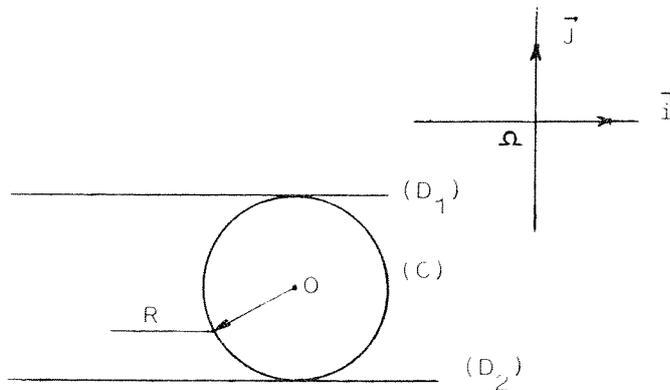


DU DIFFÉRENTIEL AUX ÉQUATIONS LINÉAIRES

Jean-François BONNARD

1.— ADDITIONNEUSE DIFFÉRENTIELLE À CRÉMAILLÈRE ET ENGRENAGE

1) Aspect mathématico-mécanique



Soit un cercle (C) de centre O et de rayon R tangent à deux droites parallèles (D_1) et (D_2) astreintes à conserver une direction fixe, celle du vecteur unitaire \vec{i} . Les droites et le cercle roulent sans glisser les uns sur les autres.

Dans un repère lié à O , toute rotation de (C) d'un angle φ entraîne une translation de $-R\varphi \vec{i}$ pour (D_1) et de $+R\varphi \vec{i}$ pour (D_2) .

Si au contraire on lie le repère à (D_2) , une rotation de (C) d'un angle φ entraîne une translation de O de $-R\varphi \vec{i}$ et une de (D_1) de $-2R\varphi \vec{i}$. Une autre façon de le voir est de dire que dans un tel repère une translation de O de $l \vec{i}$ entraîne une translation de (D_1) de $2l \vec{i}$ (en même temps qu'une rotation de (C) de $\left(\frac{-l}{R}\right)$).

Considérons maintenant un repère fixe $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$. Si (D_2) ne bouge pas une translation de $s_1 \vec{i}$ de (D_1) entraîne une translation de $\frac{s_1}{2} \vec{i}$ de O , puis dans cet état une translation de $s_2 \vec{i}$ de (D_2) , (D_1) restant fixe, entraîne une translation de $\frac{s_2}{2} \vec{i}$ de O . Finalement O se déplace de $\frac{s_1+s_2}{2} \vec{i}$ quand (D_1) et (D_2) se déplacent respectivement de s_1 et s_2 .

Remarque : Les angles dont il est question sont des angles de la mécanique et non des angles de vecteurs définis à 2π près.

2) Application à un mécanisme additionneur

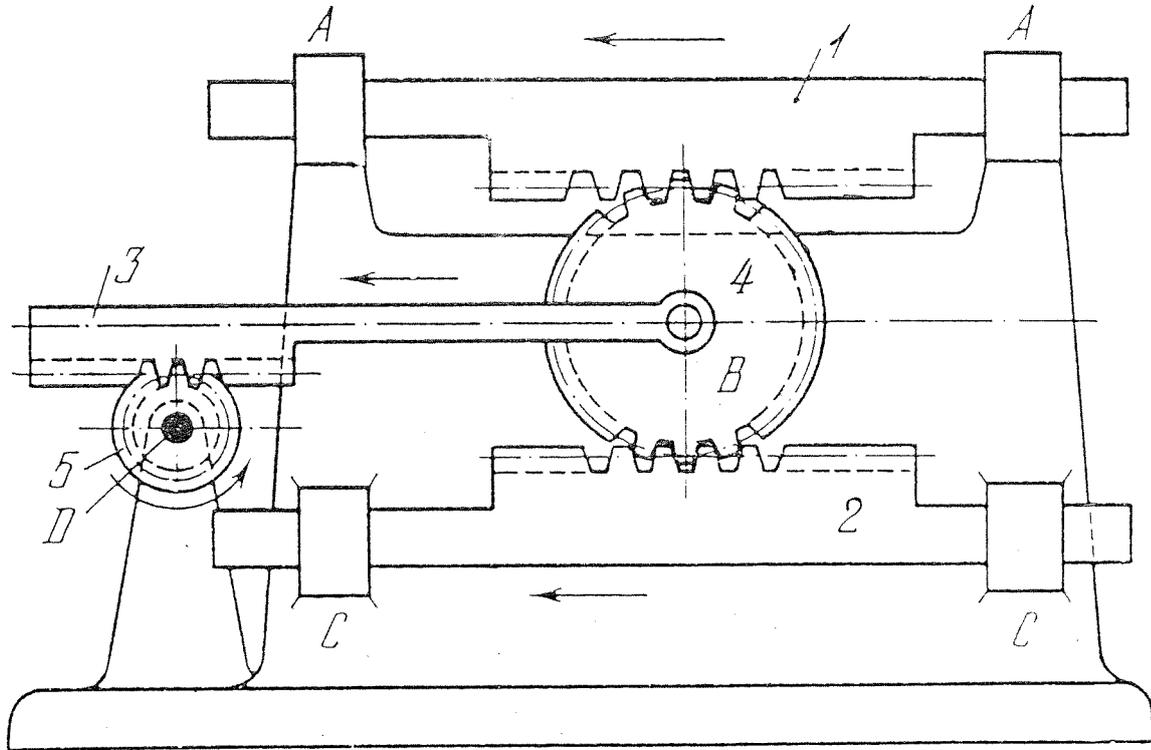


Figure 1 :
Mécanisme différentiel à crémaillère
et engrenage pour sommation
de deux nombres

La crémaillère 1, animée d'un mouvement de translation dans un guidage fixe $A - A$, engrène avec la roue dentée 4 qui, à son tour, engrène avec la crémaillère 2 animée d'un mouvement de translation dans un guidage fixe C . La crémaillère 3 engrène avec la roue dentée 5 tournant autour d'un axe fixe D et constitue un couple de rotation B avec la roue 4. Le premier nombre à additionner est proportionnel au déplacement linéaire s_1 de la crémaillère 1. Le deuxième nombre à additionner est proportionnel au déplacement linéaire s_2 de la crémaillère 2. Le déplacement linéaire s_3 de la crémaillère 3 est proportionnel à la demi-somme des nombres à additionner s_1 et s_2 introduits à l'aide des crémaillères 1 et 2, c'est-à-dire :

$$s_3 = \frac{s_1 + s_2}{2}.$$

Le mécanisme donne la somme des nombres à additionner, en enregistrant l'angle φ_5 de rotation de la roue 5 égal à

$$\varphi_5 = \frac{s_3}{R} = \frac{1}{2R}(s_1 + s_2),$$

où R est le rayon du cercle primitif de la roue 5.

3) Généralisation pour la somme de 3 nombres

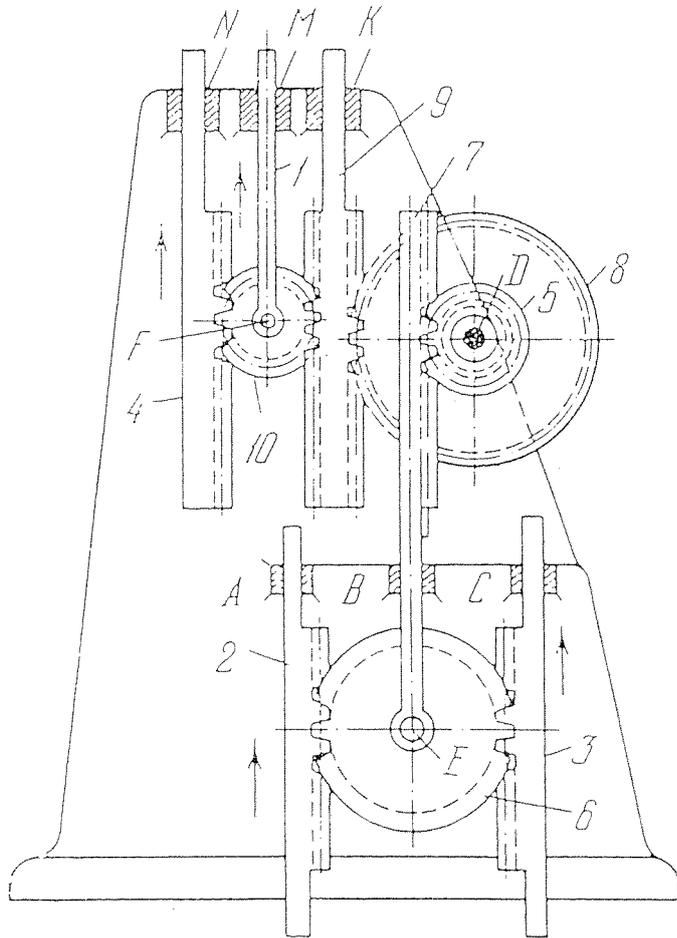


Figure 2 :
Mécanisme différentiel à engrenage
et crémaillère pour sommation
de trois nombres

La crémaillère 2, animée d'un mouvement de translation dans un guidage fixe A, engrène avec la roue dentée 6 qui vient en prise avec la crémaillère 3 se déplaçant d'un mouvement de translation dans un guidage fixe C. La crémaillère 7 engrène avec la roue 5 tournant autour d'un axe fixe D et constitue un couple de rotation E avec la roue 6. La roue dentée 8, solidaire de la roue 5 (*), vient en prise avec la crémaillère à double face 9 animée d'un mouvement de translation dans un guidage fixe K. La crémaillère 9 engrène avec la roue 10 qui engrène, à son tour, avec la crémaillère 4 animée d'un mouvement dans un guidage fixe N. La roue 10 constitue un couple de rotation F avec l'élément 1 animé d'un mouvement de translation dans un guidage fixe M.

Le premier nombre à additionner est proportionnel au déplacement linéaire s_2 de la crémaillère 2. Le deuxième nombre à additionner est proportionnel au déplacement linéaire s_3 de la crémaillère 3. Le troisième nombre à additionner est proportionnel au déplacement linéaire s_4 de la crémaillère 4. Le déplacement linéaire s_1 de la crémaillère 1 est proportionnel à la demi-somme des nombres à additionner s_2 , s_3 et s_4 introduits à l'aide des crémaillères 2, 3 et 4, c'est-à-dire

$$s_7 = \frac{s_2 + s_3}{2} ; s_9 = 2 s_7 ; s_1 = \frac{s_9 + s_4}{2} ; s_1 = \frac{s_2 + s_3 + s_4}{2}.$$

(*) Les nombres de dents z_5 et z_8 des roues 5 et 8 sont liés par le rapport $z_8 = 2z_5$. La somme des nombres à additionner figurera sur une échelle spéciale (non représentée sur la figure) qui enregistre le déplacement de l'élément 1.

2.— LE DIFFÉRENTIEL SPHÉRIQUE

1) Principe

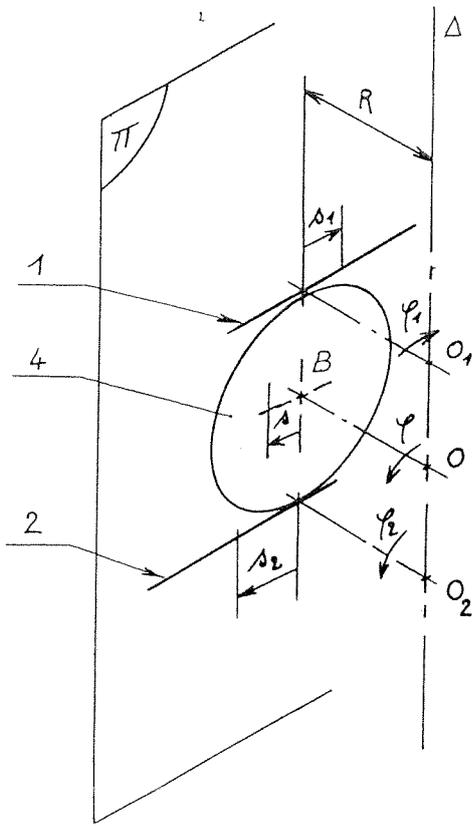


Figure 3

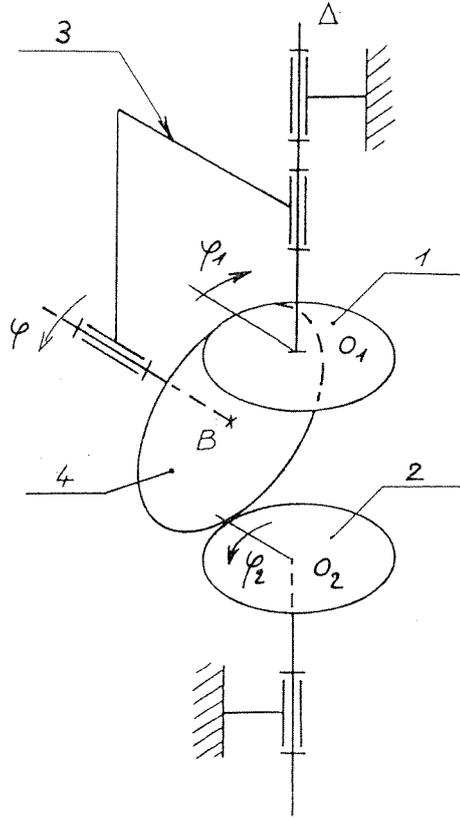


Figure 4

Sur les figures ci-dessus, à tout déplacement rectiligne s_1, s, s_2 on peut faire correspondre une rotation proportionnelle, respectivement $\varphi_1, \varphi, \varphi_2$ autour d'un axe (Δ) situé à la distance R du plan (π).

$$s_1 = R \varphi_1 ; s = R \varphi ; s_2 = R \varphi_2.$$

Les roues 1 et 2 d'axe de rotation Δ roulent sans glisser sur le planétaire 4. L'axe OB de ce planétaire tourne de l'angle φ autour de Δ . La pièce 3, appelée porte satellite tourne également de l'angle φ autour de Δ par rapport au bâti. (Remarque : 4 reste libre en rotation autour de son axe par rapport à 3.) Voir figure 4.

$$s = \frac{s_1 + s_2}{2} \implies \varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

2) Représentation schématique

La figure 5 représente schématiquement l'architecture d'un différentiel d'automobile. L'axe (Δ) autour duquel tournent les solides 1, 2, 3 est horizontal. Il comporte

2 satellites (repère 4) ce qui ne change rien au principe cinématique mais permet d'équilibrer les efforts.

N_i désignant le taux de rotation du solide i autour de (Δ) par rapport au bâti (non représenté),

$$N_1 + N_2 = 2 N_3.$$

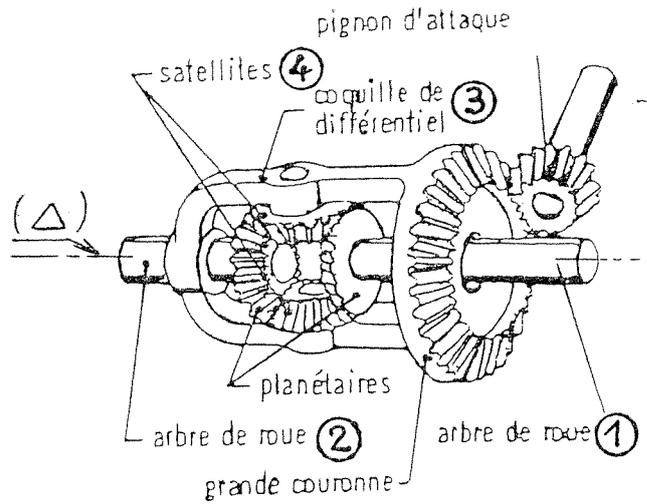


Figure 5
Différentiel

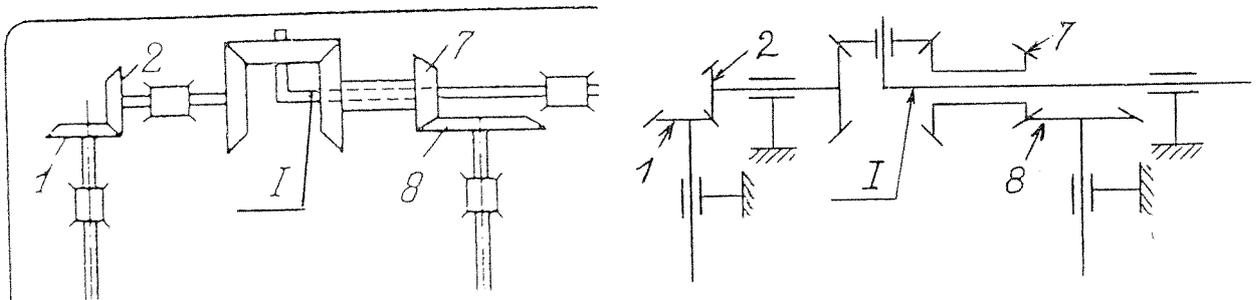


Figure 6

Figure 7

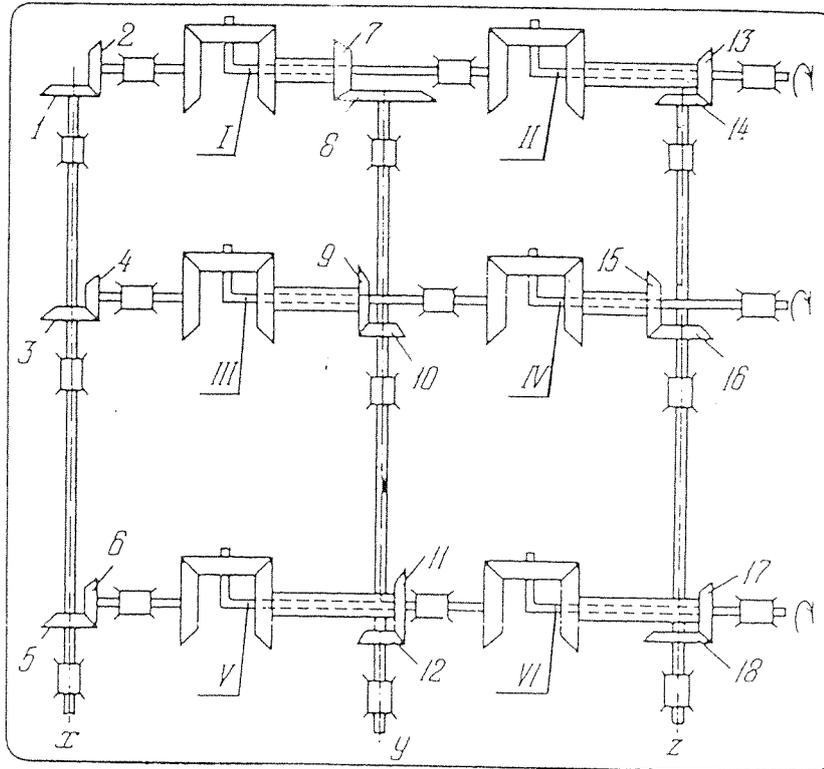


Figure 8

Mécanisme denté destiné à résoudre
un système
d'équations algébriques linéaires

3.— MÉCANISME DENTÉ POUR LA RÉOLUTION D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

1) Explication de la figure 8 :

Le système comporte six différentiels sphériques. Par rapport à ce qui précède, la "coquille de différentiel" ou porte satellites (notée I pour l'arbre supérieur) au lieu d'envelopper les arbres des planétaires, passe à l'intérieur de l'un d'entre eux.

La comparaison du schéma original partiel en vue extérieure (fig. 6) avec le schéma cinématique en coupe (fig. 7) précise les possibilités de rotation des différents solides.

2) Fonctionnement

a) Principe :

Étant donnée une position de repos quelconque du mécanisme :

Si les arbres d'entrée horizontaux II, IV et VI tournent respectivement des quantités $\frac{c_1}{4}$, $\frac{c_2}{4}$, $\frac{c_3}{4}$, alors les arbres verticaux tournent respectivement des quantités x , y , z .

b) Vérification :

- Notations et relations de base :

Notons φ_i la rotation angulaire de l'arbre i . Les rapports de réduction $i_{7,8} - i_{9,10} - i_{11,12}$ sont, par construction, respectivement égaux à a_1, a_2, a_3 ; on a donc les relations :

$$\frac{\varphi_7}{\varphi_8} = a_1 ; \frac{\varphi_9}{\varphi_{10}} = a_2 ; \frac{\varphi_{11}}{\varphi_{12}} = a_3 \quad (1).$$

De même, les rapports de réduction $i_{13,14} - i_{15,16} - i_{17,18}$ sont choisis respectivement égaux à $0,5b_1 ; 0,5b_2 ; 0,5b_3$. (Le signe des rapports dépend de la position des deux engrenages.)

D'où les relations :

$$\frac{\varphi_{13}}{\varphi_{14}} = 0,5b_1 ; \frac{\varphi_{15}}{\varphi_{16}} = 0,5b_2 ; \frac{\varphi_{17}}{\varphi_{18}} = 0,5b_3 \quad (2)$$

Par ailleurs pour chaque différentiel on a une relation du type (cf. fig. 7)

$$\varphi_2 + \varphi_7 = 2\varphi_I.$$

- Synthèse :

Pour l'arbre horizontal supérieur, de gauche à droite, on déduit des relations précédentes :

$$(3) \quad \varphi_2 + \varphi_7 = 2\varphi_I \text{ et } \varphi_I + \varphi_{13} = 2\varphi_{II} = 2\left(\frac{c_1}{4}\right)$$

d'où

$$\varphi_2 + \varphi_7 = 2\left(\frac{c_1}{2} - \varphi_{13}\right)$$

avec :

$$(1) \quad \varphi_7 = a_1\varphi_8$$

soit

$$\varphi_2 + a_1\varphi_8 + 2\varphi_{13} = c_1$$

avec

$$(2) \quad \varphi_{13} = \left(\frac{b_1}{2}\right)\varphi_{14}.$$

D'où finalement

$$\varphi_2 + a_1\varphi_8 + b_1\varphi_{14} = c_1$$

un raisonnement analogue conduit à :

$$\begin{aligned} \varphi_4 + a_2\varphi_{10} + b_2\varphi_{16} &= c_2 \\ \varphi_6 + a_3\varphi_{12} + b_3\varphi_{18} &= c_3. \end{aligned}$$

DU DIFFÉRENTIEL AUX ÉQUATIONS LINÉAIRES

Comme d'autre part les rapports de réduction $i_{1,2}$, $i_{3,4}$ et $i_{5,6}$ valent 1 et que les engrenages 1, 3, 5 sont solidaires de l'axe x , les engrenages 8, 10, 12 de l'axe y et 14, 16, 18 de l'axe z , les trois équations précédentes s'écrivent aussi :

$$\begin{aligned}x + a_1y + b_1z &= c_1 \\x + a_2y + b_2z &= c_2 \\x + a_3y + b_3z &= c_3.\end{aligned}$$

Références :

Figures 1 - 2 - 8 :

Les mécanismes de la technique moderne, Tome 3, par I. ARTOBOLEVSKI aux éditions de Moscou (MIR).

Figure 5 :

Dictionnaire encyclopédique LAROUSSE.

GAGNEZ UN ABONNEMENT GRATUIT POUR UN TIERS

Les mesures anglo-saxonnes réservent bien des surprises. Il est assez naturel de mesurer la grosseur des aiguilles à tricoter par leur diamètre en millimètres. On pourrait penser que les anglais utiliseraient des huitièmes de pouce, à la rigueur; mais non!

L'appareil ci-dessous permet la conversion des mesures millimétriques en mesures anglaises et vice-versa, en introduisant et en coinçant l'aiguille dans la fente oblongue. Chaque type de mesure est donné sur l'une des deux faces de l'instrument.

Trouvez une formule mathématique simple permettant de passer d'une des mesures à l'autre.

