TOPOLOGIE DES NŒUDS (*)

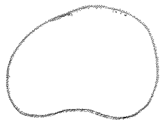
Vladimir TOURAEV

I.— INTRODUCTION

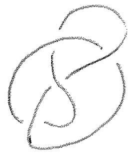
La notion de nœud apparaît à la fin du 19[e] siècle sous la forme de dessins.

Exemples :

nœud de trèfle



nœud trivial



nœud de huit

Du point de vue topologique, chaque nœud est un cercle dans $\mathbb{R}^3$. Deux ou plusieurs cercles disjoints constituent un entrelacs.

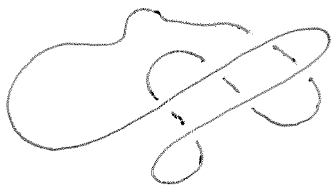
Exemples :

entrelacs de Hopf

entrelacs trivial

Définition : on appelle isotopie d'un nœud dans $\mathbb{R}^3$ toute déformation du nœud, sans "intersection" supplémentaire; on dit qu'un nœud est un objet flexible, c'est-à-dire défini à une isotopie près.

Exemple : autre représentation du nœud trivial :

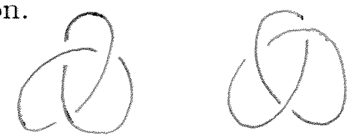


II.— ETUDE DESCRIPTIVE DES NŒUDS

1. Réflexion par rapport à un plan

L'image d'un nœud dans une réflexion par rapport à un plan est un nœud; selon les cas les deux nœuds sont isotopes ou non.

Exemple 1 : le nœud de trèfle



on constate que les deux nœuds ne sont pas isotopes

(*) Conférence IREM de Strasbourg - Régionale APMEP d'Alsace prononcée le 18/12/91, d'après les notes de H. SILVESTRE.

Exemple 2 : le nœud trivial, son image est un nœud isotope

Exemple 3 : le nœud de huit, son image est un nœud isotope

Suite d'isotopies d'un nœud de huit aboutissant à son image par une réflexion par rapport à un plan.

2. Orientation d'un nœud

Orienter un nœud c'est distinguer l'un des deux sens de parcours possibles sur le nœud. Pour un nœud donné, les deux orientations peuvent conduire à des nœuds isotopes ou non.

Par exemple, le nœud de trèfle et le nœud de huit conduisent par renversement de l'orientation à des nœuds isotopes. Pour obtenir des nœuds non isotopes il faut qu'ils aient au moins huit intersections apparentes.

(1) Δ (2)

(Rotation d'axe Δ)

Dans la symétrie axiale d'axe Δ le nœud de trèfle orienté n° 1 a pour transformé le nœud de trèfle orienté n° 2, visiblement isotope au n° 1 orienté en sens contraire.

3. Coefficient d'enlacement (ou coefficient de Gauss)

Pour un entrelacs dont les deux composantes sont ordonnées et orientées, on définit le coefficient de Gauss à partir des points d'intersection apparents pour lesquels la composante n° 1 est au-dessus de la composante n° 2; il y a deux cas de figure (a) et (b), on leur fait correspondre respectivement les nombres +1 et -1. La somme de tous ces nombres ainsi obtenus est le coefficient d'enlacement.

figure a :

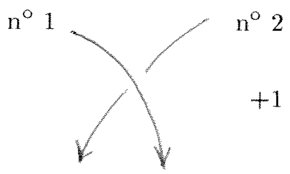
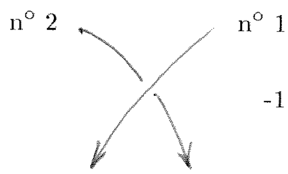


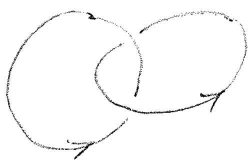
figure b :



Exemples :

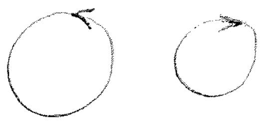
entrelacs de Hopf

n° 1



n°2

entrelacs trivial



coefficient -1

coefficient 0

4. Propriétés du coefficient d'enlacement

a. le coefficient d'enlacement est invariant par isotopie.
Conséquence : l'entrelacs de Hopf et l'entrelacs trivial ne sont pas isotopes.

b. On note $lk\ (L_1, L_2)$ le coefficient d'enlacement des deux composantes ordonnées et orientées L_1 et L_2 ; on a :

$$lk(L_1, -L_2) = -lk(L_1, L_2)$$
$$lk(-L_1, L_2) = -lk(L_1, L_2)$$
$$lk(L_2, L_1) = lk(L_1, L_2)$$

[L_2 et $-L_2$ désignent la composante n° 2 orientée avec les deux orientations possibles.]

III.— DIAGRAMMES

1. Définition : pour étudier la théorie des nœuds on les identifie à leurs diagrammes ; il s'agit d'une représentation **plane** formée d'intervalles consécutifs formant une ligne brisée fermée, chaque point d'intersection apparent correspondant à une cassure de l'un des intervalles (l'intervalle est coupé en deux quand il passe en dessous).

diagramme d'un nœud trivial

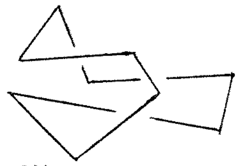
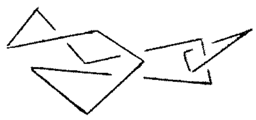
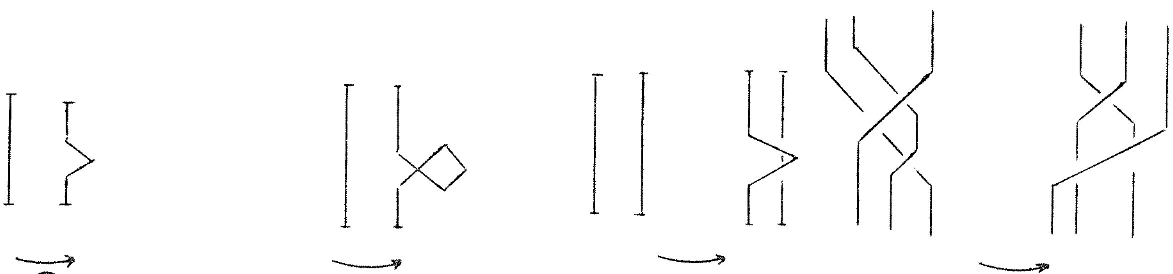


diagramme d'entrelacs



2. Retour sur l'isotopie et les entrelacs

On considère les quatre transformations de base décrites par leurs diagrammes :



① ② ③ ④

Par définition deux diagrammes sont isotopes si on peut passer de l'un à l'autre à l'aide d'une suite (finie) de ces transformations ou de leurs inverses.

Un entrelacs est un diagramme considéré à une isotope près. Il est facile de vérifier que le coefficient de Gauss est un invariant dans les transformations 3 et 4 , par suite c'est un invariant par isotopie.

IV.— POLYNÔME BRACKET ET POLYNÔME DE JONES

1. Polynôme bracket

a. Définition : à chaque diagramme $\mathcal{D}$ on associe un polynôme à coefficients entiers, aux indéterminées A, A^{-1} ; on l'appelle le polynôme bracket de $\mathcal{D}$ et on le note $< \mathcal{D} >$.
Par exemple : $< \mathcal{D} > = A^{-5} + A^{-3} - 2 + A^{10}$.

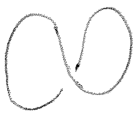
b. Calcul : pour déterminer $< \mathcal{D} >$ on utilise les trois propriétés

P_1 : $< O >=1$;
P_2 : $< \mathcal{D} \perp O >=< \mathcal{D} > \times(-A^2 - A^{-2})$;
[$\mathcal{D} \perp O$ désigne le diagramme $\mathcal{D}$ auquel on a ajouté un cercle]

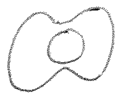
P_3 : $< \quad >= A < \quad > +A^{-1} < \quad >$
[autrement dit on "rectifie" les points d'intersection apparents par et par].

c. Exemple : calcul du polynôme bracket d'un entrelacs de Hopf

α

rectification de α par  et par 

d'après P_3 :<  >= A <  > $+A^{-1}$ <  > (1)

rectification de β par  et par 

rectification de γ par  et par 

L'égalité (1) devient alors successivement

<  > = $A(A <$  $> +A^{-1} <$  $>)+A^{-1}(A <$  $> +A^{-1} <$  $>)$

<  > = $A^2(-A^2 - A^{-2}) + 1 + 1 + A^{-2}(A^{-2} - A^2)$; finalement

<  > = $-A^4 - A^{-4}$

d. Propriétés du polynôme bracket : Pour tout diagramme, le bracket existe et il est unique. Le polynôme bracket est invariant pour les transformations 1 , 3 , 4 (cf. III e.)

2. Polynôme de Jones

a. Définition : Le polynôme de Jones est défini pour les entrelacs orientés. En chaque point d'intersection apparent on observe la composante du dessus, il y a deux cas de figure (a) et (b). On leur fait correspondre respectivement les nombres +1 et -1. La somme de tous ces nombres ainsi obtenus en tous les points d'intersection apparents est noté $w(\mathcal{D})$.

figure a :  +1 figure b  -1

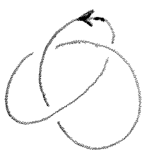
Le polynôme de Jones est par définition :

$$(-A^3)^{-w(\mathcal{D})} \times < \mathcal{D} > .$$

b. Exemples : Pour le nœud de trèfle $\mathcal{D}$ on a:

$\mathcal{D}$ 

$w(\mathcal{D}) = 3$
$< \mathcal{D} >= -A^5 - A^{-3} + A^{-7}$
polynôme de Jones : $A^{-4} + A^{-12} - A^{-16}$.

$\mathcal{D}'$ 

L'image de $\mathcal{D}$ dans une réflexion par rapport à un plan est $\mathcal{D}'$; on a :
$w(\mathcal{D}') = 3$
$< (\mathcal{D}') > = -A^{-5} - A^3 + A^7$
polynôme de Jones $= A^4 + A^{12} - A^{16}$.

Remarque : pour le nœud trivial le polynôme de Jones est égal à 1.

c. Propriétés : Le polynôme de Jones est invariant par les transformations 1 , 2 , 3 , 4 , (cf. III 2). Il constitue un moyen simple de distinguer les nœuds ou de reconnaître leur trivialité.