PLAIDOYER POUR UNE DIDACTIQUE EXPÉRIMENTALE DES MATHÉMATIQUES

Georges GLAESER

Nous publions ici le texte d'une conférence prononcée par G. GLAESER en 1990 à l'université du 3[e] âge de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg.

C'est en 1971 que je me suis lancé dans l'aventure que je vais relater. Pour différentes raisons, j'ai été conduit à accepter le poste de directeur de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques. Je n'ai accepté ce poste qu'à la condition qu'il s'agisse réellement de **Recherches** sur l'enseignement des mathématiques car depuis très longtemps j'avais un certain nombre de doutes sur la justesse des idées que des journalistes et d'autres personnes encore moins compétentes proféraient sur la façon d'enseigner les mathématiques. Comment se forme et se construit chez l'enfant ou chez l'adulte la compréhension des mathématiques? Voilà l'énigme qui m'a toujours intrigué au cours de ma vie et que je voulais aborder autrement que par du bavardage et des opinions toutes faites. En matière de sciences, **j'ai horreur des opinions**. Que des gens disent : "*Je crois que...*" et cela ne m'intéresse plus; par contre, s'ils ont des raisons de penser ainsi ou des preuves ou des arguments à avancer, alors je suis prêt à écouter. Quand Madame Rika ZARAÏ nous dit qu'elle a une opinion sur la manière de traiter le sida, je m'en fiche!

Ce n'est pas par hasard que je cite cet exemple, parce que je veux, pour introduire mon sujet, faire un rapide parallèle entre la médecine et la didactique, entre la santé et l'enseignement.

Il y a 200 ans, la médecine n'était qu'un énorme corpus de "connaissances" écrit en latin, bien sûr, et les personnes qui réfléchissaient réellement sur les différentes questions se rendaient compte qu'il y avait des choses justes et des choses fausses. Mais on n'avait pas les moyens de faire vraiment le tri. Cet état de fait a duré jusqu'à la **Révolution Pastorienne**. Alors seulement on a commencé à savoir avec des preuves expérimentales qu'elles étaient les causes de certaines maladies; on a découvert les microbes, ... Tout cela a donné un coup de fouet au progrès médical. Et si nous sommes loin aujourd'hui d'avoir résolu tous les problèmes médicaux, il faut reconnaître que la Révolution Pastorienne a accompli un bond considérable.

Depuis très longtemps, des gens étudient et enseignent les mathématiques. Il est certain que quand un professeur intervient auprès d'un élève, c'est toujours pour l'aider à comprendre; mais parfois il commet **des maladresses qui empêchent l'élève de comprendre**. Cela est malheureusement fréquent (de même qu'il est fréquent qu'en médecine il y ait des médicaments *contre-indiqués*). Mais il arrive encore plus souvent que lorsque le professeur explique, l'élève *croit comprendre* alors qu'il ne comprend pas réellement. Les connaissances se perdent dans un brouillard et le bilan final s'avère globalement négatif.

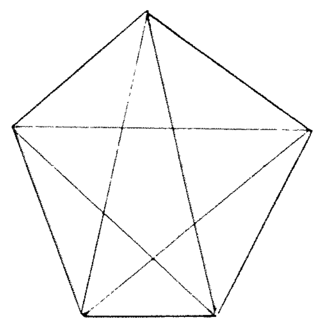
Nous en étions là en 1971. Malgré les travaux de l'école de Genève, nous en avions assez des opinions de personnes souvent incompétentes (ou compétentes dans d'autres secteurs que l'enseignement des mathématiques ou que les mathématiques elles-mêmes). Nous avons alors entreprit un travail de pionniers. Nous avons cherché à poser des questions intéressantes et à y répondre non par des opinions, mais par des preuves capables de trancher les débats.

Nous avons été les premiers surpris des résultats obtenus. Il y a d'abord les questions de **difficulté** et de **facilité** : il y a des points enseignés qu'élèves et professeurs estiment faciles. Sur d'autres points, ils disent : "C'est difficile", mais personne ne sait pourquoi.

On peut demander à des instituteurs qui enseignent depuis de nombreuses années une certaine question à des élèves de même âge, dans les mêmes conditions, si telle notion passe bien ou non. Mais même dans ce cas, le résultat n'est pas fiable. Il est donc nécessaire de s'interroger sur ce qu'est et ce qui fait la difficulté ou la facilité d'une question et comment on peut être sûr du résultat obtenu.

La deuxième question porte sur le "**je sais faire**". Vous interrogez un élève qui vous annonce : "*Ça y est, je sais le faire*". On pourrait croire que sur la question, son apprentissage est terminé. A-t-il raison ou non? A ce sujet je vais vous donner un exemple d'une expérience faite à l'I.R.E.M. auprès d'un groupe de parents d'élèves qui a suivi pendant une année, un cours hebdomadaire sur les *mathématiques dites modernes*. Ces parents se sont plaints de ce que leurs enfants ne savaient plus calculer alors qu'*eux avaient appris et savaient*! À l'I.R.E.M. nous avons donc organisé une petite séance où nous avons donné vingt minutes pour compter un nombre d'objets inférieur à cent. Il s'agissait de compter le nombre de triangles de la figure ci-dessous. Sur la quarantaine de parents présents, personne n'a trouvé et les résultats étaient très dispersés.

Dénombrer des objets n'est pas toujours facile! Il ne faut pas compter deux fois le même et il ne faut pas en oublier. Sur cet exemple un mathématicien "voit" que le résultat est un nombre divisible par 5. Or, de nombreuses réponses ne satisfaisaient pas à ce critère!



Très souvent, quand on demande à un professeur si les élèves *savent* telle notion, la réponse est du type : "*Oui, je le leur ai appris*". Mais comment savoir si un apprentissage est achevé, si un acquis est stable, c'est-à-dire si dix ans après il en restera quelque chose? On sait bien que sur la masse des connaissances que tout un chacun a appris, certaines notions sont entrées par une oreille et sorties par l'autre.

Proposez à un enseignant de soumettre tel exercice à ses élèves et demandez lui d'estimer, *a priori*, la durée de la résolution chez ces élèves. En dehors des problèmes que les enseignants ont déjà donné, ils ne sauront pas répondre ou répondront au hasard. Tout simplement parce que l'endroit où se trouve **la difficulté n'est pas le même pour l'élève et pour le professeur**.

Ce que plusieurs années de recherches nous ont appris, c'est que **les apprentissages sont extrêmement longs** (en tout d'ailleurs et pas seulement en mathématiques). Un apprentissage dure en général vingt ans. On passe un bac sur une question, avec une excellente note, sans avoir compris le fond de la question. Tout le monde n'a que des connaissances partielles plus ou moins approfondies. Je me suis livré personnellement à une introspection pour me rendre compte que j'avais commencé à comprendre la notion de racine carrée vers sept ans en lisant Jules VERNE et que je n'avais pas tout à fait fini de la maîtriser vers trente-cinq ans. Il est vrai qu'il y a beaucoup de choses que j'ai apprises en les enseignant, ce qui est le cas général.

Il y a un autre phénomène que nous avons découvert et qui est contraire à toutes les intuitions : c'est le phénomène de l'**incubation**. Par exemple, à la fin de l'école primaire on apprend à faire des multiplications. On en fait encore des révisions en 6^e. Puis en 5^e, en 4^e, en 3^e on ne fait plus d'apprentissage systématique de la multiplication; les élèves en font au hasard de leurs besoins en mathématiques ou ailleurs. Or, on a remarqué que, si sur un test en 6^e la réussite à la multiplication est ridiculement faible, sur ce même test en 3^e la réussite est pratiquement totale! Cette expérience met en évidence le rôle du temps nécessaire à la digestion des notions enseignées.

Je voudrais maintenant vous présenter quelques aspects du genre de recherches que nous effectuons à l'I.R.E.M.. Bien que nos travaux aient concernés et concernent l'enseignement des mathématiques du primaire au supérieur, pour me faire bien comprendre de l'assistance d'aujourd'hui, je vais parler d'un ensemble de travaux de recherches qui portent sur un sujet que l'on enseigne au tout début de l'école élémentaire et qui semble ridiculement facile à un adulte éduqué. Il s'agit de ce qu'on appelle les *problèmes additifs*. Un problème additif est bâti sur le modèle suivant : il y a deux données (des entiers de un ou deux chiffres) et la solution s'obtient soit en les additionnant, soit en les soustrayant. Par exemple : "J'avais tant de billes, j'en gagne tant, combien en ai-je?...". On pourrait croire que ce genre de problème est de résolution immédiate. Eh bien, l'analyse qui en a été faite initialement par une équipe de chercheurs parisiens sous la direction de G. VERGNAUD et qui a été reprise par bien d'autres équipes, a apporté des résultats tout à fait inattendus et on est loin d'avoir résolu toutes les difficultés afférentes à ce type de problème.

Voici quelques uns des exercices proposés :

1.– **Isabelle** a des billes dans sa main gauche et dans sa main droite.
En tout, elle a 13 billes dans ses mains.
Dans sa main gauche, elle a 2 billes.
Combien de billes a-t-elle dans sa main droite?

2.– **Denis** joue une partie de billes.
Avant la partie il avait 5 billes.
Durant la partie il perd 2 billes.
Combien de billes a-t-il après la partie?

3.– **Dominique** joue une partie de billes.
Après la partie il a 14 billes.
Durant la partie il a gagné 3 billes.
Combien de billes avait-il avant la partie?

4.– **Florence** a des billes dans sa main gauche et dans sa main droite.
Dans sa main gauche, elle a 1 bille.
En tout, elle a 3 billes dans ses mains.
Combien de billes a-t-elle dans sa main droite?

5.– **Serge** joue une partie de billes.
Durant la partie il perd 11 billes.
Avant la partie il avait 13 billes.
Combien de billes a-t-il après la partie?

6.– **Bruno** joue deux parties de billes.
Il joue une première partie puis une deuxième.
A la deuxième partie, il perd 7 billes.
Après ces deux parties, il a gagné en tout 3 billes.
— Que s'est-il passé à la première partie?

7.– **Christophe** joue une partie de billes.
Au cours de la partie il gagne 12 billes.
Après la partie il a 15 billes.
— Combien avait-il de billes au début de la partie?

Ce dernier exercice est considéré comme difficile, mais le plus difficile qui n'est pas résolu par des élèves de troisième, est le n° 6. A titre d'anecdote, au cours d'un repas auquel assistaient des collègues agrégés d'allemand, on m'a demandé la nature de mes travaux; je les ai expliqués en donnant cet exercice qu'ils n'ont pas su résoudre, mais c'était à la fin d'un repas bien arrosé!

Ces problèmes ont pourtant l'air d'être tous bâtis sur le même modèle. Je vais donc maintenant tâcher d'expliquer ce qui rend leur difficulté très variable.

Les différents nombres qui interviennent correspondent soit à des états (E), soit à des transformations (T). Il y a des problèmes du type $E_i.T.E_f$, un *état initial* suivi d'une *transformation* ("il gagne ou il perd") suivi d'un état final. Les questions du premier type qui demandent E_f connaissant E_i et T sont les plus faciles et sont résolues dès 7 ans. Les difficultés augmentent si on donne E_f et T et qu'on demande E_i. (Au bout d'un ou deux ans, on n'observe plus de différences de difficultés.)

Il y a maintenant des problèmes du type $.E.E.E.$. Par exemple : "*Dans mes deux mains j'ai dix billes, j'en ai trois dans la main droite, combien en ai-je dans la main gauche?*". Enfin, il y a des problèmes du type $.T.T.T.$, par exemple : "J'ai des billes, à la première partie j'en ai gagné 5, à la deuxième partie j'en ai perdu 3, combien en ai-je gagné en tout?" Ce dernier problème est très difficile et arrête les enfants car ils disent : "Je ne peux pas faire, je ne sais pas combien il y en avait au début (!)". Les enfants ont beaucoup de mal à imaginer la situation car ce ne sont pas des billes qu'ils ajoutent ou retranchent mais des transformations (des gains ou des pertes) de billes.

On pourrait d'ailleurs compliquer à loisir ce type de problème en inventant quelque chose du genre $.T.T(T).T$, où $T(T)$ est une transformation de transformation, du style : "A la deuxième partie, il a gagné 3 billes de plus qu'à la première ..." Ces problèmes très concrets sont cependant d'un niveau d'abstraction que seuls quelques rares élèves peuvent atteindre en collège. On comprend alors la nécessité d'être bien au fait de ce type de résultats pour pouvoir proposer des exercices gradués aux élèves.

Je voudrais maintenant vous présenter l'une des premières thèses qui fit date car ses conclusions infirmaient radicalement les opinions courantes. Elle fut soutenue par Jean-Paul FISCHER en 1979. Dans sa thèse, il s'adresse à des enfants qui entrent en CE 1 et qui n'ont jamais étudié la soustraction en classe. Il fabrique pour eux trois types de problèmes; dans deux des cas il s'agit du type $E_i.T.E_f$ et il faut trouver soit E_f (le problème est alors noté $E.T.E_f$), soit E_i (et on le note $E.T.E_i$); dans le troisième cas il s'agit du type $E.E.E$.

Pour la passation de ces tests, il y avait 128 élèves qu'on a interrogés individuellement en deux séances et auxquels on lisait l'énoncé aussi souvent que nécessaire. L'élève disposait de matériel, billes, cartons ... pour répondre. L'expérimentateur prenait d'autres précautions pour que chacun des élèves soit dans les mêmes conditions de passation et le plus à l'aise possible ... 18 problèmes ont été posés à chacun en croisant selon les groupes l'ordre des problèmes. Cela a nécessité deux après-midi en début d'année.

Une partie des résultats est présenté sur le tableau page 12. Une case noire représente une réussite à l'exercice. Chaque ligne représente un élève et les élèves ont été classés d'après le nombre total de réussites. La réponse juste est toujours la différence des deux nombres indiqués au haut du tableau et on remarque que chaque exercice apparaît toujours sous deux formes suivant l'ordre dans lequel sont introduites les données.

Dans la partie inférieure du tableau, une cinquantaine d'élèves qui n'ont obtenu aucune réussite. Dans la partie supérieure, une structure triangulaire met en évidence la difficulté croissante des exercices de type $E.T.E_f$, $E.E.E.$, $E.T.E_i$, et à l'intérieur de chacun de ces types, l'augmentation des difficultés avec la taille des nombres qui interviennent.

Bien sûr, il peut y avoir des réussites *usurpées* (l'élève répond juste par hasard), mais cela n'enlève rien à l'existence d'une hiérarchie très nette : tout élève qui réussit un exercice où on recherche l'état initial, réussit au moins un exercice de chacun des deux autres types, et tout élève qui réussit un exercice où il n'y a pas de transformation réussit un exercice où l'on recherche l'état final.

L'expérience n'est cependant pas finie. Six mois après, *les élèves ont étudié en classe la soustraction* et c'est pourquoi FISCHER reprend la même expérience (des problèmes analogues et certains identiques). On constate alors un progrès général; certains élèves font des sans-fautes et l'on peut observer que l'acquisition de la résolution se fait dans l'ordre $E.T.E_f \rightarrow E.E.E \rightarrow E.T.E.$

Ce fut la première expérience où des esprits critiques parmi les plus sceptiques a priori reconnurent que FISCHER avait administré **une preuve**. C'était aussi la première fois où l'on faisait une expérience **diachronique** : la hiérarchie mise en évidence est non seulement une **hiérarchie de difficultés** mais aussi une **hiérarchie temporelle**, qui marque l'ordre où s'obtient le progrès.

A partir de cette expérience on a pu annoncer aux instituteurs qu'ils pourraient évaluer leurs élèves sur des bases très précises. Certes c'est un point très particulier, mais néanmoins important car reposant enfin sur une véritable **démonstration pédagogique**.

Depuis, bien d'autres travaux ont été menés à différents niveaux, *sur la proportionnalité* au collège par exemple, et on s'est rendu compte de l'extrême richesse des difficultés. Il y a des problèmes qui ne semblent différer que par un infime détail et pour lesquels on observe de très grandes différences de performance.

La place intermédiaire des exercices EEE est tout à fait imprévue. La plupart des instituteurs interrogés a priori sur le pronostic de l'expérience se sont trompés là dessus.

En conclusion, j'observe avec tristesse les réformes de l'enseignement qui se succèdent, en aboutissant régulièrement à des échecs.

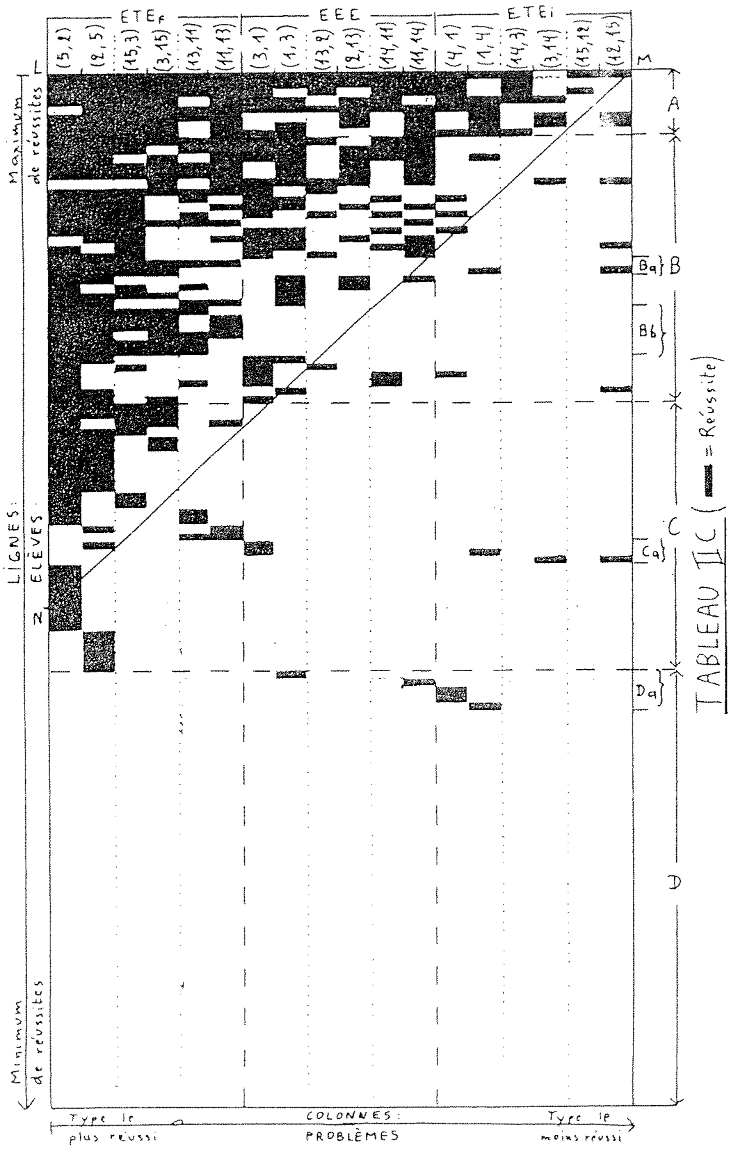
Tel fut aussi le sort de la santé publique, lorsque

"*la médecine consistait à introduire des drogues qu'on connaissait mal,
dans des corps qu'on connaissait plus mal encore*"

(comme l'écrivait plaisamment VOLTAIRE).

Le progrès pédagogique ne peut résulter que de **l'élimination des opinions gratuites**, réfutées par des expériences conformes aux exigences pastoriennes, et de la découverte des **phénomènes qui accompagnent la compréhension** de ce que l'on veut enseigner.

En septembre avant tout enseignement de la soustraction

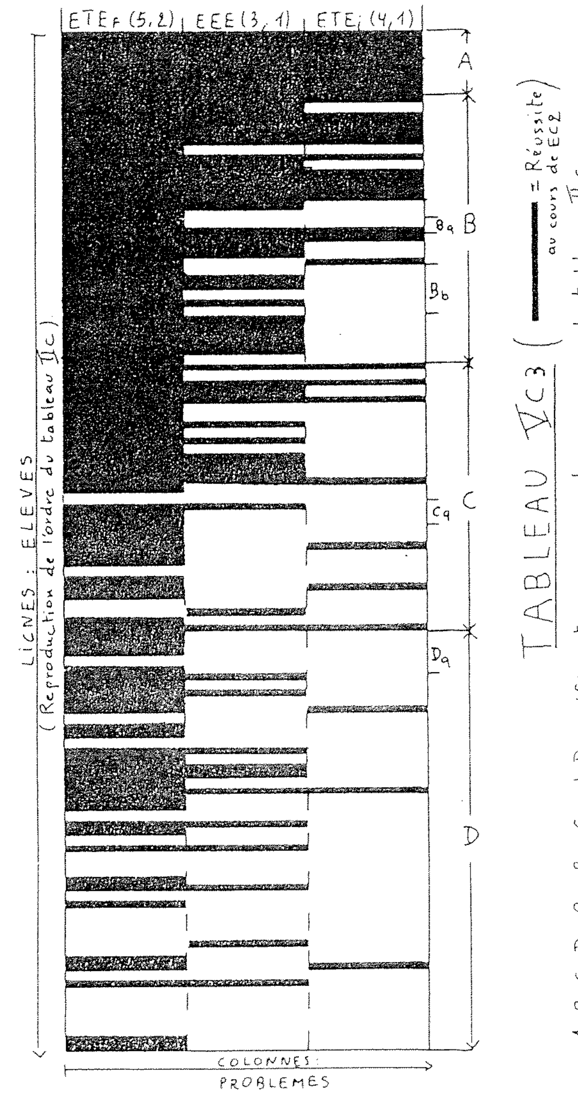


Les élèves correspondent aux lignes. Ils sont classés par ordre de réussite décroissante. Près de la moitié de l'effectif n'a répondu correctement à aucune question.

En tête, les élèves A, qui ont obtenu des succès aux trois types d'items. Puis les élèves B qui échouent aux questions ETE_i.

Les élèves C enregistrent quelques rares réussites, aux ETE_f.

Six mois après



Les élèves sont classés ici selon l'ordre du tableau précédent. Tous les élèves A et quelques autres, réalisent des "sans fautes".

Ce n'est le cas d'aucun élève D.

L'effectif de ceux qui sont en échec complet est passé de 40 % à 20 %.

Le progrès s'effectue dans l'ordre

$$ETE_f \rightarrow EEE \rightarrow ETE_i.$$