A VOS STYLOS

RETOUR SUR LE PROBLÈME 14

Ce problème, qui avait été proposé par D. DUMONT fait décidément couler beaucoup d'encre. Il s'agissait de montrer l'égalité des séries $\sum_{n\geq 1} \frac{n\ x^n}{1+x^n}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{(2n+1)x^{2n+1}}{1-x^{2n+1}}$, ce qui a été résolu dans le numéro 62, mais surtout de comparer les vitesses de convergence de ces deux séries et de voir comment croît la somme $S(x)$ quand x tend vers 1^-.

Dans le numéro 63, M. KRIER démontrait la double inégalité

$$\frac{x}{(1+x)^2(1-x)} \leq S(x) \leq \frac{x}{(1+x)(1-x)}.$$

Dans le numéro 65, D. DUMONT, reprenant la même idée que M. KRIER, aboutissait, sans aucune rigueur, à $S(x) \simeq \frac{\pi^2}{12}\frac{1}{(1-x)^2}$ en 1^-. Cependant, il s'interrogeait toujours sur la nature des restes $R_n(x)$ de chaque série pour x fixé.

C'est un plaisir que d'avoir reçu pour le présent numéro de '*L'Ouvert*' cette démonstration de E. KERN qui achève presque la résolution de ce problème.

Soit $0 \leq x < 1$. Posons

$$\begin{array}{rlrl}
f(x) &= \frac{x}{1+x} + \frac{2x^2}{1+x^2} + \cdots = & g(x) &= \frac{x}{1-x} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \cdots \\
f_n(x) &= \frac{x}{1+x} + \cdots + \frac{nx^n}{1+x^n} & g_n(x) &= \frac{x}{1-x} + \cdots + \frac{(2n-1)x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} \\
r_n(x) &= f(x) - f_n(x) & R_n(x) &= g(x) - g_n(x) \\
a(x) &= x + 2x^2 + \cdots & b(x) &= x + 3x^3 + \cdots \\
a_n(x) &= x + \cdots + nx^n & b_n(x) &= x + \cdots + (2n-1)x^{2n-1} \\
\alpha_n(x) &= a(x) - a_n(x) & \beta_n(x) &= b(x) - b_n(x).
\end{array}$$

On a

$$\frac{1}{1+x^{n+1}}\alpha_n(x) \leq r_n(x) \leq \alpha_n(x)$$

donc

$$r_n(n) \sim \alpha_n(x) \text{ quand } n \to +\infty.$$

Or $a_n(x) = x(1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}) = x \times c'_n(x)$ avec $c_n(x) = 1 + x + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, d'où

$$c'n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

et par suite

$$a_n(x) = \frac{x}{(1-x)^2}[1-(n+1)x^n + nx^{n+1}] \to \frac{x}{(1-x)^2} = a(x)$$

donc aussi

$$\alpha_n(x) = \frac{x}{(1-x)^2}[(n+1)x^n - nx^{n+1}] = \frac{x^{n+1}}{(1-x)^2}[(n+1)-nx]$$

et par suite

$$\boxed{r_n(x) \sim \alpha_n(x) \sim \tfrac{nx^{n+1}}{1-x}} \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

On a aussi

$$\beta_n(x) \leq R_n(x) \leq \frac{1}{1-x^{2n+1}} \times \beta_n(x)$$

donc

$$R_n(x) \sim \beta_n(x) \text{ quand } n \to +\infty.$$

Or

$$\begin{array}{lll} b_n(x) & = \frac{1}{2}(a_{2x}(x) - a_{2n}(-x)) & \text{(partie impaire de } a_{2n}(x)) \\ b(x) & = \frac{1}{2}(a(x) - a(-x)) & \text{(partie impaire de } a(x)) \end{array}$$

donc $\beta_n(x) = \frac{1}{2}[\alpha_{2n}(x) - \alpha_{2n}(-x)] = \frac{x^{2n+1}}{(1-x^2)^2}[(2n+1)-(2n-1)x^2]$ et par suite :

$$\boxed{R_n(x) \sim \beta_n(x) \sim \tfrac{2nx^{2n+1}}{1-x^2}} \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

Supposons maintenant $-1 < x \leq 0$.
On a

$$\begin{aligned} f_{2n}(x) &= \left(\frac{x}{1+x} + \frac{3x^3}{1+x^3} + \cdots + \frac{(2n-1)x^{2n-1}}{1+x^{2n-1}}\right) + \left(\frac{2x^2}{1+x^2} + \frac{4x^4}{1+x^2} + \cdots + \frac{2nx^{2n}}{1+x^2}\right) \\ &= -g_n(|x|) + 2f_n(x^2) \end{aligned}$$

donc $r_{2n}(x) = -R_n(|x|) + 2r_n(x^2)$. Or

$$\begin{aligned} R_n(|x|) &\sim -\frac{2n}{1-x^2}|x|^{2n+1} = \frac{2nx^{2n+1}}{1-x^2} \times 1 \\ 2r_n(x^2) &\sim \frac{2n\ x^{2n+2}}{1-x^2} = \frac{2n\ x^{2n+1}}{1-x^2} \times x \end{aligned}$$

et comme $x+1 \neq 0$ on a aussi

$$r_{2n}(x) \sim \frac{2n\ x^{2n+1}}{1-x^2}(1+x) = \frac{2n\ x^{2n+1}}{1-x}.$$

Par ailleurs on a

$$r_{2n-1}(x) = \frac{2n\ x^{2n}}{1+x^{2n}} + r_{2n}(x)$$

or

$$r_{2n}(x) \sim \frac{2n\ x^{2n+1}}{1-x} = 2n\ x^{2n} \times \frac{x}{1-x}$$

et

$$\frac{2n\ x^{2n}}{1+x^{2n}} \sim 2n\ x^{2x} \times 1$$

et comme $\frac{x}{1-x} + 1 \neq 0$ on a aussi

$$r_{2n-1}(x) \sim 2n\ x^{2n}(1 + \frac{x}{1-x}) = \frac{2n\ x^{2n}}{1-x} \sim \frac{(2n-1)x^{2n}}{1-x}.$$

En conclusion, si $|x| < 1$ on a $r_n(x) \sim \frac{nx^{n+1}}{1-x}$.

Pour $g(x)$ (si $-1 < x \leq 0$) on peut écrire :

$$g(x) = -\frac{|x|}{1+|x|} - \frac{3|x|^3}{1+|x|^3} - \cdots$$
$$g_n(x) = -\frac{|x|}{1+|x|} - \cdots - \frac{(2n-1)|x|^{2n-1}}{1+|x|^{2n-1}}$$

et on peut alors écrire

$$-\beta_n(|x|) \leq R_n(x) \leq -\frac{1}{1+|x|^{2n+1}}\beta_n(|x|)$$

donc

$$R_n(x) \sim -\beta_n(|x|) \sim -\frac{2n|x|^{2n+1}}{1-x^2} = \frac{2n\ x^{2n+1}}{1-x^2}.$$

En conclusion, si $|x| < 1$ on a $R_n(x) \sim \frac{2n\ x^{2n+1}}{1-x^2}$

Pour terminer, quelques mots à propos de la conjecture de DUMONT :

Pour démontrer cette conjecture, il suffit de montrer que la fonction $h(x) = (1-x)^2[\frac{f(x)}{x}]$ possède une limite quand $x \to 1-0$ et cette limite est alors égale à $\frac{\pi^2}{12}$ (règle de l'HOSPITAL).

Un tracé sur micro-ordinateur du graphe de cette fonction donne une fonction positive décroissante sur $[0,1[$ ce qui démontrerait la conjecture. Toutefois une tentative de démonstration de la décroissance de $h(x)$ risque de réserver quelques surprises.

Signalons enfin que, en utilisant $f(x) = g(x)$, on montre aisément que l'on a

$$\frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] = f(x^2)$$

et on aurait donc

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{12} \times \frac{1}{(1-x)^2} \text{ quand } x \to 1-0$$

et

$$f(x) \sim -\frac{\pi^2}{24} \times \frac{1}{(1+x)^2} \text{ quand } x \to -1+0.$$

RETOUR SUR LE PROBLÈME 17

Nous avions posé la question de savoir si on pouvait trouver une partition de $\mathbb{N}^*$ en trois parties A_1, A_2, A_3 avec $A_i\{[ka_i]/k \ \in \mathbb{N}^*\}$. Nous avons reçu la réponse négative suivante de A. TROESCH :

Solution (de M. TROESCH) :

Il n'existe pas de partition (A, B, C) de $\mathbb{N}^*$ telle que

$$A = \{[na] | n \in \mathbb{N}^*\}, B = \{[nb] | n \in \mathbb{N}^*\}, C = \{[nc] | n \in \mathbb{N}^*\}$$

où a, b, c sont des nombres réels strictement positifs.

On peut procéder comme dans la démonstration géométrique de M. ADELMANN pour les partitions en deux sous-ensembles :

a) En posant $\alpha = \frac{1}{a}, \beta = \frac{1}{b}, \gamma = \frac{1}{c}$ et $A_k = (k\alpha, k\beta, k\gamma)$ on montre ainsi que

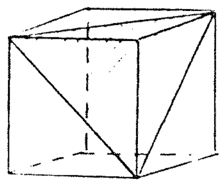
$$\begin{aligned}
k \in A &\iff \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } [A_k, A_{k+1}[\text{ rencontre le plan } X = n\\
k \in B &\iff \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } [A_k, A_{k+1}[\text{ rencontre le plan } Y = n\\
k \in C &\iff \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } [A_k, A_{k+1}[\text{ rencontre le plan } Z = n.
\end{aligned}$$

Il en résulte encore que α (resp. β, resp. γ) est la densité asymptotique de A (resp. B, resp. C) et par conséquent que $\alpha + \beta + \gamma = 1$ si (A, B, C) est une partition de $\mathbb{N}*$. L'ensemble des (α, β, γ) pour lesquels (A, B, C) est une partition est donc un sous-ensemble du triangle T_0 :

$$X + Y + Z = 1, \ X \geq 0, \ Y \geq 0, \ Z \geq 0.$$

b) Considérons le cube fermé $C_{m,n,p}$ de côté 1, dont les faces sont parallèles aux plans de coordonnées et dont le sommet le plus proche de l'origine est (m, n, p). Le plan $X+Y+Z=m+n+p+2$ coupe ce cube selon un triangle $T_{m,n,p}$. Si la droite $t \longmapsto (t\alpha, t\beta, t\gamma)$ rencontre ce triangle alors $[A_1, A_{m+n+p+2}[$ coupe m plans $X=i$, n plans $Y=j$ et p plans $Z=l$, i,j,l étant entiers. Il en résulte que le segment $[A_1, A_{m+n+p+2}]$ est contenu dans une réunion de $m+n+p+1$ cubes $C_{i,j,l}$. Par conséquent il existe $k \in \mathbb{N}^*$ $\quad k \leq m+n+p+2$ tel que A_k et A_{k+1} appartiennent à un même cube et par suite k n'appartient ni à A, ni à B, ni à C.

$(m+1, n, p+1) \qquad (m, n+1, p+1)$



En ramenant par homothétie de centre O les triangles $T_{m,n,p}$ dans le plan $X+Y+Z=0$ on constate que l'ensemble des (α, β, γ) correspondant à une partition de $\mathbb{N}^*$ est le complémentaire dans T_0 de la réunion des ensembles F_k suivants :

$$F_k = \bigcup_{\substack{m\geq 0, n\geq 0, p\geq 0,\\ m+n+p+2=k}} T'_{m,n,p}$$

où $T'_{m,n,p}$ est le triangle ayant pour sommets

$$\frac{1}{m+n+p+2}\begin{pmatrix} m+1 \\ n \\ p+1 \end{pmatrix}, \frac{1}{m+n+p+2}\begin{pmatrix} m \\ n+1 \\ p+1 \end{pmatrix}, \frac{1}{m+n+p+2}\begin{pmatrix} m+1 \\ n+1 \\ p \end{pmatrix}$$

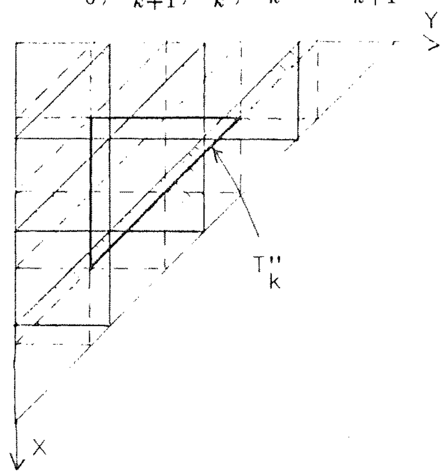
Pour terminer montrons que $\bigcup_{i=2}^{k} F_i$ contient le triangle T''_k de sommets

$$\frac{1}{k+1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k-1 \end{pmatrix}, \frac{1}{k+1}\begin{pmatrix} 1 \\ k-1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{k+1}\begin{pmatrix} k-1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(Ce triangle tend vers T_0 lorsque k tend vers l'infini.) C'est vrai pour $k=2$: dans ce cas le triangle se réduit au centre de gravité du triangle constituant F_2.

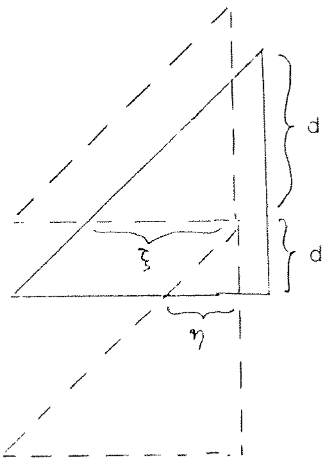
Supposons que c'est vrai pour k et montrons-le pour $k+1$. D'après l'hypothèse de récurrence seuls les triangles de F_{k+1} ayant un sommet sur le bord de T_0 seront utiles (triangles externes). Nous allons montrer que les triangles externes de F_k et F_{k+1} recouvrent $T''_{k+1} - T''_k$.

Considérons $T_0, T''_{k+1}, T''_k, F_k$ et F_{k+1} en projection dans le plan $Z = 0$:



Hachures : F_k $(k = 4)$
Tirets : F_{k+1}

Les sommets de T''_{k+1} sont dans les triangles de F_{k+1} situés dans les coins. Pour les autres triangles, par exemple le long du bord $Y = 0$ les positions relatives des triangles de T''_{k+1} et de T''_k sont les suivantes :



avec $d \geq (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \frac{2}{k(k+1)}$
et $d' \geq \frac{1}{k(k+1)}$.
D'où $\eta = d' \geq \frac{1}{k(k+1)} \geq \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$
et $\xi = d - \frac{1}{k(k+1)} \geq \frac{1}{k(k+1)} \geq \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$.

Le résultat en découle étant donné la symétrie du problème :

$$T''_{k+1} \subset \bigcup_{i=2}^{k+1} F_i.$$

Par conséquent $\bigcup_{k=2}^{\infty} F_k$ contient tous les points intérieurs du triangle T_0. Cet ensemble contient aussi les points rationnels des côtés du triangle ce qui est cohérent avec le résultat concernant les partitions en deux sous-ensembles de $\mathbb{N}^*$.

PROBLÈME 18

Énoncé (proposé par Ph. ARTZNER)

Aux instants 1, 3, 5, ..., 103, on retourne successivement les 52 cartes (26 noires et 26 rouges) d'un jeu préalablement battu. On a le droit de déclarer au plus une fois, à l'un des instants 0, 2, 4, ..., 102 : "*Je parie que la prochaine carte sera rouge*". On gagne si elle l'est effectivement, on perd sinon — ou si l'on n'a choisi aucun instant. Quelle stratégie maximise la probabilité de gain ?

Solution

Nous avons reçu deux solutions, une de l'auteur et une de M. KRIER. Celle que nous présentons ici fait la synthèse des deux : elle emprunte à la première une idée permettant de supprimer tous les calculs et à la seconde un langage dans lequel la présentation est grandement facilitée.

Commençons par quelques définitions. Une **suite** sera un mot (éventuellement vide) formé à l'aide des deux lettres R et N, figurant chacune au plus 26 fois. Une suite est **complète** si elle a 52 lettres (26 lettres R et 26 lettres N). Une **stratégie** S est un ensemble de suites tel que toute suite complète s'obtient en rajoutant des éléments à la fin d'une et une seule suite de S. Jouer la stratégie S consiste à laisser retourner les cartes jusqu'à ce que la suite des cartes apparues figure dans S et à annoncer alors “rouge”. (Si cette suite est complète, on parie après avoir vu la dernière carte, c'est-à-dire que l'on ne parie pas du tout.)

Le résultat est le suivant : **toute stratégie formée de suites non complètes est optimale, et donne une probabilité de gain égale à un demi**. En effet, une telle stratégie S étant fixée, la probabilité de gain est $\sum_{s \in S} p(s)\, g(s)$ où $p(s)$ est la probabilité qu'a le tirage de débuter par s et $g(s)$ la probabilité de gagner en annonçant “rouge” une fois la suite s apparue. Il serait facile d'expliciter $p(s)$ et $g(s)$ (par exemple $g(s) = \frac{26-r(s)}{52-r(s)-n(s)}$), mais il est plus simple de remarquer que $g(s)$ est aussi la probabilité, une fois la suite s apparue, que la **dernière** carte du paquet soit rouge. La somme $\sum_{s \in S} p(s)g(s)$ s'interprète donc aussi comme la probabilité d'avoir une carte rouge en dernière position, et vaut $1/2$.

PROBLÈME 19

Énoncé

Soit C un ensemble convexe borné, fermé du plan. Peut-on construire un parallélogramme P inclus dans C tel que l'aire de P soit supérieure ou égale à la moitié de l'aire de C ?

Indication

On peut toujours choisir le parallélogramme de façon que ses quatre sommets soient sur le bord de C.

PROBLÈME 20

Énoncé

Calculer

$$\sum_{n=0}^{p} (-1)^{p-n} \frac{n^p}{n!(p-n)!}$$

et en déduire $\sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{n!} z^n$.

A VOS STYLOS

PROBLÈME 21

Énoncé (proposé par D. DUMONT)

Soient $2n$ écolières qui partent en promenade quotidienne en rang deux par deux et souhaitent changer de voisine chaque jour. Trouver un algorithme qui fasse en sorte qu'en $2n-1$ jours chacune ait eu pour voisine chacune des autres une fois et une seule. (Ce problème s'apparente au problème dit "des écolières de Kirkmann".)

Congrès "MATh.en.JEANS"

les 11, 12, 13, 14 avril 1992, au Palais de la Découverte

organisé par l'Association "MATh.en.JEANS" et le Palais de la Découverte

Méthode d'apprentissage, "MATh.en.JEANS" met en place un microcosme de recherche mathématique dans les établissements d'enseignement secondaire, en prenant en compte toutes les dimensions des métiers de la recherche.

- les élèves participent, *sans sélection préalable* ;
- ils *cherchent, découvrent, prouvent* et *démontrent, communiquent* ;
- l'activité de recherche, favorisée par l'enseignant, est dirigée par un *mathématicien professionnel.*

Pour la 3ème année d'existence de "MATh.en.JEANS", les lycéen(ne)s et collégien(ne)s, de France et de l'étranger, présenteront leur travail pendant quatre jours : expositions réalisées sur place, dans des stands (sur le modèle des exposciences), courtes "conférences", discussions avec des mathématiciens et le public.

Samedi 11 avril : une Conférence inaugurale présentera l'actualité mathématique de quatre thèmes géométriques ; le conférencier, M. Marcel Berger, Directeur de l'Ecole des Hautes Etudes Scientifiques (IHES) est un brillant popularisateur des mathématiques.

Dimanche 12 avril : afin de donner au public la possibilité de voir les élèves en situation de recherche, une simulation sera effectuée par une dizaine d'élèves ; un sujet de recherche leur sera proposé en début de journée, et un bilan sera tiré en fin de journée. Pendant la journée, le public pourra assister (*en direct-live*) au travail des élèves.

Lundi 13 avril : réservé aux congressistes (le lundi, le Palais est fermé au public).

Mardi 14 avril : les mathématiciens de "MATh.en.JEANS" se joindront aux élèves.

Sujets traités par les "équipes" de recherche :

Des animaux et des maths,
Automates et langage,
Brachistochrone,
Cabri-Géomètre,
Constructions mécaniques,
Empilements de sphères,
Espaces à plusieurs dimensions,
Euler-Poincaré,
Géométrie du pixel,
Hydres,
Infini,
Maths et musique,
Nombres p-adiques,
Polyèdres,
Rigidité structurelle,
Sommes de carrés,
Tablettes babyloniennes, etc.

Pour tout renseignement complémentaire sur le Congrès, pour vous y inscrire, contacter l'AMeJ :
AMeJ / Lycée Racine / 20 rue du Rocher / 75008 Paris ou ☎ AMeJ : (1) 42 00 32 29