RECHERCHE DE MÉTHODES DE DÉMONSTRATION LIÉES À LA RELATION DE CHASLES

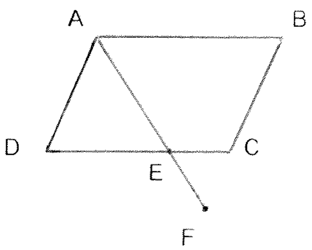
GROUPE INTELLIGENCE ARTIFICIELLE - IREM STRASBOURG

Marie-Agrès EGRET, Gérard KUNTZ, Gérard MÉTIVIER et Nicole VOGEL

INTRODUCTION

Dans le cadre d'une réflexion (1) que nous menons à l'IREM sur les démarches de démonstration en géométrie, nous tentons de mettre en évidence des plans de démonstration. Ceux-ci pourraient par la suite servir de modèles experts dans un "tuteur intelligent". Un logiciel capable de guider l'élève dans son apprentissage doit en effet s'adapter à la démarche de celui-ci et lui proposer une aide en cas éventuel d'échec.
Voici, par exemple, comment établir un plan de démonstration dans les exercices dont le but est de démontrer l'égalité ou la colinéarité de deux vecteurs.

Nous commencerons par exposer la méthode abstraite illustrée par l'exemple suivant :



Hypothèses : ABCD est un parallélogramme ;

$$\overrightarrow{CE} = 1/3\overrightarrow{CD} \ ; \ \overrightarrow{AF} = 3/2\overrightarrow{AE}.$$

Conclusion (à démontrer) : B, C, F *sont alignés.*

Dans une deuxième partie, nous développerons deux autres exemples et nous proposerons au lecteur d'appliquer la méthode à une série d'exercices.

1.— EXPOSÉ DE LA MÉTHODE

Pour commencer, **on traduit l'énoncé** :
— *on traduit la conclusion* en une relation entre des vecteurs, si possible une égalité.

Dans notre exemple : $\overrightarrow{CF} = k\overrightarrow{BC}$.

— *par contre, on ne traduit les hypothèses* qu'au fur et à mesure des besoins, car il y a en général trop de façons de les expliciter pour les écrire toutes au départ. Par exemple, il est difficile de savoir sous quelle forme on utilise la propriété "I est le milieu du segment $[AB]$".

(1) D. GUIN : Réflexions sur les logiciels d'aide à la démonstration en géométrie, in : "*Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*", éd. IREM de Strasbourg, Vol. 2 (1991).

Puis, **on recherche un plan de démonstration** :

1. On essaie les deux tests suivants. Si l'un des deux réussit, la démonstration est terminée

Test 1 : les deux vecteurs sont sous la forme $\overrightarrow{u}$ et $k\overrightarrow{u}$.

Remarques :

— cas particulier : les deux vecteurs sont égaux;

— le vecteur $\overrightarrow{u}$ peut avoir une écriture plus complexe (par exemple, les deux vecteurs peuvent être $\overrightarrow{u} = 7\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ et $k\overrightarrow{u} = 14\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC}$).

Test 2 : des propriétés géométriques élémentaires de la figure permettent de prouver que des représentants des deux vecteurs ont des supports parallèles.

Dans l'exemple : aucun des deux tests ne réussit immédiatement.

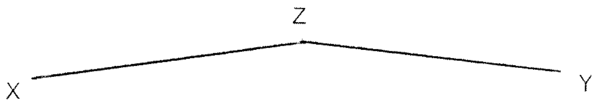
2. En cas d'échec (hélas fréquent!) de ces tests :

2.1. On décompose l'un des vecteurs ou les deux à l'aide de la relation de Chasles

Pour décomposer un vecteur $\overrightarrow{XY}$, on essaie de reconnaître l'une des configurations suivantes à l'aide des propriétés de la figure :

Configuration 1 :

— Si on a la situation

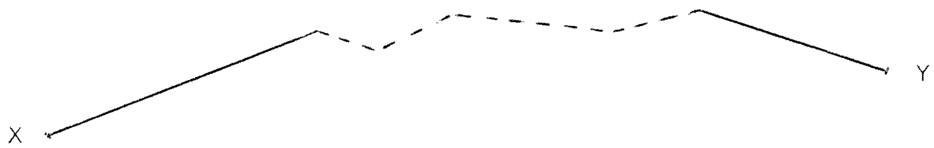


ET les vecteurs $\overrightarrow{XZ}$ ou $\overrightarrow{ZY}$ possèdent des propriétés (P) (qui se traduisent par des relations vectorielles) résultant des hypothèses ou des étapes précédentes.

— Alors on applique la relation de Chasles en introduisant le point Z dans $\overrightarrow{XY}$.

Configuration 2 :

— Si on a la situation



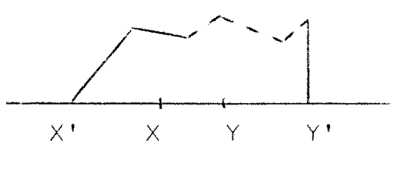
ET certains segments d'une ligne brisée d'origine X et d'extrémité Y possèdent des propriétés (P) découlant des hypothèses ou des étapes précédentes.

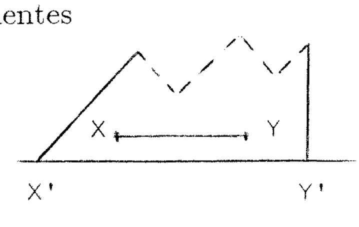
— Alors on applique la relation de Chasles en introduisant les sommets de la ligne brisée dans $\overrightarrow{XY}$.

Configuration 3 :

— Si $\overrightarrow{XY}$ est colinéaire à un vecteur $\overrightarrow{X'Y'}$

ET $\overrightarrow{X'Y'}$ est dans l'une des configurations 1 ou 2 précédentes





— Alors on exprime $\overrightarrow{XY}$ en fonction de $\overrightarrow{X'Y'}$ et on applique la relation de Chasles à $\overrightarrow{X'Y'}$.

Dans l'exemple : on décompose $\overrightarrow{CF}$: on reconnaît la configuration 1.

$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EF}.$$

2.2. On applique les propriétés (P) aux vecteurs apparus dans la décomposition du 2.1. C'est à ce stade que l'on traduit les hypothèses utiles en égalités vectorielles.

Dans l'exemple : on applique les propriétés (P) de $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{EF}$:

$$\overrightarrow{CF} = 1/3\overrightarrow{CD} + 1/2\overrightarrow{AE}.$$

2.3. On réduit le nombre de vecteurs présents après l'étape 2.2. Pour cela, on essaie d'appliquer successivement les règles suivantes :

Règle 1 : S'il apparaît des sommes $k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC}$, on les remplace par $k\overrightarrow{AC}$, sauf si l'on vient de faire la décomposition inverse.

Règle 2 : On exprime tous les vecteurs dont la colinéarité est immédiate en fonction d'un seul.

Règle 3 : S'il reste plus de deux vecteurs après application des règles 1 et 2, on choisit deux vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ et on exprime tous les autres en fonction de ceux-là. Pour cela, on refait les étapes 2.1 et 2.2 avec une contrainte supplémentaire : il ne faut plus faire apparaître que les deux vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$. On réécrit ensuite les deux vecteurs à comparer en fonction de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

Dans l'exemple : nous avons maintenant trois vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AE}$. Les règles 1 et 2 ne s'appliquent pas.

Règle 3 : *On retient $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$. On exprime $\overrightarrow{AE}$ à l'aide de ces deux vecteurs.*

Retour à 2.1. : on décompose $\overrightarrow{AE}$: on reconnaît la configuration 1.

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}.$$

Retour à 2.2. On applique les propriétés (P) de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DE}$ pour les exprimer en fonction de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC} + 2/3\overrightarrow{CD}.$$

On réécrit $\overrightarrow{CF}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$.

$$\overrightarrow{CF} = 1/3\overrightarrow{CD} + 1/2(\overrightarrow{BC} + 2/3\overrightarrow{DC}) = 1/2\overrightarrow{BC}.$$

2.4. Quand il reste au plus deux vecteurs, on revient aux tests du paragraphe 1.

Dans l'exemple : le test 1 est réussi.

Commentaires

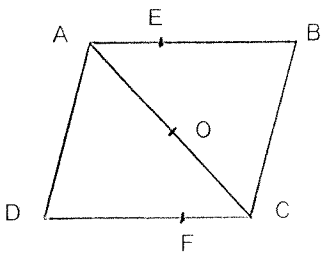
• *On peut bien sûr faire d'autres choix pour la traduction de la conclusion, ainsi que pour les deux vecteurs retenus au 2.3.*

• *Dans le 2.1., nous avons décomposé $\overrightarrow{CF}$ et pas $\overrightarrow{BC}$. Nous n'avons pas trouvé de règle simple permettant de décider d'avance s'il faut décomposer un vecteur ou les deux. Cependant $\overrightarrow{BC}$ apparaît comme vecteur privilégié de la figure.*

2.— AUTRES EXEMPLES

Voici quelques autres exercices classiques tirés de manuels de seconde. La méthode détaillée dans le paragraphe précédent constitue un bon guide pour aboutir à une solution dans un grand nombre de cas, même si elle n'est pas la plus élégante ni la plus rapide.

Exemple 1



Hypothèses : $ABCD$ est un parallélogramme,
$\overrightarrow{AE} = 1/3\overrightarrow{AB}$,
$\overrightarrow{CF} = 1/3\overrightarrow{CD}$,
O est milieu de $[AC]$.
Conclusion : E, O, F sont alignés.

• On traduit la conclusion : $\overrightarrow{OE} = k\overrightarrow{OF}$.
• Plan : pour faciliter la lecture, nous n'indiquons plus les étapes qui ne s'appliquent pas.

2.

2.1. Décomposition de $\overrightarrow{OE}$ (configuration 1) :

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE}$$

et de $\overrightarrow{OF}$ (configuration 1) :

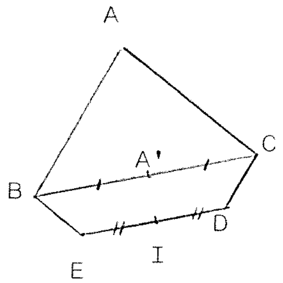
$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CF}.$$

2.2. $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + 1/3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + 1/3\overrightarrow{CD}$

2.3. Règle 2 : $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{CO} + 1/3\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + 1/3\overrightarrow{CD}$.

2.4. Le test 1 est réussit.

Exemple 2 :



Hypothèses : A' est milieu de $[BC]$
$\overrightarrow{CD} = 1/3\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{BE} = 1/3\overrightarrow{AC}$
I est milieu de $[ED]$.
Conclusion : A, A' et I sont alignés.

- On traduit la conclusion : $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AA'}$.
- Plan

2.

2.1. On décompose $\overrightarrow{AI}$ (configuration 2) :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EI}$$

et $\overrightarrow{AA'}$ (configuration 1) :

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'}.$$

2.2. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + 1/3\overrightarrow{AC} + 1/2\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + 1/2\overrightarrow{BC}$.

2.3. **Règle 2 :** $\overrightarrow{BC}$ semble colinéaire à $\overrightarrow{ED}$, mais il faudrait utiliser la règle 3 pour le prouver.

Règle 3 : retenons les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Retour à 2.1. On décompose $\overrightarrow{ED}$ (configuration 2).

$$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$$

et $\overrightarrow{BC}$ (configuration 1) :

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}.$$

Retour à 2.2. $\overrightarrow{ED} = -1/3\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 1/3\overrightarrow{AB} = -2/3\overrightarrow{AB} + 2/3\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Réécriture de $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AA'}$.

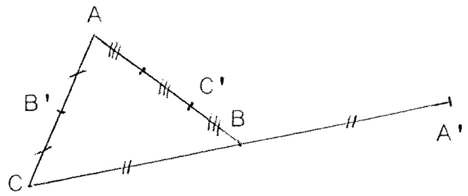
$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + 1/3\overrightarrow{AC} - 1/3\overrightarrow{AB} + 1/3\overrightarrow{AC} = 2/3\overrightarrow{AB} + 2/3\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} - 1/2\overrightarrow{AB} + 1/2\overrightarrow{AC} = 1/2\overrightarrow{AB} + 1/2\overrightarrow{AC}$.

2.4. Le test 1 réussit.

La solution proposée ici est relativement longue, mais dans cet exercice, de caractère inhabituel, une recherche non guidée par une méthode est hasardeuse et en tous cas délicate.

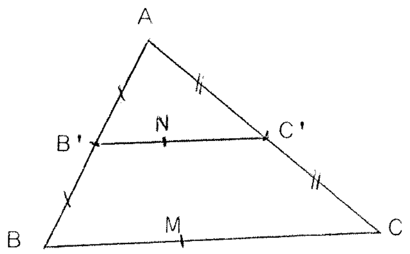
Nous proposons au lecteur de tester la méthode avec les exercices suivants :

Exercice 1 :



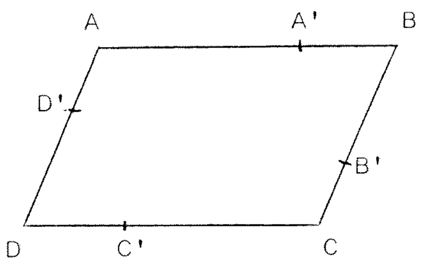
Hypothèses :
A' est le symétrique de C par rapport à B
B' est le milieu de $[AC]$
$\overrightarrow{BC'} = 1/3\overrightarrow{BA}$
Conclusion : A', B', C' sont alignés.

Exercice 2 :



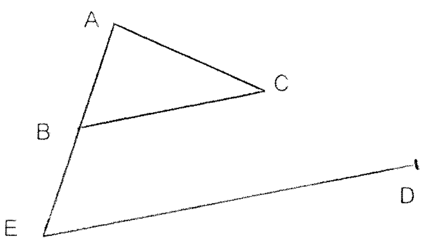
Hypothèses :
B' est le milieu de $[AB]$
C' est le milieu de $[AC]$
$\overrightarrow{B'N} = 2/5\overrightarrow{B'C'}$
$\overrightarrow{BM} = 2/5\overrightarrow{BC}$
Conclusion :
A, N, M sont alignés.

Exercice 3 :



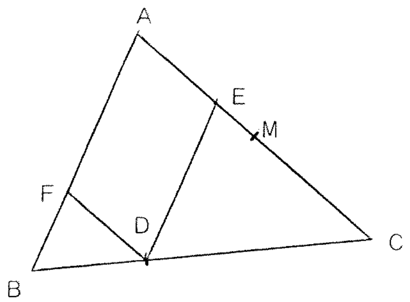
Hypothèses :
$ABCD$ est un parallélogramme.
$\overrightarrow{AD'} = k\overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{BA'} = k\overrightarrow{BA}$
$\overrightarrow{CB'} = k\overrightarrow{CB}$
$\overrightarrow{DC'} = k\overrightarrow{DC}$.
Conclusion :
$A'B'C'D'$ est un parallélogramme.

Exercice 4 :



Hypothèses :
$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BA}$
$\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BC}$
Conclusion :
C est le milieu de $[AD]$.

Exercice 5 :



Hypothèses :
$\overrightarrow{CD} = 2/3\overrightarrow{CB}$
E est la projection de D sur (AC) parallèlement à (AB).
F est la projection de D sur (AB) parallèlement à (AC).
M est le milieu de $[AC]$.
Conclusion :
$(FE) \parallel (BM)$

CONCLUSION

Il ne s'agit pas d'enseigner la méthode exposée ici telle quelle : cependant, il peut être utile pour un enseignant de l'adapter pour aider l'élève à acquérir un savoir-faire dans ce domaine. On peut remarquer qu'il y a en général plusieurs choix de décomposition aboutissant à une solution plus ou moins rapide. Cette méthode n'est donc pas un algorithme mais un guide. Des démarches analogues ont été réalisées (*) et sont possibles dans un certain nombre de domaines mathématiques enseignés au lycée (comme, par exemple, la cocyclicité, le calcul intégral ...).

(*) A. ROBERT, J. ROGALSKI, R. SAMURCAY : Enseigner des méthodes, éd. IREM Paris-Sud.