NOMBRE D'OR OU LA PASSION PARTAGÉE ...

Didier ROTH

Tout a démarré à propos d'un exercice du livre IREM de 3^{e} sur la pyramide de Khéops. Le rapport entre la hauteur d'une face et la demi-base est voisin du nombre d'or. Ayant cet exercice à préparer, certains élèves se posent des questions (le nombre d'or n'avait pas encore été évoqué). Fort à propos, ils feuillettent leur livre et trouvent au moins sa valeur dans un autre exercice (chapitre "racines carrées"). Mais au moment de la correction, ils veulent en savoir plus et je décide de satisfaire en partie leur curiosité en improvisant une explication du type : longueur grand segment / longueur moyen segment = longueur moyen segment / longueur petit segment. Le principe expliqué, je leur demande de trouver l'équation correspondante (l'inconnue étant le rapport en question). La résolution étant bien sûr hors programme, les deux solutions sont fournies. Il est cependant du programme de *vérifier* que le nombre d'or est solution de l'équation (E) : $X^2 - X - 1 = 0$ (exercice style "brevet"). De même pour l'autre solution.

Et pour la fois d'après je leur recommande de faire des recherches complémentaires sur le nombre d'or et de prouver que "l'inverse de l'opposé du nombre d'or" est aussi solution de (E). Immédiatement l'expression "l'inverse de l'opposé" fait sourire ou même rire. Par boutade je leur propose, si elle ne leur convient pas, de la remplacer par "l'opposé de l'inverse"!! Suit un débat-mise au point rapide sur la question, fort utile d'ailleurs. Les collègues savent bien la confusion souvent faite entre inverse et opposé. La leçon suivante, surprise agréable : les recherches ont été nombreuses et plutôt complètes. Il est même question de l'*ancien* nombre d'or : celui des astronomes. Emerveillement également sur le fait que le nombre d'or, son carré et son inverse ont exactement les mêmes décimales! Au-delà de la visualisation "calculatrice" l'équation (E) permet de le prouver!

Cette fois piqué au vif par leur intérêt, je décide une fois rentré chez moi d'assouvir davantage encore leur appétit de science. Je me précipitai sur notre revue favorite et sur son index thématique récemment disponible : en un clin d'œil j'avais l'information souhaitée : le n° 43 me serait fort utile, le 42 également, le 22 pour des compléments sur FIBONACCI (1).

Avec un peu de réflexion et un zeste d'humour, voilà commis le problème ci-après! Et l'impatience de le soumettre à ceux qui en étaient finalement les "involontaires responsables" : en effet, je n'avais au départ aucune intention d'en arriver à cette extrémité!!

---

(1) Signalons aussi l'intéressant "Que sais-je?" n° 1530, de M. CLEYET-MICHAUD (éd. P.U.F.) et également l'ouvrage de C.-J. WILLARD "Le nombre d'or - Utilisation en mathématiques et dans les Beaux-Arts" (éd. Magnard).

C'est aujourd'hui chose faite : l'accueil semble favorable mais nous n'en sommes qu'au tout début! J'ajoute et c'est ce que je leur ai indiqué, que je n'ai pas d'idée arrêtée sur la façon d'appréhender ce problème. Conçu plutôt comme travail personnel, avec délai d'une quinzaine de jours, il n'est pas exclu que les parties les plus "difficiles" fassent l'objet d'une recherche collective durant une ou deux heures de cours. Il sera alors intéressant d'étudier les démarches suivies et leurs articulations avec les points au programme de 3^e. En tout cas on peut être certain que le temps consacré à résoudre un "vrai" problème ne peut qu'être "profitable" ... sans compter la part de *passion* heureusement encore non quantifiable, "gratuite" oserai-je dire?

UN VRAI MENU DE FÊTE!

Apéritif : Il paraît que : nombre d'or $= 2 \times \cos 36°$

1) Une **pseudo**-preuve consiste à vérifier que votre calculatrice indique le même résultat, pour les deux membres de l'égalité.

2) Pourquoi est-ce une **pseudo**-preuve?

3) La preuve est du niveau 1ère. Il faudra donc un peu attendre! (Le moment venu passez me dire bonjour!!)
Le résultat sera donc **admis** pour la suite du problème.

4) Prouver que $\sin 36° = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Premier plat :

1) On suppose que $ABCDE$ est un pentagore régulier, non étoilé, de centre O, inscrit dans un cercle de rayon 1 (par commodité).
Calculer et justifier la valeur des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{ABC}$. Les utiliser pour faire un dessin avec un rapporteur. (Pour le dessin prendre, par exemple, 8 cm pour le rayon OA.)

2) Calculer la longueur du côté du pentagone, en prenant $OA = 1$.

Deuxième plat :

1) suivre le programme de construction suivant :
a. Tracer un cercle de centre O et de rayon 1 (prendre à nouveau 8 cm, par exemple).
b. Dessiner un diamètre RS. Marquer I le milieu de OR.
c. Tracer un rayon OA perpendiculaire à OR.
d. Tracer le cercle de centre I et de rayon AI. Il coupe le segment OS en T.
e. La distance AT peut se reporter cinq fois sur le cercle de centre O à partir de A, pour construire B, C, D, E. Le dernier report semble aboutir à A. Le pentagone $ABCDE$ semble régulier!!

2) Le but de cette question est de prouver que la construction ci-dessus "marche". Pour cela, en utilisant habilement le théorème de PYTHAGORE dans des triangles rectangles judicieusement choisis, calculer la longueur AT (et donc du côté AB). Si tout va bien, on retrouve la valeur calculée dans la question 2) du premier plat. Conclusion : ça marche!!!

3) Sur le même dessin, tracer le pentagone régulier étoilé (célèbre "pentacle") $ACEBD$.
Prouver que le rapport AC/AB est égal au nombre d'or!!
AC = côté du pentagone régulier étoilé.
AB = côté du pentagone régulier non étoilé (on dit aussi "convexe").

Dessert :

Rêver sur le dernier résultat (célébrité du nombre d'or, du pentacle, mystères, mathématiques, poésie ...).
Compléter par des recherches personnelles.

Digestif :

Un polygone à n côtés est dit régulier si ses n côtés ont la même longueur et si ses n angles ont même mesure. On supposera de plus qu'il est non étoilé (donc "convexe").

1) Dis brièvement à quoi correspondent les cas $n = 3$ et $n = 4$.

2) Si $ABCDEFG...$ est un polygone à n côtés de centre O, donne une formule pour calculer l'angle "au centre" $\widehat{AOB}$ et l'angle entre deux côtés consécutifs $\widehat{ABC}$. S'aider des cas connus ($n = 3, 4, 5, 6$).

BON APPÉTIT ... DE SCIENCE!
ÉVITE TOUT DE MÊME L'INDIGESTION : DÉGUSTE EN PLUSIEURS FOIS!