LE SOLEIL SE LÈVE TROIS FOIS PAR JOUR

Jean LEFORT

Nous sommes tellement conditionnés par nos habitudes que nous avons du mal à imaginer un quelconque changement dans ce que nous considérons être des lois de la nature. Le Soleil se lève à l'est et se couche à l'ouest. Nous n'avons pas trop de mal à imaginer une planète où les choses se passeraient à l'envers, mais nous voyons mal pourquoi sur une planète le Soleil pourrait se lever à l'est et se coucher à l'est également! Pourtant, toute planète tourne d'un mouvement de rotation parfaitement uniforme sur elle-même autour d'un axe nord-sud; de même son mouvement de translation autour du Soleil est régi par les lois de KEPLER parfaitement régulières, quand nous ne tenons pas compte des perturbations engendrées par les autres corps célestes. Nous allons voir que la combinaison de ces deux mouvements peut conduire à des situations curieuses dont l'exemple le plus proche de nous est la planète Mercure.

Le texte qui suit n'a aucune prétention astronomique, c'est pourquoi les notations sont celles habituelles en mathématiques.

I.– RAPPEL DES LOIS DE KEPLER ET DE NEWTON

1) Historique

C'est KEPLER qui découvrit en 1609 que l'orbite de Mars était une ellipse. Cette découverte avait été rendue possible grâce aux excellentes observations que Tycho BRAHÉ lui avait léguées. En 1619, KEPLER complétait cette découverte par la 3[e] loi.

Voici l'énoncé moderne des lois de KEPLER :
1) les planètes décrivent des orbites elliptiques dont le Soleil occupe un foyer;
2) le rayon vecteur balaye des aires proportionnelles au temps (loi des aires);
3) les carrés des temps de révolution sont proportionnelles aux cubes des grands axes.

C'est en 1687 que NEWTON proposa une loi plus générale dont il déduisit les lois de KEPLER. La loi de NEWTON s'énonce ainsi :

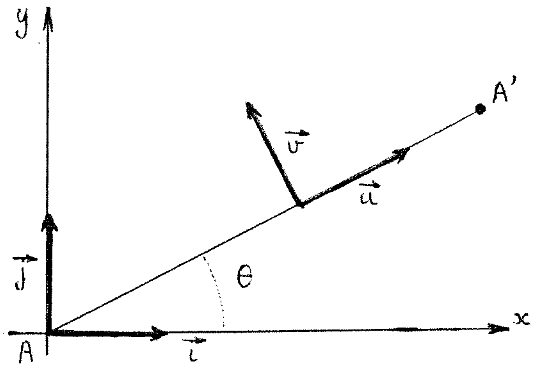
* Deux points matériels A et A' de masse m et m' situés à la distance r exercent l'un sur l'autre une force de gravitation, dirigée suivant AA', directement proportionnelle aux masses et inversement proportionnelle au carré de la distance. Autrement dit, $F = -k\frac{mm'}{r^2}$.

2) La trajectoire

Montrons rapidement comment on peut retrouver les lois de KEPLER à partir de la loi de NEWTON. Nous supposerons que $m >> m'$ (ce qui est le cas si, comme nous en avons besoin, A est le Soleil et A' une planète). Alors on peut supposer que A est fixe (ou en mouvement rectiligne uniforme, ce qui revient au même pour le calcul) et on peut le prendre comme origine.

* Le mouvement est dans le plan $(A, A'_0, \overrightarrow{V}_0)$ où A'_0 est la position initiale de A' et $\overrightarrow{V}_0$ la vitesse initiale de A'.

* Repérons A' dans ce plan par ses coordonnées polaires par rapport à A et à une direction fixée $(\overrightarrow{Ax})$ (figure ci-dessous).



$\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *vecteurs unitaires*

Alors $\overrightarrow{AA'} = r\overrightarrow{u}$ et en dérivant deux fois par rapport au temps t, écrivons l'égalité entre $m'\overrightarrow{\Gamma}$ ($\overrightarrow{\Gamma}$ accélération de A') et $\overrightarrow{F} = -k\frac{mm'}{r^2}\overrightarrow{u}$:

$$m'\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r(\frac{d\theta}{dt})^2\right]\overrightarrow{u} + m'\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\overrightarrow{v} = -k\frac{mm'}{r^2}\overrightarrow{u}$$

ce qui conduit à

$$2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{km}{r^2} \qquad (2)$$

On reconnait dans l'équation (1), après multiplication par r, $(r^2\frac{d\theta}{dt})' = 0$ c'est-à-dire $r^2\frac{d\theta}{dt} = C$ qui n'est autre que la constance de la vitesse aérolaire $\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$.

* Pour l'équation (2) éliminons t en utilisant l'équation (1). Il vient, tout calcul fait

$$\frac{C^2}{r^2}\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2C^2}{r^3}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - \frac{C^2}{r} = -km.$$

En posant $\rho = \frac{1}{r}$ cette équation s'écrit

$$\frac{C^2d^2\rho}{d\theta^2} + C^2\rho = km$$

équation différentielle linéaire du 2^e^ ordre à coefficient constant. On trouve finalement :

$$r = \frac{1}{\frac{km}{C^2} + \alpha \cos\theta + \beta \sin\theta}$$

où α et β sont des constantes d'intégration. Cela correspond bien à l'équation polaire d'une conique.

En choisissant pour direction origine la direction du périhélie (plus courte distance Mercure-Soleil), on peut écrire :

$$r = \frac{1}{\frac{km}{C^2} + \alpha \cos\theta} = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

où ρ est le paramètre et e l'excentricité. Si on note P la période de révolution, a et b le demi-grand axe et petit-axe respectivement, il vient

$$PC = 2\pi ab \; ; \; e = \frac{\alpha C^2}{km} \; ; \; p = \frac{b^2}{a} = \frac{C^2}{km}.$$

3) Le déplacement angulaire

On cherche à calculer θ en fonction du temps t. Pour cela on utilise la 2^{e} loi de KEPLER $\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2}$ qui s'écrit, en revenant à θ :

$$\frac{d\theta}{(1 + e\cos\theta)^2} = \frac{C}{p^2} dt$$

équation à variables séparées. On intègre le premier membre en posant $\tau = \tan\frac{\theta}{2}$. Tout calcul fait, il vient :

$$\frac{C}{p^2} t = \frac{-e\sin\theta}{(1-e^2)(1+e\cos\theta)} + \frac{2}{(1-e^2)^{3/2}} \arctan\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan\frac{\theta}{2}$$

en prenant $t = 0$ pour $\theta = 0$. Cette formule n'est valable que pour $\theta \in]-\pi, +\pi[$. On peut prolonger par continuité en $\pm\pi$ et on a alors une période complète, t augmentant de P quand θ augmente de 2π. Pour obtenir une fonction continue sur $\mathbb{R}$ entier il faut changer la constante d'intégration quand on franchit un multiple impair de π. Par exemple, sur $]\pi, 3\pi[$ on doit prendre :

$$\frac{C}{p^2}(t - p) = \frac{-e\sin\theta}{(1-e^2)(1+e\cos\theta)} + \frac{2}{(1-e^2)^{3/2}} \arctan\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan\frac{\theta}{2}.$$

II.– QUELQUES DONNÉES NUMÉRIQUES SUR MERCURE

Période de rotation	$T = 58,65$ j	= 0,16 année
Période de révolution	$P = 87,97$ j	= 0,24 année

(il y a exactement un rapport de 2 à 3 entre T et P)

Demi-grand axe	$a = 57,9\ .\ 10^6$ km	= 0,387 UA
Demi-petit axe	$b = 56,7\ .\ 10^6$ km	=0,379 UA
Demi distance focale	$c = 11,9\ .\ 10^6$ km	= 0,0796 UA
Excentricité	$e = 0,2056$	
Paramètre	$p = b^2/a$	= 0,371 UA
Constante des aires	$C = 2,714\ .\ 10^9$ km $^2/s$	= 3,84 UA^2/an
Rayon moyen de Mercure	$R = 2439$ km	

Rapport $\frac{\text{masse Soleil}}{\text{masse Mercure}} = 6\ 023\ 600$ (la masse du Soleil est d'environ $2\ .\ 10^{30}$ kg).
Inclinaison de l'axe de Mercure sur le plan de l'orbite = 0°.

III.– LE MOUVEMENT DU SOLEIL DANS LE CIEL DE MERCURE

Nous avons vu que l'axe de rotation de la planète Mercure est perpendiculaire au plan de son orbite. Pour un observateur sur Mercure, le Soleil se déplace donc dans un plan. Etant donnée la petitesse du rayon de la planète devant le demi-grand-axe de son orbite, nous supposerons que cet observateur est placé au centre de Mercure la tête au nord, mais lié à elle, c'est-à-dire tournant sur lui-même.

Pour étudier le mouvement du Soleil dans le ciel de Mercure, utilisons une représentation complexe, en repérant le Soleil par son affixe Z. Le mouvement du Soleil pour l'observateur tel qu'il a été situé ci-dessus est décrit par le produit de $z = -r\cos\theta - ir\sin\theta$ (où r et θ ont le sens donné au § 1 et correspondent au mouvement apparent de révolution) par $z' = \exp(-2\pi i\frac{t}{T})$ (où T est la période de rotation sidérale de Mercure et t le temps). Les signes "moins" tant dans z que dans z' proviennent du changement de point de vue puisqu'on prend un repère fixe par rapport à la surface de Mercure. L'écriture $Z = zz'$ revient à choisir l'origine $t = 0$ au moment où Mercure est au périhélie et un observateur qui à ce moment est face au Soleil. Finalement :

$$Z = \frac{-p\exp i[\theta(t) - \frac{2\pi t}{T}]}{1 + e\cos\theta}.$$

1) L'argument de Z :

Notons Θ cet argument qui est le plus intéressant a priori :

$$\Theta(t) = -\frac{2\pi t}{T} + \theta(t) + \pi \quad \text{à } 2\pi \text{ près}$$

et étudions cette fonction.

• C'est une fonction périodique de période $2P = 3T$. En effet, $\frac{2\pi t}{T}$ modulo 2π a une période égale à T et $\theta(t)$ a une période égale à P. Etant donné le rapport rationnel qui lie T et P on obtient bien la valeur annoncée.

Θ est une fonction impaire puisque $t(\theta)$ l'est donc aussi $\theta(t)$ et que $\pi = -\pi$ modulo 2π.
Finalement nous pouvons limiter notre étude à l'intervalle $[0, P]$.

• Calculons $\frac{d\Theta}{dt}$ en tenant compte de la loi des aires ($\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2}$) ; il vient :

$$\begin{aligned}\frac{d\Theta}{dt} &= -\frac{2\pi}{T} + \frac{C}{p^2}(1 + e\cos\theta)^2 \\ &= \frac{e^2 C}{p^2}\left(\cos\theta + \frac{1}{e} - \frac{p}{e}\sqrt{\frac{2\pi}{TC}}\right)\left(\cos\theta + \frac{1}{e} + \frac{p}{e}\sqrt{\frac{2\pi}{TC}}\right)\end{aligned}$$

quantité qui ne peut s'annuler que si l'un des deux nombres $|\frac{1}{e} \pm \frac{p}{e}\sqrt{\frac{2\pi}{TC}}|$ est inférieur à 1 (*).

Seul le signe "moins" donne une telle valeur, alors $\frac{d\Theta}{dt}$ s'annule pour $\cos\theta_0 \simeq 0,9090$ soit $\theta_0 \simeq 24,634°$ ce qui correspond à $t_0 \simeq 3,9136$ jours et aussi pour $\theta_1 = 335,366°$ ou $t_1 = 84,0564$ jours.

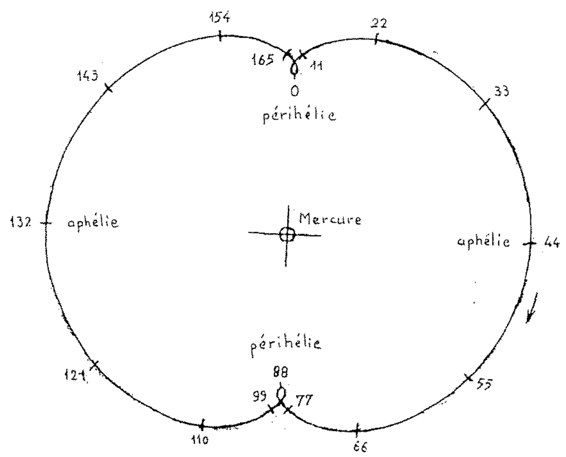
Ceci nous permet de dresser le tableau ci-après :

t	0		$t_0 \simeq 3,9$ j		$\frac{P}{2} \simeq 44$ j		$t_1 \simeq 84$ j		$P \simeq 87,97$
θ	0		θ_0		π		θ_1		2π
$\cos\theta$	1		$0,9090$		-1		$0,9090$		1
Θ'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
Θ	$180°$	$\nearrow$	$204,57°$	$\searrow$	$90°$	$\searrow$	$-24,57°$	$\nearrow$	$0°$

2) Le module de Z

C'est tout simplement $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$, il est assez facile de reporter point par point pour obtenir le graphique ci-dessous qui donne la trajectoire apparente du Soleil dans le ciel de Mercure. Au voisinage du périhélie, le Soleil décrit une boucle pendant environ 8 jours

(*) Cette valeur n'est inférieure à 1 que de peu. Si l'excentricité avait été inférieure à 0,186 le phénomène que nous décrivons ici n'aurait pas eu lieu.



Trajectoire apparente du Soleil pour un observateur à la surface de Mercure.

Nous pouvons résumer la situation en disant qu'au voisinage du périhélie la vitesse de translation de la planète Mercure sur son orbite est suffisamment forte pour que la vitesse angulaire apparente du Soleil surpasse la vitesse angulaire de rotation de la planète sur elle-même, entraînant ainsi un mouvement apparent rétrograde du Soleil dans le ciel de Mercure.

Pour certains points de Mercure, ceux qui sont au voisinage du méridien, pour lequel il est midi à l'aphélie, le Soleil se lève et se couche trois fois dans la "journée". Il se lève à l'est pour se recoucher à l'est et se relever une bonne fois à l'est, et un spectacle symétrique a lieu à l'ouest lors du coucher.

Toutes proportions gardées, c'est un phénomène un peu analogue qui explique le mouvement irrégulier des planètes dans le ciel. Même en supposant les orbites parfaitement circulaires et les mouvements uniformes, ce que supposait ARISTOTE dans son modèle, nous obtiendrions une trajectoire apparente guère différente de celle que nous observons. On comprend mieux alors les difficultés conceptuelles pour bâtir un bon modèle et le génie de KEPLER à ce sujet.