DE LA TOUPIE AUX COURBES ALGÉBRIQUES (*)

Michèle AUDIN

Bien souvent, les équations différentielles décrivant le mouvement d'un système matériel se résolvent à l'aide d'**intégrales abéliennes**; en gros, c'est dire qu'on arrive à quelque chose du genre $\dot{x}^2 = P(x)$ soit

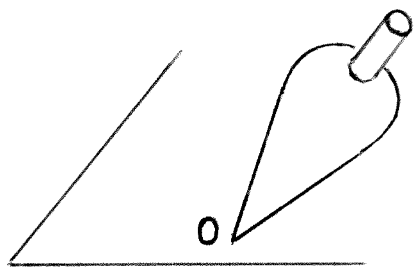
$$dt = \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$$

où P est un polynôme : ainsi les solutions $x(t)$ s'obtiennent en inversant la fonction

$$t(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}.$$

Je vais expliquer ici **un** exemple de cette situation. Je donnerai ensuite une vision un peu générale et plus moderne de ce type d'exemples.

L'exemple que j'ai choisi est celui de la **toupie**, ou toupie symétrique, ou toupie **de Lagrange** : en effet l'étude en a été faite par ce dernier en 1788. Du point de vue mathématique, c'est un cas particulier de **solide mobile autour d'un point fixe** (le point fixe sera le point de contact entre l'axe de la toupie et le sol).



toupie

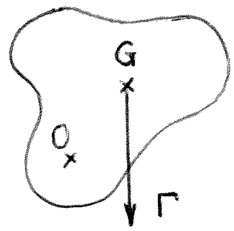
La question du solide mobile autour d'un point fixe a fait travailler les plus grands mathématiciens de la fin du XVIII^e^ siècle et du XIX^e^ siècle. L'Académie des Sciences avait même institué un prix (le prix Brodin) pour un mémoire sur ce sujet, ce qui a donné lieu au travail le plus célèbre, celui de S. KOWALEVSKI (1889).

C'est un fait général que les contributions décisives à ce type de questions ont été faites par les mathématiciens qui étaient le plus au fait de la théorie nouvelle

(*) Dans le cadre des conférences "Ouverture mathématique" organisées conjointement par l'I.R.E.M. de Strasbourg et la Régionale A.P.M.E.P. d'Alsace – Le 19 février 1992.

des fonctions de variable **complexe** (JACOBI, KOWALEVSKI, WEIERSTRASS ...) en particulier des intégrales abéliennes, etc ...

1. SOLIDE MOBILE AUTOUR D'UN POINT FIXE, LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES



On considère un solide, de centre de gravité G, avec un point fixe O, mobile dans un champ de pesanteur constant.

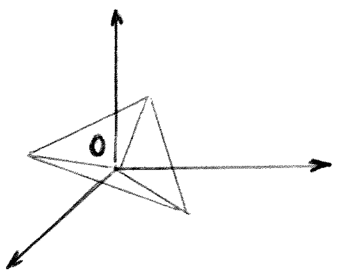
Comme nous faisons des mathématiques, nous avons le choix des unités, la masse du solide sera donc 1 et l'intensité de la pesanteur aussi.

Nous pouvons aussi choisir un repère, **mobile avec le solide**, orthonormé. Le choix du point fixe O comme origine s'impose. C'est dans ce repère que j'écris les vecteurs L, Γ, Ω, M qui apparaissent maintenant :

a) $L = \overrightarrow{OG}$ est un vecteur constant, caractéristique du solide.

b) Γ n'est autre que le champ de gravitation, constant ... dans un repère fixe. Décrire ses variations en fonction du temps, c'est décrire (en partie) le mouvement du repère mobile — donc du solide.

c) Ω est le vecteur de rotation instantanée. Arrêtons-nous un peu sur la définition de ce vecteur. Fixons un repère (fixe, justement). On a une isométrie R_t qui transforme le repère mobile en ce repère fixe.



Un point $q(t)$ dans le repère fixe, ou $Q(t)$ dans le repère mobile : $q(t) = R_tQ(t)$.
Q est constant : c'est bien dire qu'on a un solide — un corps **rigide** pour faire un anglicisme;
et $Q = R^{-1}q : \dot{q} = (\dot{R}R^{-1})q$.

Quant à $\dot{R}R^{-1} = \dot{R}^tR$, c'est un opérateur antisymétrique : R est une isométrie

$$\begin{gathered} R^tR = \mathrm{Id} \\ \dot{R}^tR + R^t\dot{R} = 0 \\ \dot{R}^tR +^t (\dot{R}^tR) = 0 \ ; \end{gathered}$$

dans $\mathbb{R}^3$, un opérateur antisymétrique s'identifie à un vecteur

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

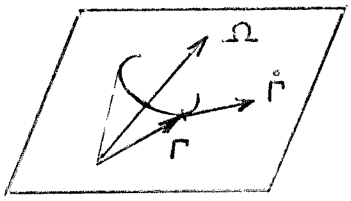
de façon que $A.q = v \wedge q$ (exercice).

On appelle ω **le vecteur de rotation instantanée**, le vecteur associé à $\dot{R}R^{-1}$, et Ω ce même vecteur exprimé dans le repère mobile.

A peu près par définition de Ω, dire que Γ est constant dans le repère fixe, c'est dire que

$$\dot{\Gamma} = \Gamma \wedge \Omega : \tag{1}$$

$$\begin{aligned} 0 = \dot{\gamma} = (R\Gamma)^{\bullet} = \dot{R}\Gamma + R\dot{\Gamma} \text{ donc } \gamma & \\ &= -{}^tR\dot{R}\Gamma = -{}^tR(\dot{R}R^{-1})\gamma \\ &= -{}^tR(\omega \wedge \gamma) = -\Omega \wedge \Gamma = \Gamma \wedge \Omega. \end{aligned}$$



d) M est le moment cinétique,

$$m = q \wedge \dot{q} = q \wedge (\omega \wedge q)$$

ou

$$M = Q \wedge (\Omega \wedge Q).$$

Pour chaque point Q de la toupie, l'application linéaire $\Omega \longmapsto Q \wedge (\Omega \wedge Q)$ est **symétrique** et de type positif :

$$\begin{aligned} [Q \wedge (X \wedge Q)].Y &= \text{ dét } (Q, X \wedge Q, Y) \\ &= \text{dét } (Y, Q, X \wedge Q) \\ &= (Y \wedge Q).(X \wedge Q). \end{aligned}$$

En sommant sur tous les points Q, on obtient un opérateur symétrique défini positif noté J, ainsi $M = J\Omega$. Par construction même, J est constant et caractéristique du solide. J est **la matrice d'inertie** du solide, on peut supposer (et on supposera donc) qu'elle est **diagonale** dans le repère mobile orthonormé utilisé.

On applique maintenant le théorème des moments : $n = \dot{m} = (RM)^{\bullet}$est la somme des moments par rapport au point O des forces appliquées au solide.

$$n = RN = (RM)^{\bullet} = \dot{R}M + R\dot{M} = R(\Omega \wedge M) + R\dot{M}$$

donc

$$\dot{M} = M \wedge \Omega + N.$$

Mais les forces d'appui, s'exerçant en O, ont un moment nul. Il ne reste que la gravitation, $N = \Gamma \wedge L$, d'où

$$(2) \qquad \dot{M} = M \wedge \Omega + \Gamma \wedge L.$$

Les équations (1) et (2)

$$(E-P) \quad \begin{cases} \dot{\Gamma} = \Gamma \wedge \Omega \\ \dot{M} = M \wedge \Omega + \Gamma \wedge L. \end{cases}$$

constituent les **équations d'Euler-Poisson.**

2. INTÉGRALES PREMIÈRES ET TOUPIE SYMÉTRIQUE

Il est extrêmement utile pratiquement – et en fait aussi théoriquement (1) — de connaître le plus possible de quantités qui restent conservées pendant le mouvement. En voilà quelques-unes :

a) **l'énergie**
L'énergie totale du solide est

$$H = \text{ énergie cinétique } + \text{ énergie potentielle} = \frac{1}{2}M.\Omega + \Gamma.L.$$

Bien entendu elle est conservée (exercice : $\frac{dH}{dt} = 0$ (Γ, M) vérifient (1) et (2). Indication : $M.\Omega = M.J^{-1}M$ est une forme quadratique en M).

b) **La loi des aires :** le moment de M par rapport à l'axe vertical (fixe) est constant. En d'autres termes $C = M.\Gamma$ est aussi une intégrale première (exercice : $\frac{dC}{dt} = 0$).

d) **Une intégrale triviale :** $||\Gamma||^2 = 1$ par définition.

En général, c'est tout. Il serait très intéressant de vous expliquer pourquoi, mais on aimerait bien avoir une intégrale première (quantité conservée) de plus. Dans certains cas, ça existe, et un de ces cas est celui qui nous intéresse ici.

Si la toupie est **symétrique**, le moment de M par rapport à l'axe L doit aussi être conservé.

d) **Le moment de Lagrange** $K = M.L$ est conservé. Là je fais le calcul :

$$\begin{aligned} \dot{K} &= \dot{M}.L \quad (L \text{ est constant}) \\ &= (M \wedge \Omega + \Gamma \wedge L).L \\ &= (M \wedge \Omega).L \\ &= \det\,(M, \Omega, L) \end{aligned}$$

(1) Même si ça n'apparaît pas trop, c'est, fondamentalement, le sujet de cet article.

Que signifie la symétrie de la toupie? Il y a un axe de symétrie de rotation, l'axe L. La matrice d'inertie est de la forme

$$J = \left(\begin{array}{cc|c} l & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 \\ \hline 0 & 0 & m \end{array}\right)$$

dans une base orthonormée dont le troisième vecteur est colinéaire à L ou égal à L, puisque, naturellement, l'unité de longueur est $||L||$. Comme $M = J\Omega$, c'est dire que $M - l\Omega$ est colinéaire à L. Alors M, Ω et L sont liés et $\dot{K} = 0$. Mon choix d'unités me permet de supposer aussi que $l = 1$.

3. INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Les quatre quantités exhibées sont conservées pendant le mouvement. **On fixe leurs valeurs**

$$\begin{cases} 1 = ||\Gamma||^2 & H = \frac{1}{2}M.\Omega + \Gamma.L \\ C = M.\Gamma & K = M.L \end{cases}$$

Comme vous avez déjà joué avec une toupie, vous savez que le mouvement de l'axe de la toupie est intéressant. Je vais m'intéresser surtout à lui. Il s'agit de la position de l'axe L par rapport à la verticale, ou, en changeant de point de vue, de la verticale Γ par rapport à l'axe L (fixe dans le repère mobile).

Je vais écrire $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$ et m'intéresser à $\gamma_3 = \Gamma.L$ et à l'équation différentielle que cette quantité vérifie. Fixons les notations $M = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ et $\Omega = J^{-1}M = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{1}{m}w \end{pmatrix}$.

J'utilise (1) :

(1) $\quad \dot{\Gamma} = \Gamma \wedge \Omega \Rightarrow \dot{\gamma}_3 = \gamma_1 v - \gamma_2 u$ et (3) $\dot{\gamma}_3^2 = \gamma_1^2 v^2 + \gamma_2^2 u^2 - 2\gamma_1\gamma_2 uv.$

J'utilise $K = M.L = w$ et $c = M.\Gamma$

$$uv_1 + v\gamma_2 + K\gamma_3 = C \Rightarrow u\gamma_1 + v\gamma_2 = C - K\gamma_3$$

j'élève au carré

$$2uv\gamma_1\gamma_2 = (C - K\gamma_3)^2 - u^2\gamma_1^2 - v^2\gamma_2^2$$

je reporte dans (3)

$$\dot{\gamma}_3^2 = (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)(u^2 + v^2) - (C - K\gamma_3)^2$$

J'utilise $||\Gamma||^2 = 1$

$$(4) \qquad \dot{\gamma}_3^2 = (1 - \gamma_3^2)(u^2 + v^2) - (C - K\gamma_3)^2.$$

Je veux encore me débarasser des (u, v) qui traînent dans (4). Je n'ai pas encore utilisé H.

J'utilise $H = \frac{1}{2}M.\Omega + \Gamma.L$

$$H = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + \frac{1}{m}K^2) + \gamma_3$$

donc $u^2 + v^2$ s'exprime en fonction de γ_3 et des constantes de notre mouvement

$$u^2 + v^2 = 2H - \frac{1}{m}K^2 - 2\gamma_3$$

je reporte dans (4)

$$\dot{\gamma}_3^2 = (1 - \gamma_3^2)[2H - \frac{1}{m}K^2 - 2\gamma_3] - (C - K\gamma_3)^2$$

je pose $H' = 2H + (1 - \frac{1}{m})K^2$, alors finalement

$$\dot{\gamma}_3^2 = (1 - \gamma_3^2)(H' - K^2 - 2\gamma_3) - (C - K\gamma_3)^2. \tag{5}$$

Croyez-moi si vous voulez, sinon faites l'exercice, si vous savez résoudre (5), vous avez les solutions de tout le système d'Euler-Poisson assez facilement.

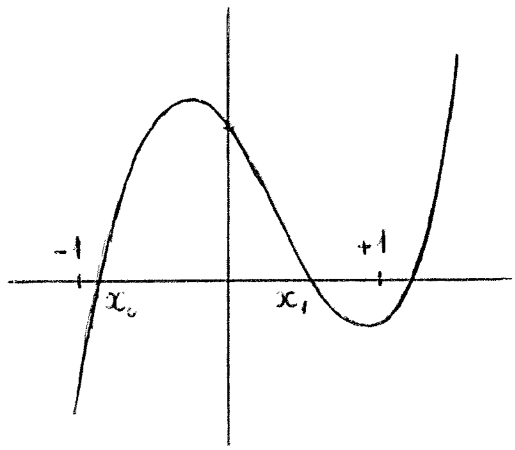
On va se concentrer sur (5); je change de notation pour l'inconnue (γ_3 devient x) et on a une équation

$$\dot{x}^2 = f(x) \tag{6}$$

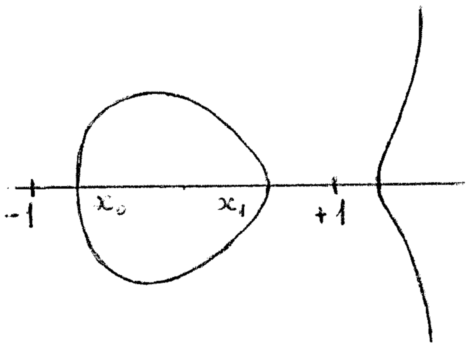
où $f(x) = (1 - x^2)(H' - K^2 - 2x) - (C - Kx)^2$ est un certain polynôme de degré 3.

Que savons-nous de ce polynôme? $f(+\infty) = +\infty, f(\pm 1) < 0$, et en plus $x = \gamma_3$ vérifie $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$, en particulier $\dot{x}^2 = f(x)$ doit avoir des solutions avec $-1 \leq x \leq 1$: f **doit** prendre des valeurs positives quelque part dans cet intervalle.

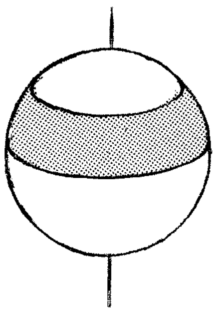
En résumé :



Maintenant l'équation (6) s'écrit $\frac{dx}{dt} = \sqrt{f(x)}$, où $dt = \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$, donc $t = \int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$ est une intégrale **elliptique** et $x(= \gamma_3)$, obtenue en inversant cette intégrale, s'exprime à l'aide de la fonction $\wp$ de Weierstrass associée à la courbe $\mathcal{E}$ d'équation $y^2 = f(x)$.

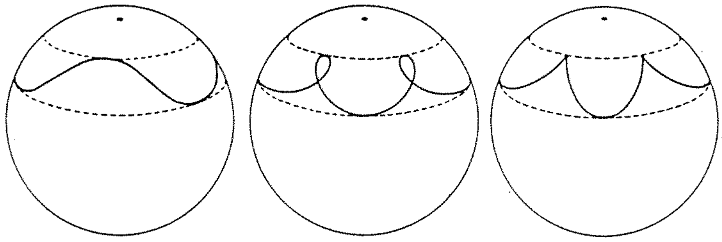


Voici $\mathcal{E}$, ou plutôt sa partie réelle. Elle a deux composantes, une seule va correspondre à des mouvement **réels** de la toupie.

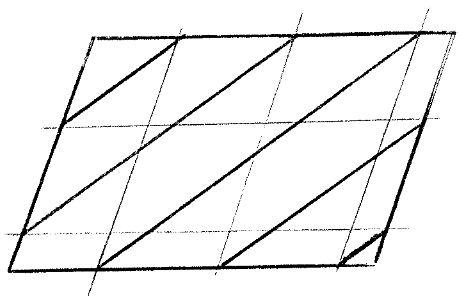


Bande $x_0 \leq \gamma_3 \leq x_1$ où est confiné le mouvement de l'axe.

En étudiant les solutions γ_1, γ_2, on obtient les trois types de dessins qui figuraient sur la feuille d'annonce de la conférence.



Maintenant, si vous vous rappelez les cours d'analyse complexe que vous avez peut-être suivis, la courbe **complexe** $\mathcal{E}$ peut se mettre sous la forme $\mathbb{C}/\Lambda$ où Λ est un réseau $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{C}$, précisément celui avec lequel on définit la fonction $\wp$.



topologiquement, on a un tore T^2.

En particulier, ça a un sens de parler de trajectoires linéaires : les images des droites.

Dire que les solutions s'expriment à l'aide de fonctions $\wp$, c'est dire que, vues sur la courbe $\mathcal{E}$, elles sont **linéaires** en ce sens.

4. UN POINT DE VUE GÉNÉRAL : POURQUOI TANT D'INTÉGRALES PREMIÈRES? POURQUOI UNE COURBE?

Reprenons nos équations d'Euler-Poisson. Le produit vectoriel est vraiment trop typique de $\mathbb{R}^3$. On remplace donc les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ par des matrices antisymétriques $\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$ et le produit extérieur $u \wedge v$ devient $[A, B] = AB - BA$ (exercice).

J'écris

$$\begin{cases} \dot{\Gamma} & = [\Gamma, \Omega] \\ \dot{M} & = [M, \Omega] + [\Gamma, L] \end{cases}$$

ça fait déjà plus chic.

Maintenant, j'aimerais avoir **une seule** équation. Je le fais brutalement

$$(7) \qquad (\Gamma + \lambda M + \lambda^2)\dot{} = [\Gamma + \lambda M + \lambda^2 L, \Omega + \lambda L]$$

en introduisant une variable formelle λ.

Je dis que **dans le cas où la toupie est symétrique**, (7) est équivalent à $(E-P)$.

Le seul problème est le terme en λ^2 : comme L est constant, on a 0 à gauche, et à droite on a $[L, \Omega] + [M, L]$, soit encore $[M - \Omega, L]$ qui est nul **parce que** la toupie est symétrique.

En d'autres termes, notre système est mis sous "forme de Lax"

$$(L) \qquad \dot{A(\lambda)} = [A(\lambda), B(\lambda)]$$

où A et B sont des polynômes (en λ) de matrices, dépendant du temps (N.B. : la matrice B est aussi une fonction de A, cette équation différentielle est bien **non-linéaire** en général).

Considérons maintenant le polynôme caractéristique

$$\text{dét } (A(\lambda) - \mu \text{ Id}) = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}(\lambda)\mu^i$$

de la matrice $A(\lambda)$.

A priori, les $a_i(\lambda)$ sont des fonctions **du temps** t, comme A. Du fait de l'équation (L), il **n'en est rien** : $a_i(\lambda)$ est, au signe près, un polynôme symétrique élémentaire des valeurs propres de $A(\lambda)$: $a_i(\lambda) = \pm(\mu_1 \cdots \mu_i + \cdots)$. Montrer que tous les $a_i(\lambda)$ sont constants est équivalent à montrer que les $n_i(\lambda) = \Sigma \mu_j^i$ sont constants. Maintenant

$$n_i(\lambda) = \operatorname{tr}[A(\lambda)^i]$$

et

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} n_i(\lambda) &= \frac{d}{dt} \operatorname{tr} A(\lambda)^i \\ &= i \operatorname{tr}[A(\lambda)^{i-1} \dot{A(\lambda)}]\ (*) \\ &= i \operatorname{tr}(A(\lambda)^{i-1}[A(\lambda), B(\lambda)]) \\ &= i \operatorname{tr}[A(\lambda)^i, B(\lambda)] \\ &= 0 \text{ car c'est la trace d'un crochet.}\end{aligned}$$

...on a donc **plein** d'intégrales premières ...et aussi une courbe, d'équation $\text{dét}(A(\lambda) - \mu Id) = 0$!

Autrement dit, les calculs que nous avons faits dans le cas de la toupie symétrique ne sont qu'un cas particulier d'une théorie bien générale et bien belle.

Vérifions : si $A(\lambda) = \Gamma + \lambda M + \lambda^2 L$,

$$\text{dét}(A(\lambda) - \mu \mathrm{Id}) = \mu(\mu^2 + ||\Gamma + \lambda M + \lambda^2 L||^2$$

dans cette écriture, $\Gamma + \lambda M + \lambda^2 L$ est redevenu un vecteur de $\mathbb{R}^3$. $A(\lambda)$ est une matrice réelle antisymétrique, elle admet 0 comme valeur propre, les deux autres sont imaginaires conjuguées.

On oublie le facteur μ. Reste comme équation pour la courbe $\mathcal{E}'$

$$\begin{aligned} 0 &= \mu^2 + ||\Gamma + \lambda M + \lambda^2 L||^2 \text{ on développe} \\ &= \mu^2 + 1 + 2(\Gamma.M)\lambda + (||M||^2 + 2\Gamma.L)\lambda^2 + 2(L.M)\lambda^3 + \lambda^4 \\ &= \mu^2 + 1 + 2c\lambda + H'\lambda^2 + 2K\lambda^3 + \lambda^4 \end{aligned}$$

On retrouve ainsi nos intégrales premières.

Maintenant, la courbe. Tout à l'heure, j'ai vu apparaître, bien naturellement la courbe $\mathcal{E}$ d'équation $y^2 = f(x)$. La partie réelle de $\mathcal{E}$ avait deux composantes dont on a discuté les relations avec les mouvements réels de la toupie.

Notre nouvelle courbe ...ne contient pas de point réel! Elle est pourtant bien intéressante. Je vous avais prévenus depuis le début de l'exposé : on n'arrive à rien dans cette théorie en restant complètement réel.

Notre courbe $\mathcal{E}'$ est une respectable courbe **complexe**, elle mérite d'être appelée une courbe **réelle** (son équation est réelle) même si sa partie réelle est vide. Pour

(*) à cause des propriétés de la trace, tout se passe comme en commutatif grâce à (L).

vous convaincre à la fois qu'on n'est **pas** en train de parler de l'ensemble vide, et à la fois qu'il y a un rapport entre ce dont je parle maintenant et les calculs que j'ai faits avant : à la courbe $\mathcal{E}'$ — comme à toute courbe — on sait associer un tore Jac $\mathcal{E}'$ ici un $\mathbb{C}/\Lambda$ — sa jacobienne. Ce qui se passe ici.

- Jac $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$ (c'est un isomorphisme réel).
- C'est sur le **tore** Jac $\mathcal{E}'$, avec sa structure affine, que je résous les équations. La boucle est bouclée.

En plus des systèmes mécaniques comme certaines toupies, cette méthode s'applique à beaucoup d'équations différentielles — celle donnant les géodésiques d'un ellipsoïde de $\mathbb{R}^3$ par exemple — et d'équations aux dérivées partielles, comme la célèbre Korteweg de Vries. Ca ne sert pas seulement à étudier l'équation différentielle, mais aussi, par un mouvement de balancier, les courbes et leurs jacobiennes.

RÉFÉRENCES

ARNOLD V.I. *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique, éd. Mir,* 1974 *(pour les parties 1, 2 et 3).*

VERDIER J.L. *Séminaire Bourbaki,* 1980 *(pour les parties 3 et 4).*