A VOS STYLOS

PROBLÈME 19

Énoncé

Soit $\mathcal{C}$ un ensemble convexe borné, fermé du plan. Peut-on construire un parallélogramme P inclus dans $\mathcal{C}$ tel que l'aire de P soit supérieure ou égale à la moitié de l'aire de $\mathcal{C}$?

Solution

Nous avons reçu une solution de Pierre RENFER que nous donnons ci-après suivie des indications d'une variante par la rédaction. Par ailleurs Gustave CHOQUET nous propose la conjecture suivante : “Si $\mathcal{C}$ admet un centre de symétrie alors la constante $\frac{1}{2}$ (aire de $P \geq \frac{1}{2}$ aire de $\mathcal{C}$) peut être remplacée par $2/\pi$”. G. CHOQUET se pose également la question de la généralisation du problème 19 à un espace de dimension 3 ou plus.

Voici d'abord la solution de Pierre RENFER. Elle donne un résultat plus précis que l'énoncé proposé : **Étant donnés $\mathcal{C}$ et une direction de droite $\mathcal{D}$, il existe un parallélogramme P inscrit dans $\mathcal{C}$, ayant un côté de direction $\mathcal{D}$ et d'aire au moins la moitié de celle de $\mathcal{C}$.**

Choisissons dans le plan une origine O et deux axes, Ox parallèle à $\mathcal{D}$ et Oy perpendiculaire à $\mathcal{D}$. Nous allons, au moyen d'une première **symétrisation de Steiner**, transformer $\mathcal{C}$ en un convexe $\mathcal{C}'$ symétrique par rapport à l'axe Oy. Coupons pour cela $\mathcal{C}$ par une droite variable δ parallèle à $\mathcal{D}$; l'intersection $\mathcal{C} \cap \delta$, quand elle n'est pas vide, est un segment $[A, B]$, éventuellement réduit à un point. Faisons glisser $[A, B]$ le long de δ de façon à obtenir un segment $[A', B']$ de δ dont la médiatrice soit l'axe Oy; $\mathcal{C}'$ n'est autre que la réunion des segments $[A', B']$ ainsi obtenus; il est encore convexe car la fonction

$$\text{ordonnée de} \Longrightarrow \text{longueur de } [A, B]$$

est concave sur son domaine de définition, comme somme de deux fonctions concaves. Une seconde symétrisation, faisant glisser sur elles-mêmes les sécantes à $\mathcal{C}'$ perpendiculaires à $\mathcal{D}$ pour amener leurs milieux sur Ox, transforme $\mathcal{C}'$ en un convexe $\mathcal{C}''$ symétrique par rapport aux deux axes. Les trois convexes $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ ont même aire. A tout point situé sur la frontière de $\mathcal{C}''$ et dans le premier quadrant, on peut associer le rectangle R centré en O, parallèle aux axes, de sommet ce point et inscrit dans $\mathcal{C}''$, puis le quadrilatère Q inscrit dans $\mathcal{C}$ et dont les sommets deviennent ceux de R lorsque $\mathcal{C}$ est transformé en $\mathcal{C}''$. Par construction-même de $\mathcal{C}''$, Q est un parallélogramme de même aire que P et ayant un côté de direction $\mathcal{D}$.

Nous sommes ainsi ramenés à montrer que **si $\mathcal{C}$ est un compact convexe symétrique par rapport aux axes, on peut inscrire dans $\mathcal{C}$ un rectangle parallèle aux axes contenant au moins la moitié de l'aire de $\mathcal{C}$.** Introduisons l'équation $y = f(x)$ du quart de la frontière de $\mathcal{C}$ contenu dans le premier quadrant ; la fonction f, définie sur un compact $[0, a]$, est concave et décroissante. On sait qu'une fonction concave admet en tout point une dérivée à gauche et une dérivée à droite et que le graphe de la fonction est en dessous des demi-tangentes à gauche et à droite.

Soit $S(x)$ l'aire du rectangle formé par les axes de coordonnées et leurs parallèles passant par M. La fonction S est dérivable à gauche et à droite.

$$S(x) = x\ f(x)\ ;\ S'_g(x) = x\ f'_g(x) + f(x)\ ;\ S'_d(x) = x\ f'_d(x) + f(x).$$

La fonction continue S atteint son maximum pour une valeur $x = \alpha$ entre 0 et a. Soit A le point de la frontière de $\mathcal{C}$ de coordonnées α et $f(\alpha)$. Deux cas se présentent.

• Si $\alpha < a$, ont doit avoir $S'_g(\alpha) \geq 0$ et $S'_d(\alpha) \leq 0$, d'où

$$f'_d(\alpha) \leq \frac{-f(\alpha)}{\alpha} \leq f'_g(\alpha).$$

Ainsi la droite passant par A et de coefficient $-f(\alpha)/\alpha$ est au-dessus de $\mathcal{C}$, l'aire de $\mathcal{C}$ est donc majorée par 4 fois celle du triangle formé par cette droite et les deux axes, c'est-à-dire $4 \times 2\alpha f(\alpha)$ et c'est terminé.

• Si $\alpha = a$, on a seulement les inégalités correspondant à la dérivée à gauche, mais elles entraînent encore que $\mathcal{C}$ est au-dessous de la droite et le résultat subsiste.

Voici une méthode plus simple et plus rapide, mais qui ne donne pas le résultat plus fort de RENFER.

On note Γ la frontière de $\mathcal{C}$. Soient ABC trois points de Γ et considérons le parallélogramme $ABCD$. Si D est extérieur à C on se ramène au cas où D est intérieur selon le schéma de la figure 1. Si D est intérieur, on considère la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$ qui transforme $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$ et Γ en Γ'. Γ' coupe Γ au voisinage de D en I' dont l'antécédent est I. Alors le parallélogramme $IBCI'$ a une aire supérieure à celle de $ABCD$ (fig. 2).

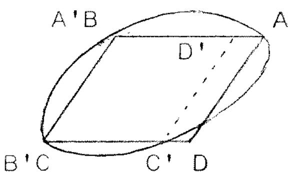


Figure 1

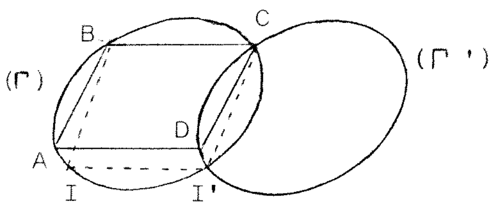
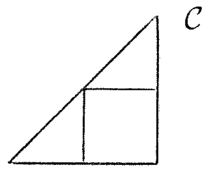
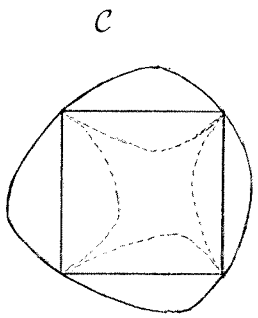


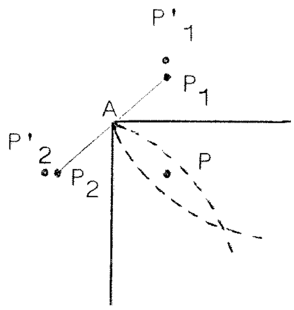
Figure 2

$\mathcal{C}$ étant un borné fermé, c'est un compact et l'ensemble des aires des parallélogrammes ayant leur 4 sommets sur Γ est majoré et la borne supérieure est atteinte par au moins un parallélogramme. Soit P l'un d'eux. Effectuons une transformation affine concernant les aires et transformant P en un carré Q. La convexité est conservée. La figure 3 montre que le coefficient $1/2$ ne peut pas être amélioré.

Figure 3







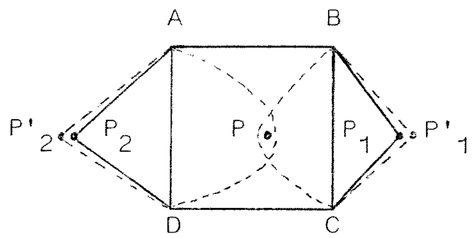


Figure 4 *Figure 5a* *Figure 5b*

Rabattons la partie extérieure à Q selon la figure 4. Cela revient à faire une symétrie orthogonale partielle par rapport à chacun des côtés de Q. Pour que l'inégalité entre les aires ait lieu il suffit de montrer que les morceaux rabattus ne se chevauchent pas. Deux cas pourraient se présenter donnés sur les figures 5a et 5b.

Sur la figure 5a, le point P apparaît sur deux rabats consécutifs correspondant aux points P_1 et P_2 et le segment $[P_1P_2]$ contient A. Mais il existerait des points voisins de P dont les symétriques P_1' et P_2' sont tels que $[P_1'P_2']$ ne contient pas A ce qui voudrait dire que $[P_1'P_2']$ sort de $\mathcal{C}$ qui ne serait pas convexe!

Sur la figure 5b, le point P apparaît sur deux rabats opposés correspondant aux points P_1 et P_2. Mais alors il existerait deux points P_1' et P_2' dans $\mathcal{C}$ et plus éloigné de Q. Il est alors facile de vérifier que le polygone $ABP_2'CDP_1'$ contient un rectangle d'aire plus grande que celle de Q. Q ne correspondrait pas au maximum.

PROBLÈME 20

Énoncé

Calculer

$$\sum_{n=0}^{p}(-1)^{p-n}\frac{n^p}{n!(p-n)!}$$

et en déduire $\sum_{n\geq 0}\frac{n^n}{n!}z^n$.

Indication

Interprétation combinatoire.

PROBLÈME 21

Énoncé (proposé par D. DUMONT)

Soient $2n$ écolières qui partent en promenade quotidienne en rang deux par deux et souhaitent changer de voisine chaque jour. Trouver un algorithme qui fasse en sorte qu'en $2n-1$ jours chacune ait eu pour voisine chacune des autres une fois et une seule. (Ce problème s'apparente au problème dit “des écolières de Kirkmann”.)

PROBLÈME 22

Énoncé

Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ indéfiniment dérivable, telle que, pour tout x rationnel, la dérivée $n^{\text{ième}}$ $f^{(n)}(x)$ soit un rationnel pour n pair et un irrationnel pour n impair ?