de James, on ne sait toujours pas par quelle opération arithmétique. La suggestion de Lewis est de déterminer cette opération en s'appuyant sur une "propriété" distinctive des opérations directes et inverses : l'addition et la multiplication accroissent la donnée initiale, alors que la soustraction et la division la diminuent[1].

Le résultat de la comparaison, effectuée sur des étudiants[2], a été très net : l'apprentissage par intégration s'est révélé clairement supérieur à l'apprentissage par segmentation. Notamment l'effet des mots inducteurs a quasiment disparu à l'issue de l'apprentissage par intégration.

L'entraînement à la traduction sémantico-mathématique d'Ehrlich. Ehrlich (1990), comme beaucoup d'autres chercheurs (e.g., Esfahani, 1989 ; Judd & Bilsky, 1989 ; Adetula, 1990 ; voir aussi Lewis juste ci-avant), commence par montrer que le facteur principal de difficulté des problèmes arithmétiques élémentaires est la non-concordance des opérateurs sémantique et mathématique. Un opérateur sémantique est une unité sémantique réunissant un concept et une expression verbale et marquant soit une accumulation (e.g., gagner, perdre, acheter, vendre, ...), soit une comparaison (e.g., de plus, de moins, fois plus, fois moins, ...). Un problème sera donc difficile si, par exemple, l'énoncé contient le verbe "gagner", ou l'expression "de plus", et qu'il faut faire une soustraction. Un autre facteur non négligeable de difficulté est l'organisation événementielle : un problème sera plus facile si l'organisation énonciative coïncide avec l'organisation événementielle. Par exemple, le problème :
Combien avais-je avant ? Je viens de gagner 10 F. J'ai 30 F maintenant.
devrait être plus facile que le problème :
J'ai 30 F maintenant. Je viens de gagner 10 F. Combien avais-je avant ?
formulé plus classiquement (avec la question en dernière position).

---

[1] *La suggestion de Lewis - dont nous contestons par la suite la pertinence mathématique et didactique - est, en fait, insuffisante pour déterminer complètement l'opération. Mais les étudiants testés par elle ne confondaient pas les structures additives et multiplicatives. En conséquence, la méthode suggérée pouvait leur suffire.*

[2] *Ceci prouve, au passage, que l'on peut trouver des échantillons d'étudiants (adultes) en difficulté sur des problèmes de comparaison. Il est vrai que ces problèmes étaient souvent un peu plus complexes que ceux qui nous intéressent dans cet article, mais l'erreur typique des étudiants a néanmoins été de choisir l'opération arithmétique induite par l'expression verbale.*

La distinction de tels facteurs, ainsi que celle entre problème d'accumulation et de comparaison, conduit alors Ehrlich à proposer une batterie hiérarchisée de problèmes qui porte sur les 4 opérations : d'abord les 2 additives, puis les 2 multiplicatives. Cette batterie sert ensuite de support à un entraînement progressif à la traduction sémantico-mathématique. En quoi consiste-t-il ?

Après un travail sémantique de base, allant de la compréhension à l'invention d'énoncés, Ehrlich suggère, pour chaque énoncé :

1) de faire identifier les informations utiles, les données, l'inconnue, les parts et, le cas échéant, le total, la présence d'un comparateur et le caractère additif de la relation ;
2) de trouver le signe opératoire à mettre (correctement !) entre les deux données ?
3) de poser l'opération.

C'est incontestablement le passage du 1) au 2) qui est au coeur de la traduction sémantico-mathématique. Ce passage consiste en effet à passer d'un énoncé écrit en français à une opération mathématique qui, non seulement n'est pas indiquée dans l'énoncé, mais peut même être faussement induite (e.g., l'énoncé contient le mot "plus" et il faut choisir le signe "-"). A l'aide de techniques pédagogiques éprouvées, comme le parcours des 3 niveaux de représentation de Bruner (inactif, iconique et symbolique : voir Fischer, 1986, pour un résumé), l'utilisation de couleurs et de tableaux mettant en évidence certaines régularités, Ehrlich tente de montrer, aux niveaux successifs de la hiérarchie qu'il a proposée, que l'on peut extraire le signe mathématique par une démarche que nous croyons pouvoir résumer par l'organigramme de la figure 3. Faisons fonctionner l'organigramme sur le problème précédent :

J'ai 30 F maintenant. Je viens de gagner 10 F. Combien avais-je avant ?

Après avoir identifié les deux données - le total (30 F) et la part gagnée (10 F) - et l'inconnue - la part initiale -, on peut remarquer l'absence de **relation comparative** et donc répondre négativement à la **Question 1**. En descendant alors du côté des problèmes d'accumulation, on observe que les deux **parts** n'ont aucune raison d'être **égales** et que la réponse à la **Question 2** est négative. En conséquence, on se retrouve du côté des structures additives et il suffit de répondre négativement à la **Question 3** (la Question ne porte pas sur le Total) pour conclure que l'opération à faire est une **SOU**straction. On voit donc, sur ce problème, que le verbe "gagner", souvent inducteur de l'addition, n'a jamais pu exercer son effet néfaste.

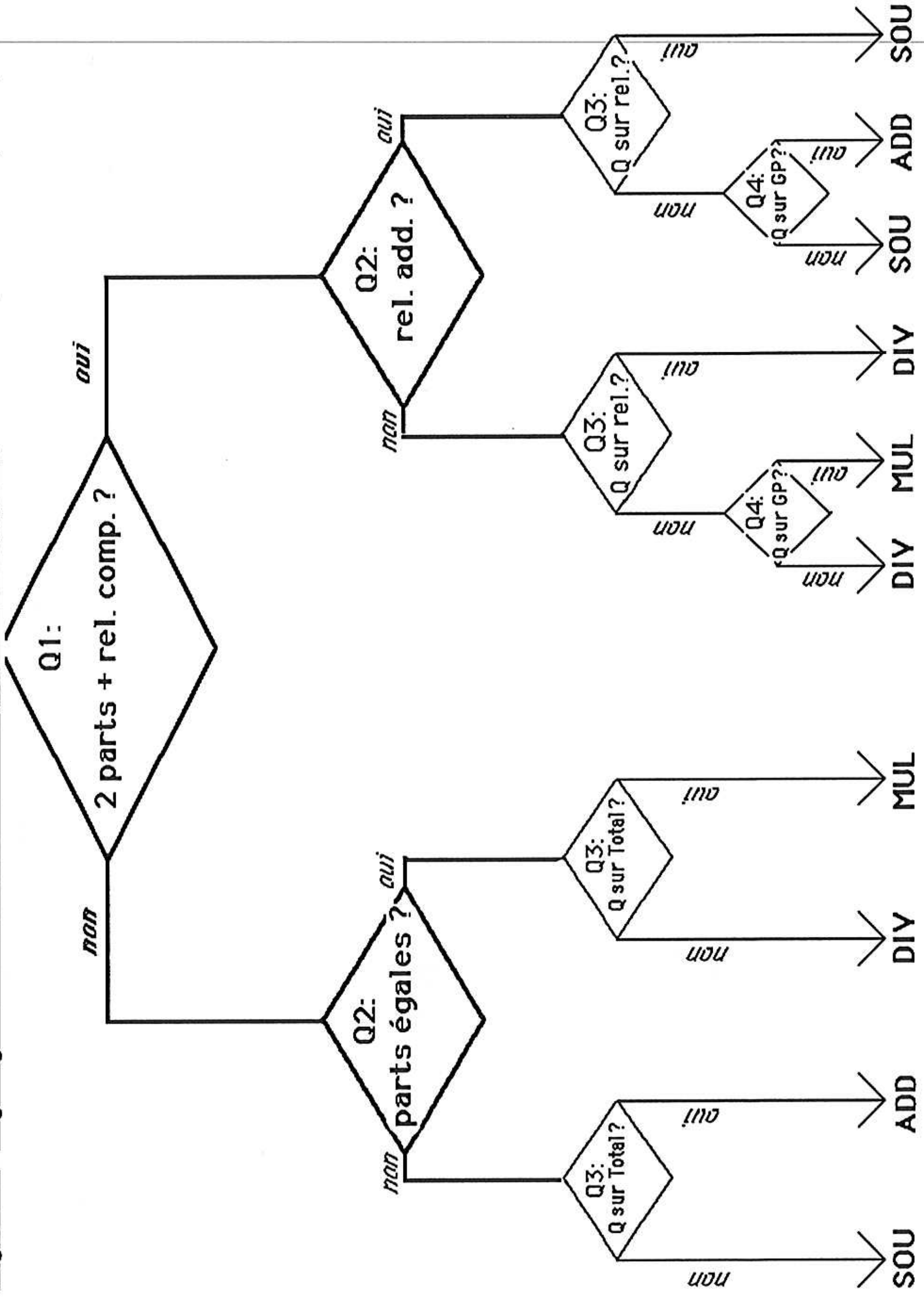


Figure 3. Organigramme de résolution des problèmes simples (construit d'après Ehrlich, 1990)

Propositions pour un enseignement

Bilan critique des trois recherches. Les recherches précédentes, comme beaucoup d'autres recherches bien contrôlées (e.g., Wilson & Sindelar, 1991), ne portent que sur un domaine très restreint de la résolution des problèmes arithmétiques verbaux. Ainsi, le travail d'Ehrlich, qui semble pourtant le plus complet, se limite à des problèmes avec 2 données et une inconnue ; celui de Willis et Fuson aussi, et, en outre, il ne porte que sur les structures additives ; enfin, celui de Lewis, s'il porte bien sur des problèmes plus complexes, ne concerne qu'une catégorie très particulière de problèmes : les problèmes de comparaison.

De plus, pour les propositions de Lewis et d'Ehrlich, il faut remarquer que la généralisation aux nombres non entiers est délicate. L'exemple illustrant le travail de Lewis (voir fig.2) le montre bien : on conclut qu'il faut faire une multiplication parce que les économies de James sont supérieures à celle de Megan. L'organigramme dérivé du travail d'Ehrlich (voir fig.3) le montre également : on conclut, par exemple dans le cas d'un problème de comparaison multiplicatif avec recherche d'une part, qu'il faut faire une multiplication lorsque la question porte sur la grande part et une division lorsqu'elle porte sur la petite. Or toutes ces inférences peuvent ne plus être valables dans l'ensemble des décimaux ou des fractions. Par ailleurs, elles ne font que renforcer «l'idée que la multiplication transforme le nombre initial en un nombre plus grand et la division en un nombre plus petit», une intuition qui constitue un obstacle pour les apprentissages ultérieurs (Vergnaud, 1991, p.281).

Enfin, encore à propos du travail d'Ehrlich, on ne peut s'empêcher de remarquer que le support empirique pour son traitement des problèmes de comparaison est particulièrement faible. En effet, dans l'expérience d'entraînement de 17 élèves du CM1, 9 seulement ont progressé alors que 8 ont régressé ou stagné (cf. Ehrlich, 1990, tableau 5, p.134).

Tout ceci nous conduit à proposer une stratégie d'enseignement qui tente de reprendre les points forts des expériences précédentes, tout en remédiant à un maximum de leurs points faibles. Nous la décrivons dans ses grandes lignes dans les deux sous-parties suivantes.

Problèmes de comparaison. La nécessité d'un traitement particulier des problèmes de comparaison est un point d'accord entre les trois recherches précédentes. L'échec assez net de l'apprentissage proposé par Ehrlich, que nous venons de souligner, et la réussite de celui de Lewis, nous conduisent à adopter la droite numérique orientée comme outil de représentation des problèmes de comparaison.

Par exemple, dans le cas d'un problème de comparaison comme :

Une veste coûte 150 F de plus qu'un pantalon. Ce pantalon coûte 80 F de plus qu'un pull-over. Si la veste coûte 580 F, combien coûte le pull-over ?
posé par Brixhe (1990), nous suggérons, en procédant pas à pas comme Lewis, d'arriver à la représentation finale du problème de la figure 4.

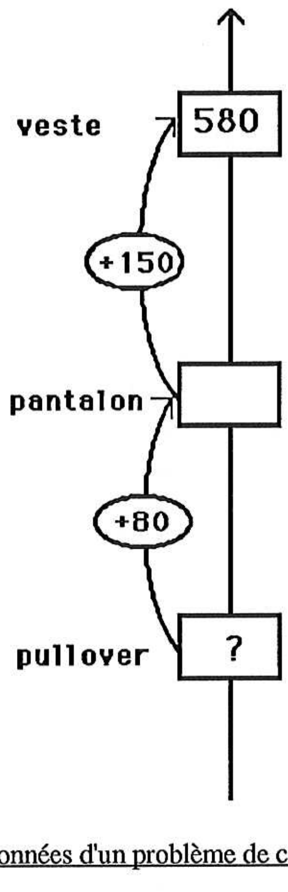


Figure 4. Représentation des données d'un problème de comparaison (dans son état final)

Cette représentation permet alors de résoudre le problème à un autre niveau, non verbal, et de se dégager ainsi de l'effet néfaste de l'expression "de plus". Ce passage à un autre niveau, ou plan, nous paraît la clé de la réussite : c'est lui qui permet, en effet, la neutralisation de certaines règles d'inférence sémantique, pragmatique, ou simplement statistique[1], que l'élève ou l'étudiant a pu construire et qui sont souvent correctes, ou en tout cas suffisantes, lorsque l'expression inductrice s'accorde avec l'opération arithmétique (cf., pour une remarque analogue sur les verbes antonymiques , Duval, 1991, note page 169).

La figure 4 montre aussi que, à la représentation horizontale de Lewis (voir fig.2), nous préférons une droite verticale orientée vers le haut. La raison majeure de cette préférence est qu'elle permet de réserver la demi-droite horizontale pour les problèmes d'accumulation chronologiques (voir fig.5). En ayant ainsi deux représentations ou signifiants bien distincts, nous espérons arriver à une meilleure distinction des signifiés, à savoir les deux catégories de problèmes représentées : les problèmes de comparaison et d'accumulation chronologique.

En revanche, la figure 4, dans la mesure où elle est une représentation achevée des données, ne permet pas de voir un autre intérêt majeur de la méthode par intégration. Cet intérêt est de pouvoir procéder pas à pas (voir fig.2). Dans le cas d'un problème avec beaucoup de données, cela évite en effet d'avoir à garder, simultanément, toutes ces données en mémoire de travail. Et ceci est fort utile, car - on peut s'en rendre compte à la lecture de tous ces petits problèmes (notamment de comparaison) - la mémoire de travail déborde bien vite !

Bien qu'étant un diagramme un peu appauvri, dans la mesure où il n'est qu'unidimensionnel, ce mode de représentation bénéficie de tous les avantages, clairement listés par Larkin et Simon (1987), d'une représentation "diagrammatique", à savoir :

- il regroupe ensemble toutes les informations utilisées, évitant ainsi une longue recherche des éléments nécessaires à une inférence ;
- il utilise typiquement l'endroit ou la position pour regrouper les informations au sujet d'un élément individuel, évitant la nécessité d'apparier des étiquettes symboliques ;
- il sert de support à une grande quantité d'inférences perceptives qui sont extrêmement faciles

[1] Nous qualifions de "statistiques" des règles qui permettent aux élèves de générer rapidement des réponses avec un taux de réussite important: par exemple, s'il y a le verbe perdre il faut probablement faire une soustraction. Silver (1986, p.192) cite quelques autres exemples:
- si on est en présence de deux nombres dont l'un est beaucoup plus grand que l'autre, il faut probablement diviser;
- s'il y a plus de deux nombres il faut probablement additionner.

pour les humains. Ce point apparaît clairement dans l'exemple précédent où l'on voit immédiatement que c'est le pull qui est le moins cher, alors que ce n'est pas tout à fait évident à la seule lecture de l'énoncé.

Plus généralement, relevons que ce n'est certainement pas par hasard que les défenseurs de l'imagerie mentale (visuelle ici), ou de l'hémisphère droit, puisent, de manière privilégiée, leurs exemples dans les problèmes de comparaison (non nécessairement arithmétiques). Par exemple, Kosslyn (1988, p.265) souligne que si, à propos d'armes, on dit à quelqu'un, *«qu'un x est moins dangereux qu'un y, mais qu'un z est moins dangereux qu'un y, et qu'un p n'est pas plus dangereux qu'un x»*,il est facile de décider quelle arme est la plus dangereuse en imaginant une ligne de "dangerosité" avec des points étagés dont la position indique le risque relatif que présente l'arme. Ou aussi, Williams (1983, p.105) propose une représentation graphique sur un axe vertical pour résoudre le problème suivant :

Paul et Jacques sont tous les deux plus âgés que Jean. Laure est plus jeune que Paul et plus âgée que Jacques : Marie est plus âgée que Paul. Qui est le plus jeune de tous et qui vient juste avant ?

Enfin, un autre avantage, de nature différente, de notre mode de représentation fléché, provient du fait qu'il transforme des relations statiques en relations dynamiques. Par exemple, "ce que y a de plus que x" devient "ce qu'il faut ajouter à (la part de) x pour avoir (la part de) y". Or les formulations dynamiques peuvent être plus accessibles aux enfants que les formulations statiques (Nesher & Katriel, 1978 ; voir cependant Fischer, 1979). Ainsi, Mayer (1985) souligne-t-il, à propos des propositions relationnelles impliquées dans les problèmes arithmétiques verbaux, que «les erreurs se produisent lorsque les élèves les considèrent comme des descriptions statiques de relations entre deux variables, plutôt que d'y voir une instruction procédurale sur la manière de convertir un nombre dans un autre» (p.132). Il souligne aussi l'incapacité des élèves à représenter des relations propositionnelles en mémoire : notre représentation schématique constitue donc une béquille pouvant aider à surmonter cette incapacité.

Problèmes d'accumulation. Le traitement particulier que nous proposons pour les problèmes de comparaison exige de les distinguer des autres. Etant donné cette exigence, la distinction comparaison/accumulation d'Ehrlich est bienvenue. Néanmoins, un traitement uniforme de tous les problèmes ne relevant pas de la comparaison dissout la distinction entre problèmes de combinaison et de changement, et donc la distinction des représentations schématiques qui leur ont été associées par Willis et Fuson. Nous distinguerons donc deux sous-catégories de problèmes d'accumulation : les problèmes chronologiques ou événementiels, i.e. les problèmes de changement, et les problèmes non chronologiques, i.e. les problèmes de combinaison.

Pour les problèmes chronologiques, nous choisissons, comme annoncé, la représentation sur une droite horizontale orientée (de la gauche vers la droite) dans le sens des temps croissants. Cette représentation a en effet de nombreux avantages. Elle est notamment enseignée assez systématiquement dès les premiers niveaux de la scolarité[1]. Elle serait également, selon Vergnaud (1990, p.161), la seule représentation accessible à des enfants de 7 ans dans le cas d'un problème avec recherche de l'état initial car elle met «en évidence la réciprocité de l'addition et de la soustraction comme opérations unaires.»

Quant aux problèmes non chronologiques, nous les représentons comme les problèmes de combinaison de Willis et Fuson, mais en introduisant des couleurs. Les couleurs sont en effet fondamentales si l'on veut élargir ce type de représentation aux problèmes multiplicatifs. Dans le cas des problèmes additifs, on est en présence d'un total (au-dessus en rouge) et de deux parts (en-dessous en bleu); mais dans le cas de problèmes multiplicatifs, les deux "parts" doivent être clairement distinguées : l'une est la valeur d'une part (en bleu), l'autre le nombre de parts (en vert).

Première évaluation. Nos propositions remédient-elles aux difficultés soulignées dans le bilan critique précédent ? En grande partie oui. En effet, les problèmes qui peuvent être représentés ne se limitent pas, en général, à deux données : les problèmes de comparaison et d'accumulation chronologique peuvent même porter sur un nombre illimité de données. Nous avons déjà proposé un exemple (voir fig.4), et en proposerons encore d'autres, de problèmes de comparaison complexes (plus de deux données). Nous nous contentons donc ici de présenter deux exemples de problèmes d'accumulation chronologique plus complexes.
La possibilité de prolonger l'axe chronologique, sur sa droite, permet de représenter (voir fig.5) des problèmes comme :

---

[1] *A ceci près que les Instructions Officielles françaises (I.O., 1978) recommandent les notations a 3, r 3, m 3, et d 3, plutôt que +3, -3, x3, et :3, pour les fonctions "ajouter 3", "retrancher 3", "multiplier par 3" et "diviser par 3" dans N. Notre choix est motivé par les faits que:*
- *la notation a 3 (resp. r 3, m 3, d 3) nécessite, lorsque l'enfant fait effectivement les calculs, une traduction en "plus 3" (resp. "moins 3", "multiplié par 3", "divisé par 3") qui ne fait qu'empiéter sur son espace d'exécution;*
- *dans les problèmes de comparaison, il serait gênant d'introduire ainsi, subrepticement, des verbes d'accumulation.*

Je pars de la maison avec 138 F dans mon porte-monnaie. Je dépense 17 F chez le boulanger, puis, 45 F chez le boucher. Combien reste-t-il d'argent dans mon porte-monnaie lors de mon retour à la maison ?

très fréquents dans les classes, éventuellement avec d'autres habillages (e.g., train avec des voyageurs qui montent et descendent, etc.).

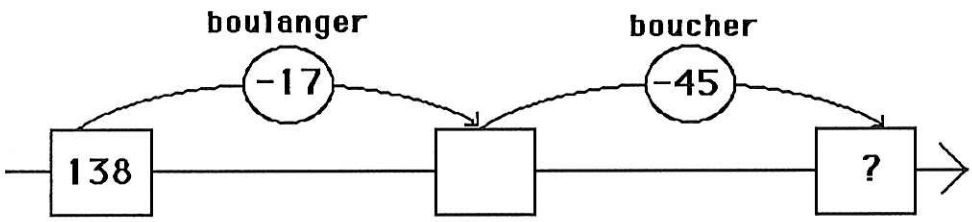


Figure 5. Représentation d'un problème d'accumulation chronologique

Cette possibilité de prolonger l'axe sur la droite permet aussi de représenter (et favorise sa résolution) un problème plus complexe comme le problème de prêt :

J'emprunte 10000 F, sur une période de 15 ans et au taux fixe de 12% (soit 1% par mois), à ma banque. Quel est le montant des mensualités à rembourser ?

La représentation de ce problème (cf. fig.6) aide à voir que la même séquence de 2 fonctions, x $\frac{101}{100}$, puis $- x$, ou x désigne le montant de la mensualité cherchée, est à répéter 180 (= 12x15) fois. Ensuite, en complétant de proche en proche quelques rectangles, $10000 . \frac{101}{100}$, puis $10000 . \frac{101}{100} - x$, puis $10000 . \frac{101}{100} . \frac{101}{100} - x . \frac{101}{100}$, etc., et en remarquant qu'au bout des 180 mois la somme à rembourser doit être nulle, on arrive à l'équation :

$$10000 . \left(\frac{101}{100}\right)^{180} - x \left[\left(\frac{101}{100}\right)^{179} + \left(\frac{101}{100}\right)^{178} + \left(\frac{101}{100}\right)^{177} + ... + 1\right] = 0$$

dont la résolution donne la mensualité $x = 120{,}01$ F.

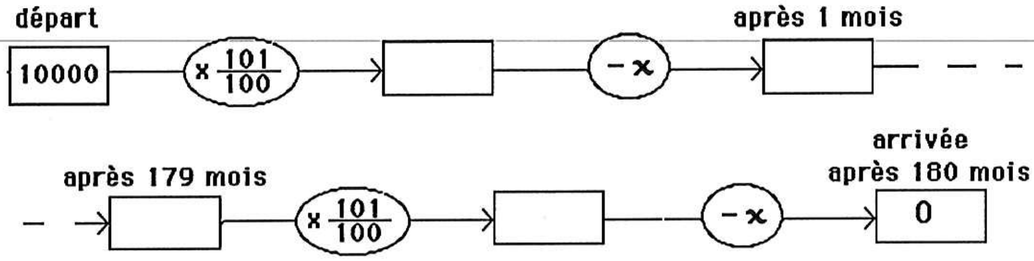


Figure 6. Représentation d'un problème de remboursement d'un prêt

L'autre critique, formulée dans notre bilan précédent, concerne la détermination de l'opération multiplicative sur une base inadaptée aux décimaux (ou fractions) inférieurs à l'unité. Comment notre proposition évite-t-elle cette difficulté ?

Le plus simple est de reprendre l'exemple de Lewis (cf. fig.2). Rappelons que Lewis avait suggéré, à propos de Megan qui a économisé 5 fois moins que James, de représenter les deux personnages sur un axe orienté, et ensuite de représenter une augmentation pour passer des économies de Megan à celle de James. Nous reprenons la partie initiale de cette proposition, à savoir représenter les 2 personnages sur un axe orienté (le fait qu'il soit vertical chez nous est tout à fait inimportant ???ici). Mais nous suggérons ensuite de placer "strictement" la relation contenue dans l'énoncé : comme Megan a économisé 5 fois moins, nous plaçons la flèche allant de James à Megan avec la fonction : 5 (qui conduit à une diminution). C'est ensuite, c'est-à-dire lorsque toutes les données de l'énoncé ont été représentées, que nous inversons la fonction après avoir remarqué que nous ne pouvons pas faire directement le calcul puisque la valeur à laquelle doit s'appliquer la fonction est inconnue. L'intérêt de distinguer ces deux phases (voir fig.7) est que l'inversion a pu se faire au cours de la deuxième phase sur la seule représentation schématique. Or, à ce niveau, la difficulté due aux faux inducteurs ou aux verbes antonymiques ne se pose pas (puisque ce niveau peut être totalement détaché de l'énoncé verbal). Ajoutons - il est important de le préciser et de s'en persuader ! - que cette même difficulté ne se pose pas non plus dans la première phase. En effet, si l'on représente "strictement" les données, le verbe **gagner** (resp.. perdre), inducteur de l'addition, est **toujours représenté** par une **fonction** + (resp.. -). De même, l'expression "de plus" (resp.. "de moins", "fois plus", "fois moins"), inductrice de l'addition (resp.. soustraction, multiplication, division), est toujours représentée par une fonction + (resp.. -, x, :).

On peut vérifier ceci sur la figure 4, où les deux expressions "de plus" sont bien représentées par des fonctions +, sur la figure 5 où le verbe dépenser, inducteur de la soustraction, est bien représenté par des fonctions -, et sur la figure 7 où l'expression "fois moins" conduit bien à une fonction : dans la première phase.

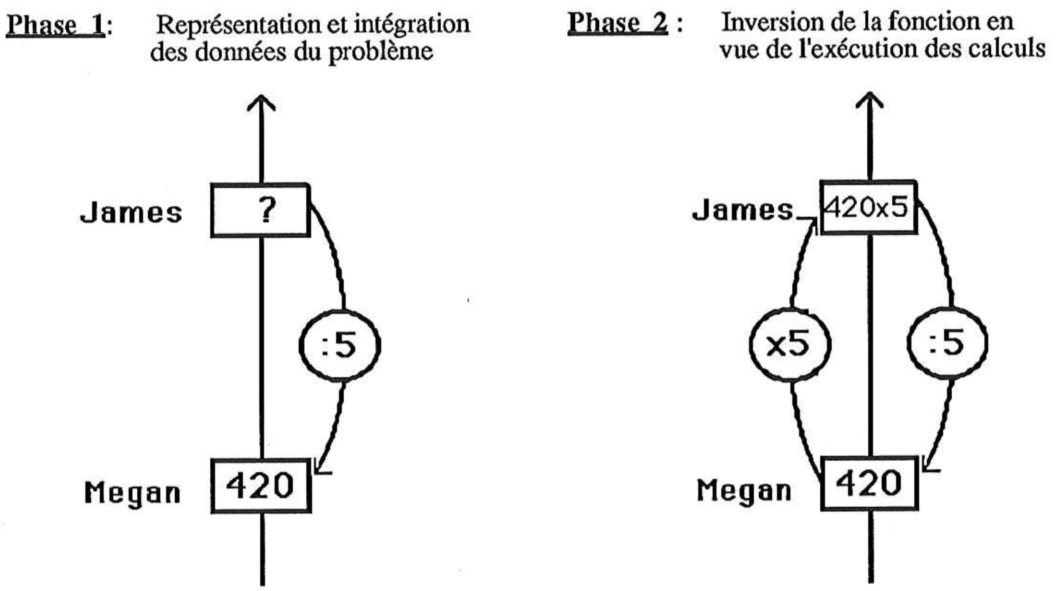


Figure 7. Deux phases dans le travail sur la représentation schématique

Conséquence. Une conséquence de notre choix d'un axe vertical pour les problèmes de comparaison et d'un axe horizontal pour les problèmes chronologiques est que la combinaison des deux axes fournit un double système de schématisation aux représentations bi-dimensionnelles dont Damm (en préparation) soutient la pertinence. Ce double système est particulièrement bien adapté à des problèmes, typiquement étudiés par Damm, comme :

Julien habite un immeuble à Schiltigheim, et se trouve chez lui. Il monte de 4 étages pour aller chez son amie qui habite le même immeuble. Puis il descend 6 étages chez un autre ami qui habite au 2ème étage. A quel étage habite Julien ?

En effet, à partir d'une représentation figurative du problème (cf. fig.8), on peut arriver à deux représentations schématiques : l'une, sur l'axe horizontal, en le traitant, comme y invite sa formulation, comme un problème d'accumulation chronologique ; l'autre, sur l'axe vertical, en le re-formulant comme un problème de comparaison, par exemple :

Julien habite un immeuble à Schiltigheim. Son amie habite 4 étages plus haut dans le même immeuble. Un autre ami, qui habite 6 étages plus bas que cette première amie, habite le 2ème étage. Quel étage habite Julien ?

Comme le montre la figure 8, les deux représentations schématiques axiales ne sont pas tout à fait identiques. Ces deux représentations conduisent néanmoins à des calculs identiques, et - heureusement ! - à la même réponse.

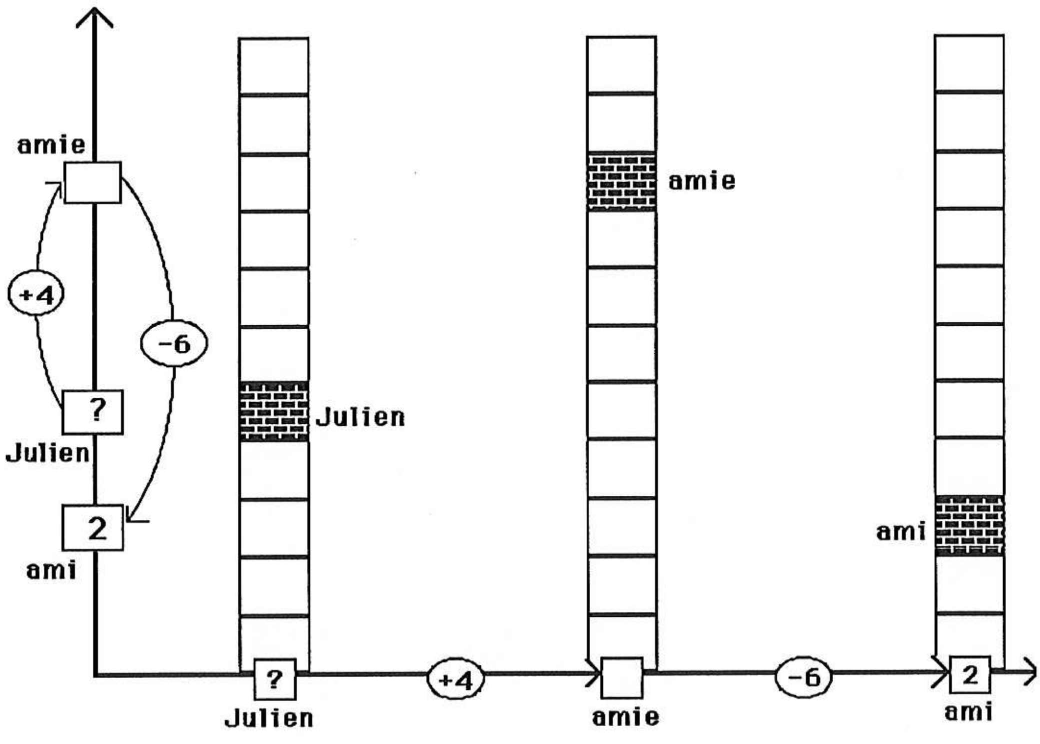


Figure 8. Représentation bi-dimensionnelle

Expérimentation au CE2

Description de l'expérience. L'expérience s'est déroulée au cours du dernier trimestre de l'année scolaire 1990/91 dans une classe de CE2 de 24 élèves dans le cadre de la formation initiale des élèves-maîtres. Dans ses grandes lignes, l'expérience consistait en un pré-test, un apprentissage et un post-test.

Le pré-test. Il a porté sur les 10 problèmes arithmétiques verbaux présentés en Annexe 1. Les élèves ont complété, l'un après l'autre, après que l'un d'entre eux a lu l'énoncé, deux feuilles sur lesquelles ces énoncés étaient présentés. Ils avaient, en théorie, tout le temps nécessaire pour les compléter. Dans les consignes préalables, on a insisté sur le fait qu'il fallait juste poser l'opération et ne pas faire le calcul, et sur la différence entre opération de pensée et opération mathématique.

Par suite d'un grand nombre d'absents, les élèves ont passé le pré-test en deux groupes. Dans l'un des groupes, on leur a distribué une feuille de brouillon en suggérant qu'elle pouvait servir à faire un dessin. Précisons tout de suite, pour ne plus y revenir, qu'aucun élève n'en a fait. Une telle observation de l'inaptitude des élèves à utiliser spontanément un dessin "heuristique", i.e. aidant à résoudre le problème, n'a rien d'original (e.g., Ng Li, 1990). Elle plaide simplement en faveur d'un enseignement explicite de l'utilisation de schémas.

Les problèmes simples, i.e. avec 2 données, ont été classés en problèmes d'accumulation (Acc) et de comparaison (Com), différenciés suivant la nature de l'opération arithmétique (+, -, x et :) et suivant la congruence, ou **non-congruence**, des opérateurs sémantiques et mathématiques. Ainsi, nous notons, par exemple, **Com$^-$** un problème de comparaison se résolvant par une soustraction mais dans lequel l'expression comparative (e.g., "de plus") induit une addition.

L'apprentissage. Il a consisté en 6 séances, d'environ 50 minutes chacune, animées par les élèves-maîtres. La classe de 24 élèves a été divisée en deux groupes de 12 élèves pour toute la durée de l'apprentissage (ainsi que pour le post-test). Les deux groupes ont travaillé dans des salles et avec des animateurs différents. Entre deux séances, qui se sont déroulées au rythme d'une ou deux par semaine, la maîtresse de la classe a souvent renforcé les apprentissages. Au total, elle a environ consacré 6 heures à ce renforcement.

Les titres et objectifs des 6 séances étaient :

(1) Corrigé du pré-test : insister sur le problème qui, excepté le problème de comparaison complexe, s'est avéré le plus difficile (le problème n°7, de type **Acc+**); à partir de ce problème, conduire une réflexion méta-cognitive sur les mots inducteurs et sensibiliser ainsi les élèves au fait que l'opérateur sémantique ne coïncide pas nécessairement avec l'opérateur mathématique.

(2) Situation de référence : introduire, pour les problèmes de comparaison (complexes), la représentation sur une demi-droite numérique verticale à partir d'une situation de référence qui possède les caractéristiques d'être simple, immédiatement compréhensible, et de permettre aux élèves de vérifier leur réponse par eux-mêmes. Nous avons choisi un problème de comparaison des mesures de 3 bandes de papier, mais un problème de taille aurait peut-être davantage conduit à faire émerger une représentation sur un axe vertical.

(3) Distinction Comparaison/Accumulation : apprendre à identifier, grâce (notamment mais non exclusivement) aux comparateurs, les problèmes de comparaison ; entraîner les élèves à utiliser la représentation sur la droite numérique pour les problèmes de comparaison.

(4) Consolidation et informations inutiles : associer une des 3 représentations schématiques (resp.. axe vertical, axe horizontal ou rectangle) à un problème (resp.. de comparaison, d'accumulation chronologique ou non); sensibiliser les élèves à la possibilité d'informations inutiles.

(5) Résolution en plusieurs étapes : bien distinguer la représentation des données (et de la question), l'inversion ou la composition des fonctions et, enfin, l'exécution des calculs.

(6) Concours d'énoncés : demander aux élèves de produire des énoncés répondant à certaines conditions. D'abord, à titre d'entraînement, un problème simple d'accumulation ; puis, un problème de comparaison complexe. Ce dernier a donné lieu à un concours d'énoncés suivant une suggestion, pour les problèmes de division, de Brousseau (1988).

Il est important de préciser que l'apprentissage visait avant tout les problèmes de comparaison (complexes). C'est la raison pour laquelle les problèmes appariés 10 du pré-test et 8 du post-test sont qualifiés de "cruciaux" par la suite : c'est ce couple de problèmes qui est crucial pour évaluer les résultats de l'apprentissage.

Le post-test. Les élèves-maîtres ont construit un jeu de 10 problèmes, dont 8 sont appariés à des problèmes du pré-test. Les 2 autres sont un problème de division (N°9 de l'Annexe 2) et un problème de comparaison complexe avec données inutiles (N°10 de l'Annexe 2).
Ces 2 problèmes "remplacent" les 2 problèmes les plus réussis du pré-test, à savoir les N°3 et 1

(Annexe 1), pour lesquels aucun énoncé apparié n'a été proposé. Par problèmes "appariés" nous entendons des problèmes qui ont le même nombre de données et qui, en tout cas pour les problèmes simples, ont le même type (Acc ou Com), impliquent la même opération arithmétique (+, - ou x), et sont identiques du point de vue de la congruence (congruents ou **non**). Citons, bien qu'il figure en Annexe 2 (sous le N°8), le problème crucial, apparié au problème de comparaison crucial de l'Annexe 1 (N°10 ; aussi l'énoncé de Brixhe ci-avant):

Un pictionnary coûte 39 F de plus qu'un trivial pursuit. Le trivial pursuit coûte 120 F de plus qu'un monopoly. Si le pictionnary coûte 345 F, combien coûte le monopoly ?

Au cours du post-test on demandait aux élèves d'avoir une feuille de brouillon à portée de main et de l'utiliser si besoin. Ces feuilles ont été collectées à la fin du post-test et serviront à une analyse plus fine des résultats au problème crucial.

Résultats.

Observations préliminaires. Nous ne donnons pas ici les taux de réussite aux différents problèmes des pré- et post-tests : ils ne sont pas au coeur de notre problématique et sont précisés, en même temps que les énoncés, en Annexes. En revanche, nous ferons quelques observations plus synthétiques en rapport avec notre propos introductif sur les facteurs de difficulté.

Nous remarquerons ainsi que :

- dans le pré-test les problèmes simples **non congruents** ont bien été significativement ($t(7)=1.954$; $p<.05$, test unilatéral) plus **difficiles** que les problèmes congruents : les premiers ont seulement conduit à 70.0 % de réussite, contre 86.5 % aux seconds ;
- néanmoins, la non-congruence n'est pas toujours suffisante pour rendre un problème difficile : les problèmes appariés **Com⁻** qui portaient sur la relation entre les deux parts comparées (N°5 du pré-test et 2 du post-test ; voir aussi la figure 9, 2ème histogramme comparatif), ont été très bien réussis en dépit du fait que l'expression "de plus" induit plutôt l'addition que la soustraction ;

- enfin, dans le pré-test toujours[1], les problèmes simples d'accumulation et de comparaison n'ont pas donné lieu à une différence de réussite significative ($t(7)=0.59$; $p>.20$): les premiers ont conduit à 74.0% de réussite et les seconds à 80.0 %.

Pour ce qui concerne maintenant l'apprentissage, les objectifs n'ont pas toujours été totalement atteints au cours des séances. Mais le travail complémentaire de la maîtresse a permis de remédier en grande partie à ce défaut. Ces objectifs ont aussi, parfois, dû être aménagés en cours d'apprentissage. Mais les aménagements ont le plus souvent été circonstanciels et ne méritent donc pas d'être décrits. En revanche, il est intéressant de signaler une observation qualitative rapportée par la maîtresse. Après les premières séances, certains élèves - surtout ceux qui n'avaient pas trop bien réussi au pré-test - "rayonnaient": ils semblaient soulagés par le fait de savoir quoi faire lorsqu'on leur posait un problème !

Mentionnons enfin que la séance de concours d'énoncés s'est avérée très intéressante : presque tous les 12 énoncés (les élèves travaillaient par paires) répondaient aux consignes, et les deux paires gagnantes (une pour chacun des deux sous-groupes), choisies à la quasi-unanimité par les élèves eux-mêmes, avaient produit des énoncés originaux (par rapport à ceux qui ont été vus au cours du pré-test et de l'apprentissage antérieurs). Voici leurs énoncés (avec la syntaxe et l'orthographe d'origine) respectifs de problème de comparaison complexe (à 3 données):

Raoul le coiffeur a coiffé 18 personnes de plus que Laëtitia la coiffeuse qui a coiffé 7 personnes de plus que David qui en a coiffé 26 personnes. Combien Raoul et Laëtitia ont ils coiffés de personnes ?

et :

Dans la cour de l'école primaire il y a 6 arbres de moins qu'à l'école maternelle. A l'école maternelle il y a 10 arbres. Et à l'école normale il y a 8 arbres de plus qu'à l'école maternelle. Combien y a-t-il d'arbres à l'école primaire et à l'école normale ?

Progrès d'ensemble aux problèmes. L'évaluation des progrès d'ensemble peut se faire en comparant les réussites des élèves aux 8 problèmes appariés des pré- et post-tests. La figure 9 donne clairement une impression de progrès. Ce progrès est général dans la mesure où, pour chacun des 8 problèmes, les réussites sont meilleures au post-test qu'au pré-test ; il est aussi significatif avec un t-test unilatéral pour échantillons appariés, que l'on considère les élèves ($t(23) = 3.60$;

[1] *Nous limitons certaines observations au seul pré-test, car les problèmes du pré-test, au contraire de ceux du post-test, paraissent suffisamment nombreux et bien "équilibrés" pour rendre ces observations pertinentes.*

p = .0008) ou les problèmes (t(7) = 4.71 ; p = .0011) comme unités ; enfin, il est très net pour le problème crucial puisque l'on passe de 0 réussite au pré-test à 9 réussites au post-test (il est vrai que la marge de progression était importante !).

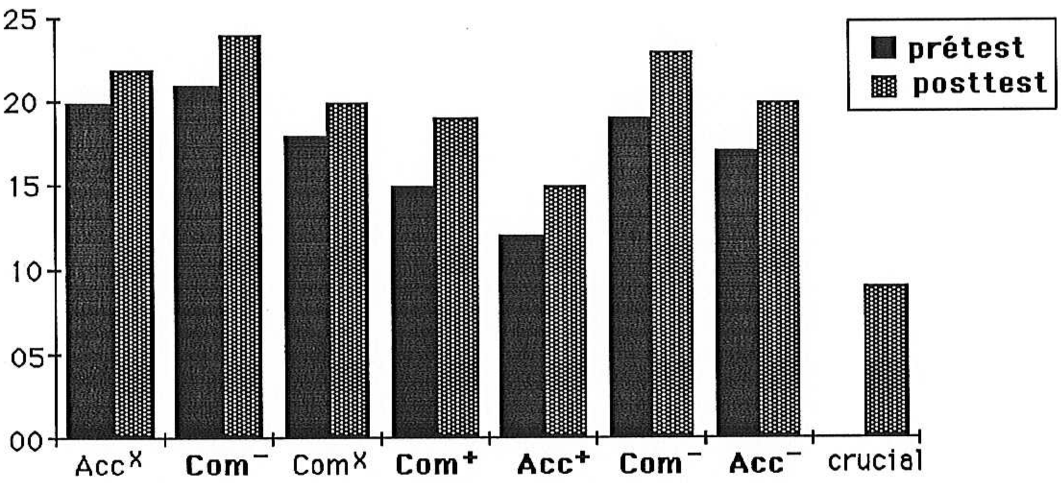


Figure 9. Histogramme comparatif des réussites aux pré- et post-tests
(pour chacun des 8 couples de problèmes appariés dans l'ordre de l'Annexe 2)

Progrès individuels. Sur les 24 élèves, 14 ont progressé, i.e. ont réussi plus de problèmes appariés au post-test qu'au pré-test, 6 sont restés à leur niveau, et 4 ont régressé. Il convient cependant de signaler que ce sont surtout les élèves de l'un des groupes d'apprentissage qui ont progressé. En effet, dans l'un des groupes, 11 élèves (sur 12) ont progressé, alors que dans l'autre seulement 3 élèves (sur 12) ont progressé. Une telle différence est nettement significative : p=.001 avec un test de Fisher. Nous ne connaissons pas précisément l'origine de cette différence, mais il semble qu'elle ne soit pas seulement imputable à l'apprentissage lui-même (d'autant que l'apprentissage complémentaire pratiqué par la maîtresse s'est fait avec la classe entière). Il se pourrait que plusieurs autres facteurs aient contribué à produire cette différence : le "testeur" différent dans les 2 groupes, un effet de groupe, une différence initiale au pré-test, etc.. Il est possible que cette différence entre groupes ait favorisé certaines de nos observations, mais nous ne croyons pas qu'elle relègue ces dernières au rang d'artefacts.

Le problème crucial. Les progrès au problème crucial, dont nous avons souligné la netteté, méritent d'être analysés plus finement. En particulier, on peut se demander s'ils sont la conséquence directe de l'apprentissage pratiqué. Les brouillons des élèves permettent d'approcher cette question : ceux qui ont progressé, i.e. réussi le problème crucial au post-test (puisque personne ne l'avait réussi au pré-test), se sont-ils servi d'un schéma (le schéma enseigné) ? La réponse est fournie par le tableau 1 où nous avons comparé les réussites, au problème crucial du post-test, des élèves ayant utilisé un schéma (qui est toujours celui enseigné), aux réussites des élèves n'en ayant pas utilisé.

Tableau 1. Croisement de l'utilisation d'un schéma avec la réussite (au problème crucial du post-test)

		REUSSITE	
		OUI	NON
SCHEMA	OUI	**7**	**2**
	NON	**2**	**13**

Comme on peut le voir sur le tableau 1, les élèves ayant utilisé le schéma (enseigné) ont mieux réussi au problème crucial de comparaison complexe. Cette différence de réussite entre les 9 élèves ayant utilisé un schéma et les 15 autres est fortement significative : $p=.003$ avec un test de Fisher. Comme les élèves ont choisi eux-mêmes de faire un schéma, il se pourrait cependant que ce soient les "bons" élèves qui ont utilisé un schéma. Dans un tel cas, notre résultat statistique montrerait simplement que les "bons" élèves sont plus performants au post-test que les "moins bons". Autrement dit, notre résultat significatif serait sans grande signification ! Heureusement, deux arguments permettent de rejeter cette interprétation.

En effet, nous avons vérifié que :

1) les élèves ayant fait un schéma au problème crucial du post-test avaient été - c'est étonnant - moins performants que les autres au pré-test. A ce dernier, ils n'avaient obtenu qu'un score moyen de 6.00 (sur 10), contre 7.53 à leurs camarades, une différence significative avec un t-test bilatéral pour échantillons non appariés ($t(22)= 2.102$; $p<.05$);

2) près d'un tiers des élèves savaient parfaitement faire le schéma, sur demande, a posteriori (test complémentaire : voir suite), mais ne l'ont pas fait et se sont en général trompés.
Ces deux observations, surtout la première, permettent donc d'écarter l'hypothèse d'une confusion entre les deux facteurs "être bon élève" et "faire un schéma". En conséquence, nous pouvons conclure que l'utilisation du schéma enseigné favorise la réussite.

Test complémentaire. Pourquoi beaucoup d'élèves, en dépit de l'apprentissage pratiqué, n'ont-ils pas fait le schéma ? Une des réponses possibles est que, compte-tenu de sa complexité procédurale, ils n'en étaient pas capables. Le fait que ces élèves ont été plus performants au pré-test que les élèves qui ont utilisé le schéma permet tout de suite de savoir que cette explication n'est certainement pas suffisante. Pour approcher plus directement la question, la maîtresse a, après le post-test et pour les deux problèmes de comparaison, demandé à tous les élèves de faire la représentation schématique qu'on leur avait enseignée. Pour le problème crucial, qui est le seul que nous analyserons, nous avons ainsi pu vérifier que, au total, 16 (des 24 élèves) savaient faire le schéma.

De manière plus détaillée, nous avons observé que :
- 7 élèves, i.e. tous à une exception près, ayant fait spontanément (i.e. au cours du post-test) le schéma[1], ont su le refaire ;
- les 2 élèves ayant réussi le problème crucial sans faire de schéma savaient faire ce dernier ;
- 7 élèves n'ayant pas fait spontanément de schéma et ayant échoué au problème crucial ont su faire le schéma ;
- enfin, les 8 élèves n'ayant pas su faire le schéma sur demande n'avaient pas su résoudre le problème.

[1] *Un élève a fait, spontanément et correctement, le schéma, mais il s'est trompé dans la réponse sur la feuille de test: ceci explique pourquoi l'effectif de la case Oui-Oui du tableau 1 est de 7.*

Cette analyse détaillée permet donc de conclure que tous les élèves ayant su résoudre le problème crucial savaient aussi faire le schéma ou, ce qui est logiquement pareil, qu'**aucun élève ne sachant faire le schéma n'a su résoudre le problème.** Nous n'en inférons pas pour autant que savoir faire le schéma est une condition nécessaire pour résoudre le problème. En effet, nous sommes ici plutôt en présence d'une hiérarchie psychométrique que d'une hiérarchie d'apprentissage (cf. Sander, 1986). Néanmoins, l'observation garde une partie de son intérêt.

Discussion générale

Sur la base de trois expériences d'apprentissage publiées, nous avons fait quelques propositions pour un enseignement des problèmes arithmétiques verbaux. Ces propositions peuvent être mises en oeuvre dès la fin du cycle des apprentissages fondamentaux (CP et CE1), et se prolonger jusqu'au collège. Mais c'est au cycle des approfondissements que l'essentiel du travail serait à faire. Résumons et discutons-les.

En théorie, on distingue d'abord[1] les problèmes de comparaison et d'accumulation. Cette distinction semble accessible à tous les élèves de CE2 : d'une part, parce qu'il existe un nombre très limité de marqueurs de la comparaison (e.g., de plus, de moins, fois plus, fois moins); d'autre part, parce que dans les problèmes typiques de comparaison on compare deux choses (e.g., le nombre de billes de Pierre et celui de Paul), une opération très familière aux enfants. Dans les problèmes d'accumulation on fait en outre la distinction entre les problèmes événementiels ou chronologiques et les autres. Pour chacune des trois classes de problème ainsi distinguées, on introduit alors une unité perceptivo-cognitive, à savoir respectivement :

{comparaison, $\uparrow$},

{accumulation chronologique, $\longrightarrow$}

et {accumulation non chronologique, $\boxed{\text{--}|\text{--}}$ }.

[1] *En pratique, il n'est ni nécessaire, ni judicieux, de suivre cette construction théorique descendante. Par exemple, rien n'empêche que la schématisation associée aux problèmes d'accumulation soit introduite avant (en fin de CP ou au CE1) la distinction entre problèmes d'accumulation et de comparaison.*

Ces unités sont la principale originalité de notre proposition. Elles prolongent la théorie PDup (Fischer, 1992) et, au moins faiblement, la confirment. En effet, au cours de notre expérimentation au CE2, l'apprentissage des unités s'est avéré très rapide, conformément à notre description des apprentissages déclaratifs. D'ailleurs, la maîtresse avait pris spontanément l'initiative d'afficher les différentes unités dans la salle de classe : en reprenant ainsi une pratique classique pour la table de multiplication, qui est le prototype des connaissances déclaratives, elle avait ainsi perçu la nature déclarative de cet apprentissage. La rapidité de cet apprentissage est encore plus évidente lorsqu'on l'oppose à la lenteur de l'apprentissage de la procédure de résolution (des problèmes de comparaison): après plusieurs séances, et plus d'une dizaine de problèmes, un tiers des élèves ne maîtrisait toujours pas cette dernière (voir ci-avant). Peut-être que l'introduction de *facilitateurs procéduraux* [1] (King, 1991) pourrait améliorer cet apprentissage procédural.

Toujours en accord avec la théorie PDup, nous assignons les fonctions suivantes à nos unités perceptivo-cognitives.

1) Elles sont destinées à indexer les connaissances procédurales servant à représenter schématiquement, et puis à résoudre, les problèmes de la classe concernée. En conséquence, elles doivent permettre aux élèves de "résoudre potentiellement" certains problèmes. Par "résoudre potentiellement" nous entendons simplement déclarer qu'il s'agit, par exemple, d'un problème de comparaison, en sous-entendant qu'il suffirait de représenter les données sur un axe (vertical) pour trouver (si l'on fait bien attention) la solution. Cette résolution potentielle nous paraît amplement suffisante pour de nombreux problèmes n'ayant aucun intérêt pratique et ne nécessitant donc pas de réponse effective.
2) Elles doivent rendre les connaissances de l'élève moins dépendantes du contexte. Si la théorie PDup est exacte, ces unités sont en effet plus autonomes et moins sensibles au contexte que les procédures que l'élève peut mettre en oeuvre "spontanément". Et l'on sait que cette dépendance du contexte est une difficulté majeure dans les apprentissages initiaux (voir, par exemple, Brissiaud, 1988).
3) Elles doivent inciter l'élève à utiliser une représentation imagée. Ceci est un objectif extrêmement difficile à atteindre. Et pas seulement chez les enfants ou dans le domaine des problèmes arithmétiques verbaux. Par exemple, Kosslyn (1988, p.266-267) remarque que la

[1] *Un* facilitateur procédural *est un ensemble de questions, réunies sur une fiche, qui a pour fonction de guider temporairement l'élève dans l'acquisition.*

plupart des gens peuvent aisément apprendre à utiliser l'imagerie dans la mémorisation, et sont impressionnés par l'efficacité de la technique, mais néanmoins ne l'utilisent pas !

Les unités perceptivo-cognitives que nous proposons pour la résolution des problèmes arithmétiques verbaux s'accordent bien avec les élaborations récentes de chercheurs en Intelligence Artificielle. Ainsi, elles s'apparentent aux unités que Koedinger et Anderson (1990) ont introduites pour la planification de la résolution des problèmes de géométrie. Plus généralement, elles devraient permettre aux élèves de résoudre les problèmes à la manière des experts. Ces derniers ont tendance à raisonner vers l'avant plutôt que de partir du résultat à démontrer. Ceci, ajoutent Koedinger et Anderson, non pas parce qu'ils préfèrent ce mode de raisonnement, mais parce qu'ils en sont capables ! Et, remarque Sweller (1988), s'ils en sont capables, c'est grâce à l'utilisation de "schémas" pour classifier les problèmes en catégories qui conduisent à des implications sur les démarches appropriées à suivre. Précisons que lorsque Sweller parle de "schéma" il ne s'agit pas d'un graphique, mais d' «une structure qui permet aux personnes cherchant à résoudre les problèmes de reconnaître un énoncé de problème comme appartenant à une catégorie particulière d'énoncés de problèmes qui requiert normalement des démarches particulières» (p.259). Ce sont de tels "schémas" qui devraient permettre aux élèves de reconnaître la partie gauche de nos unités perceptivo-cognitives (qui traduit le type du problème). Si ces dernières sont solidement consolidées en mémoire déclarative, l'unité entière devrait donc être activée et déclencher, si nécessaire, la procédure de représentation et de résolution adéquate.

L'importance de ces "schémas" a aussi été soulignée par le spécialiste expérimenté de la résolution de problèmes qu'est R.E. Mayer (cf., Mayer, 1977). Mayer (1985), par exemple, écrit à propos des "schémas": « Apparemment les élèves possèdent des "schémas" pour les types de problèmes, et les utilisent pour représenter mentalement les problèmes. Lorsqu'ils n'ont pas de schéma pour un type donné de problèmes, la représentation a plus de chances d'être erronée» (p.133). Il continue en remarquant que la compréhension «nécessite une connaissance spécifique des types de problèmes. En particulier, la compréhension des problèmes verbaux et à histoire (*story problems*) est influencée par le fait d'avoir (et d'avoir accès à lui) un "schéma" de problème approprié.» (p.133), et complète ces propos en remarquant que les erreurs dans les problèmes de comparaison pourraient précisément se produire lorsque les gens n'ont pas le schéma approprié (p.138).

Reste à savoir, dans une telle construction théorique, comment les "schémas" peuvent eux-mêmes se constituer. C'est par l'étude d'exemples analogues que les enfants pourraient arriver à les construire. En effet, il semble que l'induction de "schémas" soit une conséquence importante du transfert analogique (Gholson, Morgan, Dattel & Pierce, 1990 ; Novick & Holyoak, 1991). «En somme, concluent Novick et Holyoak (p.411), il apparaît qu'une conséquence majeure du transfert analogique est l'induction d'une connaissance plus abstraite au sujet d'une classe de problèmes, connaissance qui en retour facilite des transferts subséquents plus flexibles.»

Plus généralement, nous proposons les 4 étapes de résolution d'un problème (arithmétique verbal élémentaire) suivantes :

1) **Reconnaître** la question et la structure du problème : comparaison, accumulation chronologique ou accumulation non chronologique. Cette reconnaissance se fait grâce à la compréhension et à l'analyse de l'énoncé.
2) Une fois la structure du problème reconnue, l'unité perceptivo-cognitive indique le mode de représentation : axe vertical, axe horizontal, ou rectangle. Toutes les données pertinentes du problème sont **intégrées** dans ce schéma.
3) On quitte ensuite l'énoncé verbal initial et on **exécute** - en inversant ou composant préalablement, si nécessaire, certaines fonctions - les opérations induites par la représentation schématique.
4) On revient à l'énoncé verbal pour **répondre** à la question posée. Cette dernière étape n'a été que peu étudiée dans notre travail. Néanmoins, le fait qu'un élève, qui avait trouvé la réponse sur sa représentation schématique mais n'a pas su indiquer correctement les opérations à taper sur la calculette (voir la note 7), suggère bien qu'elle existe.

Pour inciter les élèves à respecter ces différentes étapes, nous avons utilisé, dans notre expérimentation au CE2, une présentation stéréotypée analogue à celle du tableau 2.

Tableau 2. Présentation d'un problème arithmétique verbal

Ce que je cherche	Comment je trouve	Ce que je réponds

Un tel tableau, même s'il n'est pas dans l' "esprit" des Instructions Officielles (I.O., 1980) qui recommandent d'éviter «de stéréotyper la mise en forme de la démarche ou des résultats.» (p.43), correspond à la pratique effective de beaucoup de maîtres expérimentés. En outre, il semble un bon compromis entre l'adaptation à la situation et à l'interlocuteur, sur laquelle insistent les I.O., et une pratique encore très classique de la séparation en deux colonnes : SOLUTION - OPERATIONS. Le tableau 2 est en effet plus souple que cette dernière : il permet notamment de faire un schéma dans la colonne centrale et de ne pas poser systématiquement les opérations.

Les recherches présentées dans la première partie ou, plus directement, notre propre expérimentation présentée dans la troisième partie, étayent, d'un point de vue empirique, nos hypothèses théoriques. Bien entendu, d'importantes questions restent en suspens. Par exemple, l'observation parallèle d'une autre classe de CE2, a suggéré que certains élèves n'avaient pas besoin d'un outil spécifique pour résoudre les problèmes de comparaison, même complexes. Il faudra donc trouver un moyen de déterminer les élèves pour lesquels un tel apprentissage paraît le plus approprié à un moment donné.

Nous terminerons en évoquant une question plus générale que soulèvent nos propositions d'enseignement et qui éclaire en partie le sous-titre de notre article : elle concerne le bien-fondé d'un enseignement pro-actif, i.e. d'un enseignement qui essaie de prévenir les difficultés plutôt que d'essayer d'y remédier. On a en effet lourdement insisté, au cours de ces deux dernières décennies, sur le rôle "bienfaiteur" des erreurs (pour une discussion critique, voir Fischer, 1988) et sur le fait qu'une connaissance ou un outil nouveau ne devait être introduit qu'en réponse à un problème. Autrement dit sur l'intérêt d'un enseignement rétro-actif. De telles idées ne sont pas à rejeter totalement. Mais elles n'ont pas besoin non plus d'être systématiques. D'autant que l'échec peut aussi décourager certains élèves (cf. Ehrlich & Florin, 1989), voire, chez des enfants qui sont déjà en «grande difficulté», conduire à des «destructions» (Meljac, 1991, p.431); et, nous avons eu l'occasion de le souligner précédemment, certains élèves sont véritablement "libérés" lorsqu'ils savent comment aborder un problème[1]. En outre, des recherches récentes et précises, aussi bien sur les adultes (VanLehn, 1991), que sur les enfants (Siegler & Jenkins, 1989), suggèrent que les impasses ne sont ni une condition nécessaire, ni une condition suffi-

[1] *Beaucoup de maîtres réservent une plage du samedi matin à la résolution de problèmes: vu la signification du mot "problème" dans la langue vernaculaire, nous sommes amené à nous interroger sur les liens affectifs que peut créer un enfant, à qui il arrive régulièrement des problèmes juste avant le week-end, avec ces derniers !*

sante pour la découverte de nouvelles stratégies chez les sujets[1]. Ou aussi, plus directement, ces recherches confirment l'intérêt de l'instruction explicite (Woodward, 1991), du questionnement guidé (King, 1991) et de l'enseignement pro-actif (Delclos & Harrington, 1991).

RÉFÉRENCES

Adetula L.O., 1990. Language factor : Does it affect children's performance on word problems? *Educational Studies in Mathematics,* **21**, 351-365.

Bergeron J.C. & Herscovics N., 1990. Psychological aspects of learning early arithmetic. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds), *Mathematics and cognition : A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.31-52). Cambridge : University Press.

Brissiaud R., 1988. De l'âge du capitaine à l'âge du berger : Quel contrôle de la validité d'un énoncé de problème au CE2 ? *Revue Française de Pédagogie,* **82**, 23-31.

Brixhe D., 1990. L'énoncé de problème : un genre littéraire particulier. *Repères & Expériences,* **3**, 14-18.

Brousseau G., 1988. Représentations et didactique du sens de la division. In G. Vergnaud, G. Brousseau & M. Hulin (Eds), *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* (Actes du Colloque de Sèvres, Mai 1987, pp.47-64). Aubenas : La Pensée Sauvage.

Damm R., en préparation. Le rôle de la représentation dans la résolution des problèmes additifs à deux opérations.

Delclos V.R. & Harrington C., 1991. Effects of strategy monitoring and proactive instruction on children's problem-solving performance. *Journal of Educational Psychology,* **83**, 35-42.

Duval R., 1991. Interaction des niveaux de représentation dans la compréhension des textes. In R. Duval (Ed), *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives :* vol.**4** (pp. 63-196). Strasbourg : IREM.

Ehrlich S., 1990. *Sémantique et mathématique : Apprendre/Enseigner l'arithmétique simple.* Paris : Nathan.

Ehrlich S. & Florin A., 1989. Ne pas décourager l'élève : Etude sur l'échec de fonctionnement des enfants en classe. *Revue Française de Pédagogie,* **86**, 35-48.

Esfahani E., 1989. L'aspect sémantique des problèmes additifs. Thèse : Université Paris VII.

[1] En revanche, il est intéressant de noter qu'elles semblent une condition nécessaire pour la généralisation subséquente de la stratégie nouvellement découverte.

Fayol M., 1991. Du nombre à son utilisation : la résolution de problèmes additifs. In J. Bideaud, C. Meljac & J.P. Fischer (Eds), *Les chemins du nombre* (pp.259-270). Lille : Presses Universitaires.

Fischer J.P., 1979. La perception des problèmes soustractifs aux débuts de l'apprentissage de la soustraction. Université de Nancy I (Thèse de IIIe cycle en Didactique des Mathématiques, sous la direction de F. Pluvinage).

Fischer J.P., 1981. Développement et fonctions du comptage chez l'enfant de 3 à 6 ans. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **2**, 277-302.

Fischer J.P., 1986. *Eléments de psychologie pour l'apprentissage des mathématiques.* Strasbourg : IREM.

Fischer J.P., 1988. Le rôle positif des erreurs n'est-il pas surfait ? In R. Duval (Ed), *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives :* vol.**1**. Strasbourg : IREM.

Fischer J.P., 1992. *Apprentissages numériques : la distinction procédural/déclaratif.* Nancy : Presses Universitaires.

Gholson B., Morgan D., Dattel A.R. & Pierce K.A., 1990. The development of analogical problem solving : Strategic processes in schema acquisition and transfer. In D.F. Bjorklund (Ed), *Children's strategies : Contemporary views of cognitive development* (pp.269-308). Hillsdale : Erlbaum.

I.O., 1978. Contenus de formation à l'école élémentaire : cycle élémentaire. Paris : MEN.

I.O., 1980. Contenus de formation à l'école élémentaire : cycle moyen. Paris : MEN (réimpression 1981).

Judd T.P. & Bilsky L.H., 1989. Comprehension and memory in the solution of verbal arithmetic problems by mentally retarded and nonretarded individuals. *Journal of Educational Psychology*, **81**, 541-546.

King A., 1991. Effects of training in strategic questioning on children's problem-solving performance. *Journal of Educational Psychology*, **83**, 307-317.

Koedinger K.R. & Anderson J.R., 1990. Abstract planning and perceptual chunks : Elements of expertise in geometry. *Cognitive Science*, **14**, 511-550.

Kosslyn S.M., 1988. Imagery in learning. In M.S. Gazzaniga (Ed), *Perspectives in memory research* (pp.245-273). Cambridge : MIT Press.

Larkin J.H. & Simon H.A., 1987. Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive Science*, **11**, 65-100.

Lewis A.B., 1989. Training students to represent arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, **81**, 521-531.

Mayer R.E., 1977. *Denken und Problemlösen.* Berlin : Springer, 1979 (original anglais de

1977).

Mayer R.E., 1985. Mathematical ability. In R.J. Sternberg (Ed), *Human abilities : an information-processing approach* (pp.127-150). New York : Freeman.

Meljac C., 1991. De quelques variantes imprévues apportées au scénario de la construction du nombre. In J. Bideaud, C. Meljac & J.P. Fischer (Eds), *Les chemins du nombre* (pp.401-432). Lille : Presses Universitaires.

Nesher P. & Katriel T., 1978. Two cognitive modes in arithmetic word problem solving. In *Proceedings of the second International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Osnabrück : Université.

Ng Li F.L., 1990. The effect of superfluous information on children's solution of story arithmetic problems. *Educational Studies in Mathematics,* **21,** 509-520.

Novick L.R. & Holyoak K.J., 1991. Mathematical problem solving by analogy. *Journal of Experimental Psychology : Learning, Memory, and Cognition,* **17,** 398-415.

Sander E., 1986. *Lernhierarchien und kognitive Lernförderung.* Göttingen : Verlag für Psychologie.

Siegler R.S. & Jenkins E.A., 1989. *How children discover new strategies.* Hillsdale : Erlbaum.

Silver E.A., 1986. Using conceptual and procedural knowledge : A focus on relationships. In J. Hiebert (Ed), *Conceptual and procedural knowledge : The case of mathematics* (pp.181-198). Hillsdale : Erlbaum.

Sweller J., 1988. Cognitive load during problem solving : Effects on learning. *Cognitive Science,* **12,** 257-285.

VanLehn K., 1991. Rule acquisition events in the discovery of problem-solving strategies. *Cognitive Science,* **15,** 1-47.

Vergnaud G., 1990. La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **10,** 133-170.

Vergnaud G., 1991. L'appropriation du concept de nombre : un processus de longue haleine. In J. Bideaud, C. Meljac & J.P. Fischer (Eds), *Les chemins du nombre* (pp.271-282). Lille : Presses Universitaires.

Vergnaud G. & Durand C., 1976. Structures additives et complexité psychogénétique. *Revue Française de Pédagogie,* **36,** 28-43.

Williams L.V., 1983. *Deux cerveaux pour apprendre : le droit et le gauche.* Paris : Editions d'Organisation, 1986 (original anglais de1983).

Willis G.B. & Fuson K.C., 1988. Teaching children to use schematic drawings to solve addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology,* **80,** 192-201.

Wilson C.L. & Sindelar P.T., 1991. Direct instruction in math word problems : Students with learning disabilities. *Exceptional Children*, **57**, 512-519.

Woodward J., 1991. Procedural knowledge in mathematics : The role of the curriculum. *Journal of Learning Disabilities*, **24**, 242-251.

Annexe 1:

Les 10 problèmes du pré-test

N°1 (Acc$^+$; .92)[1]: Sophie avait rangé 158 timbres le jeudi. Elle en a rangé 93 le vendredi. Combien de timbres a-t-elle rangés en tout ?
Pour trouver la réponse, je taperais .... sur une calculette.[2]

N°2 (Acc^x; .83): Il y a 12 marguerites dans un bouquet. La fleuriste a 27 bouquets. Combien la fleuriste a-t-elle de marguerites en tout ?

N°3 (Com$^-$; .96): Au cirque il y a 216 places. Au cinéma il y a 58 places de moins qu'au cirque. Combien y a-t-il de places au cinéma ?

N°4 (Com^x; .75): Il y a 29 chaises dans la classe. Il y en a 13 fois plus dans la cantine. Combien y a-t-il de chaises dans la cantine ?

N°5 (**Com$^-$**; .88): Vincent a 324 timbres. Loïc en a 278. Combien Vincent en a-t-il de plus que Loïc ?

N°6 (**Com$^+$**; .63): Nicolas a 37 ans. Il a 24 ans de moins que Maryse. Quel est l'âge de Maryse ?

N°7 (**Acc$^+$**; .50): Pierre a 116 billes. Il vient d'en perdre 18. Combien de billes avait-il avant ?

N°8 (**Com$^-$**; .79): Virginie a 112 billes. Elle en a 27 de plus que Sandrine. Combien Sandrine a-t-elle de billes ?

N°9 (**Acc$^-$**; .71): Dans l'autobus, il y a 37 personnes maintenant. Avant l'arrêt, il y en avait 19. Combien de personnes viennent de monter ?

N°10 (comparaison complexe; .00): Une veste coûte 152 F de plus qu'un pantalon. Ce pantalon coûte 84 F de plus qu'un pullover. Si la veste coûte 580 F, combien coûte le pullover ?[3]

---

[1] *Pour chaque problème nous précisons, entre parenthèses, le type (voir texte pour les notations) et le taux de réussite (sur 24 élèves).*

[2] *Cette phrase réponse ayant été proposée pour tous les problèmes, nous ne la répétons pas par la suite.*

[3] *Pour les problèmes complexes, on précisait que la calculette dispose des parenthèses.*

Annexe 2:

Les 10 problèmes du post-test

N°1 (Acc^{x}; .92)[1]: Sur une piste d'athlétisme, on a 13 haies par couloir. Il y a 8 couloirs. Combien y a-t-il de haies en tout ?
Pour trouver la réponse, je taperais .... sur une calculette.[2]

N°2 (**Com^{-}**; 1.00): Thibaut a 485 pin's. Maxime en a 227. Combien Thibaut en a-t-il de plus que Maxime ?

N°3 (Com^{x}; .83): Il y a 37 livres dans la classe. Il y en a 18 fois plus dans la B.C.D de l'école. Combien y a-t-il de livres dans la B.C.D ?

N°4 (**Com^{+}**; .79): Au flipper, Nicolas a réussi 43 points. Il a réussi 17 points de moins que Jacques. Combien de points a réussi Jacques ?

N°5 (**Acc^{+}**; .63): Joséphine a 97 autocollants. Elle vient d'en perdre 23. Combien d'autocollants avait-elle avant ?

N°6 (**Com^{-}**; .96): Madame Stallone a 42 arbustes autour de sa maison. Elle en a 17 de plus que sa voisine madame Spock. Combien madame Spock a-t-elle d'arbustes autour de sa maison ?

N°7 (**Acc^{-}**; .83): Dans un camion de livraison, il y a 238 sacs de pommes de terre maintenant. Avant le chargement, il y en avait 92. Combien de sacs le chauffeur vient-il de charger ?

N°8 (comparaison complexe; .38): Un pictionnary coûte 39 F de plus qu'un trivial pursuit. Le trivial pursuit coûte 120 F de plus qu'un monopoly. Si le pictionnary coûte 345 F, combien coûte le monopoly ?[3]

N°9 (Acc$^{\div}$; .63): Un éleveur possède 96 chiens. Il achète 384 os pour leur partager en parts égales. Combien d'os aura chaque chien ?

N°10 (comparaison complexe; .29): Le village de Valmieu compte 1469 habitants. Il en a 149 de moins que le village de Saint-Jean, situé à 23 km de Valmieu. Rougnac, un village voisin, compte 394 habitants de moins que Saint-Jean. A 3 km, Saint-Pierre a 135 habitants de plus que Saint-Jean. Quel est le nombre d'habitants de Rougnac ?[3]

Remarque: Les problèmes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 du post-test sont appariés respectivement aux problèmes 2, 5, 4, 6, 7, 8, 9 et 10 du pré-test.

Notes 1, 2 et 3: voir Annexe 1.