MAXIMALISATIONS D'AIRES DE POLYGONES
(suite)

Albert LENTZ

Rappel :

Les polygones envisagés ont des côtés dont les longueurs sont fixées dans l'ordre. Nous nous posons la question suivante : les polygones étant "articulés", comment les déformer pour rendre leur aire maximale s'il y a lieu?

Nous avons établi précédemment que (voir '*L'Ouvert*' n°63)

1. Un quadrilatère articulé a une aire maximale s'il est inscriptible.

2. Un polygone a donc une aire maximalisée si chaque quadrilatère qu'il définit, est inscriptible donc si le polygone est lui-même inscriptible.

3. S'il existe un polygone à n cotés, de longueurs respectives $a_1, a_2, \ldots, a_n$, alors il existe un polygone inscriptible dont les côtés ont même longueur respectivement.

Nous nous sommes posé les questions :

Pour un polygone donné, le procédé de maximalisation fait-il nécessairement **avoir pour limite** un polygone inscriptible? L'aire d'un polygone inscriptible (dont nous avons prouvé l'existence et l'unicité) est-elle le maximum absolu?

L'AIRE DU POLYGONE INSCRIPTIBLE EST L'AIRE MAXIMALE

La difficulté vient du grand nombre de variables : les n angles du polygone, liés essentiellement par la relation de leur somme. Nous ramènerons les polygones quelconques à des polygones dont l'aire dépend d'un seul angle.

Procédons par récurrence :

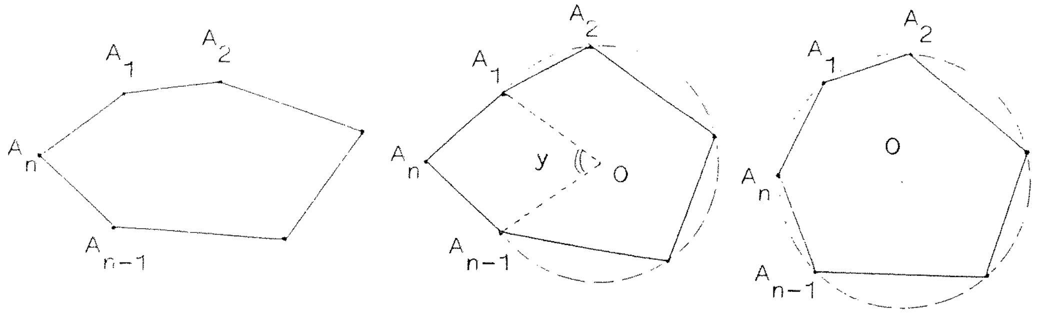
1. Le quadrilatère d'aire maximale est le quadrilatère inscriptible.

2. Supposons que l'aire maximale du polygone articulé ayant $n-1$ côtés, de longueurs respectives $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ est atteinte s'il est inscriptible.

Démontrons qu'il en est de même pour le polygone articulé ayant n côtés de longueurs respectives $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Soit $A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$ ce polygone. Soit x la mesure de l'angle $A_1\widehat{A_n}A_{n-1}$.

Le polygone $A_1A_2 \ldots A_{n-1}$ a des côtés de longueurs respectives $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$ et $a(x)$, où $a(x)$ est la longueur de A_1A_{n-1}. Il peut être rendu inscriptible par hypothèse. Son aire est alors fonction de x uniquement.



Soit $P(x)$ le polygone $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ dans lequel le polygone $A_1A_2 \dots A_{n-1}$ est rendu inscriptible.
Son aire S est donc une fonction de la seule variable x. $S(x)$ représente donc l'aire maximale d'un polygone articulé $A_1A_2 \dots A_n$ dans lequel on a fixé l'angle x.

L'aire $S(x)$ est une fonction continue de x : en effet, si O est le centre du cercle circonscrit au polygone $A_1A_2 \dots A_{n-1}$, la mesure y de l'angle A_1OA_{n-1} est une fonction continue de x car on a :

$$A_1A_{n-1}^2 = A_1A_n^2 + A_{n-1}A_n^2 - 2 \times A_1A_n \times A_{n-1}A_n \cos x$$

et

$$A_1A_{n-1}^2 = A_1O^2 + A_{n-1}O^2 - 2 \times A_1O \times A_{n-1}O \cos y.$$

Mais x varie dans un intervalle **fermé** $[x_1 \ ; \ x_2]$ inclus dans $[0 \ ; \ \pi]$. Donc $S(x)$ a un maximum qui est atteint pour une valeur x_o.

Le polygone ainsi défini est-il inscriptible ? Oui ! Sinon le **quadrilatère** $A_1A_2A_{n-1}A_n$ n'est pas inscriptible, donc il peut être déformé pour l'être. Mais alors x prend une autre valeur x'. Son aire prend une valeur supérieure à la précédente, et $S(x') > S(x_o)$ ce qui est absurde.

Il est donc établi que l'aire du polygone inscriptible est l'aire maximale du polygone articulé.

GÉNÉRALISATIONS : CONTOURS NON POLYGONAUX

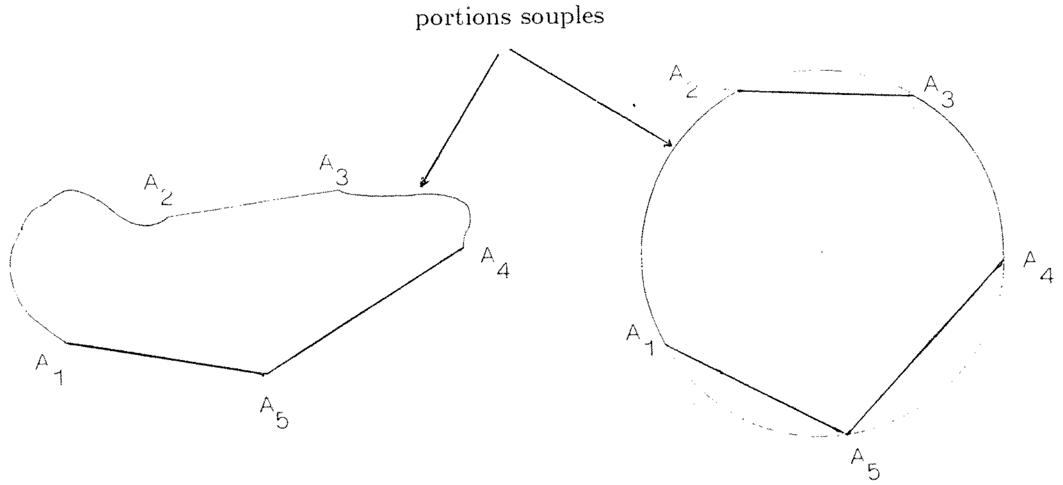
1. Contour souple

Appelons ainsi une ligne fermée, sans recoupement, de **longueur fixée**, mais **déformable**.

Quelle forme faut-il donner à la ligne pour qu'elle soit la frontière de la surface d'aire maximale ?
Il suffit de considérer la ligne comme la limite d'une ligne polygonale de **même longueur**, à n côtés (égaux) où n tend vers l'infini.
La surface d'aire maximale est alors le cercle !

2. Contour mixte "polygonal-souple"

Appelons ainsi une ligne fermée, sans recoupement, de longueur fixée, composée de segments de droite et de portions souples. Le résultat s'impose :



3. Contour articulé rigide non polygonal, etc

La généralisation complète pose des problèmes physiques de comportement aux "angles", à étudier cas par cas.

Appelons "côtés", toute partie rigide articulée et "corde", le segment joignant les extrémités d'un arc.
Si, par exemple, le polygone formé par les arcs ne recoupe pas les arcs, l'aire sera maximale si le polygone des arcs a une aire maximale. En effet chaque arc définit avec sa corde un domaine dont l'aire est constante.

Exemple :