A VOS STYLOS

PROBLÈME 20

Énoncé

Calculer

$$\sum_{n=0}^{p}(-1)^{p-n}\frac{n^p}{n!(p-n)!}$$

et en déduire $\sum_{n\geq 0}\frac{n^n}{n!}z^n$.

Solutions

Nous remercions D. Dumont, qui a donné une solution partielle, et J. Zeng, qui a donné deux solutions différentes, toutes deux extrêmement concises. Nous recopions ci-dessous les deux solutions de Zeng, en étoffant un peu la première pour en rendre la lecture plus aisée.

Première solution :

Soit $E = \{1,\ldots,p\}$. Pour $n \leq p$, $p!\frac{n^p}{n!(p-n)!}$ est le nombre de manières de choisir une partie A de E à n éléments et une application φ de E dans A, donc

$$\begin{aligned} p!\sum_{n=0}^{p}(-1)^{p-n}\frac{n^p}{n!(p-n)!} &= \sum_{A\subset E}\sum_{\varphi\in AE}(-1)^{|E-A|} \\ &= \sum_{\varphi\in E^E}\sum_{\varphi(E)\subset A\subset E}(-1)^{|E-A|} = \sum_{\varphi\in E^E}0^{|E-\varphi(E)|} \end{aligned}$$

est égal à $p!$, nombre de surjections de E sur lui-même. Il en résulte que pour tout $p \geq 0$

$$\sum_{n=0}^{p}(-1)^{p-n}\frac{n^p}{n!(p-n)} = 1.$$

Nous avons ainsi une identité dépendant d'un paramètre entier p, c'est-à-dire une suite d'identités. Il est tentant de la transformer en une seule identité entre séries entières : multipliant donc les deux membres par x^p et sommant en p, on obtient pour $|x| < 1$

$$\sum_{p\geq 0}x^p\sum_{n=0}^{p}(-1)^{p-n}\frac{n^p}{n!(p-n)!} = \frac{1}{1-x}.$$

Quelques manipulations (justifiées plus bas) transforment ceci en

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= \sum_{m,n\geq 0} (-1)^m \frac{n^{m+n}}{n!m!} x^{m+n} \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{(nx)^n}{n!} \sum_{m\geq 0} (-1)^m \frac{(nx)^m}{m!} = \sum_{n\geq 0} \frac{(nx)^n e^{-nx}}{n!}.\end{aligned}$$

En définitive, pour $|z| < \frac{1}{e}$, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!} z^n$ a pour somme $\frac{1}{1-x}$, où x est la solution plus petite que 1 de l'équation $xe^{-x} = z$. Le calcul est justifié pour $|x|$ assez petit (plus précisément pour $|xe^x| < \frac{1}{e}$) par la sommabilité de la série double, mais le résultat est évidemment encore valable dans tout le disque de convergence.

Deuxième solution :

Pour tout polynôme $f(x)$ en x, on dénote Δ l'opérateur de différence finie : $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$. On vérifie facilement par récurrence que pour tout $p \geq 1$

$$\Delta^p f(x) = \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} (-1)^{p-n} f(x+n),$$

et aussi $\Delta^p x^p = p!$. Prenant $f(x) = x^p/p!$, on a

$$\Delta^p \left(\frac{x^p}{p!}\right) = \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} (-1)^{p-n} \frac{(n+x)^p}{p!} = 1.$$

Ceci équivaut à l'identité suivante :

$$\frac{e^{xy}}{1-y} = \sum_{n\geq 0} (n+x)^n \frac{z^n}{n!} \text{ avec } z = y \exp(-y).$$

Cette formule est due à Euler. Dans la littérature moderne elle est souvent démontrée par la formule d'inversion de Lagrange. Enfin, on notera que $S(n,k) = \frac{1}{k!}\Delta^k 0^n$ est le nombre de Stirling de $2^{\text{ième}}$ espèce.

PROBLÈME 21

Énoncé (proposé par D. Dumont)

Soient $2n$ écolières qui partent en promenade quotidienne en rang deux par deux et souhaitent changer de voisine chaque jour. Trouver un algorithme qui fasse en sorte qu'en $2n-1$ jours chacune ait eu pour voisine chacune des autres une fois et une seule. (Ce problème s'apparente au problème dit "des écolières de Kirkmann".)

Indication

Privilégier l'une des écolières et faire jouer un rôle symétrique aux $2n - 1$ autres.

PROBLÈME 22

Énoncé

Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ indéfiniment dérivable, telle que, pour tout x rationnel, la dérivée $n^{\text{ième}}$ $f^{(n)}(x)$ soit un rationnel pour n pair et un irrationnel pour n impair ?

PROBLÈME 23

Énoncé (proposé par J.-M. Nagel)

Dans un jeu de 52 cartes battu, quelle est la probabilité pour qu'une dame et un roi soient voisins immédiats ?

> La comparaison du sport avec l'école est révélatrice du décalage de l'idéal de pureté associé au sport. La plupart des reproches adressés régulièrement à l'école seraient sans doute encore plus justifiés à l'égard du sport : élimination des faibles, sélection, hiérarchie, élitisme, bachotage, championnite, rigidité et centralisation. Or le sport traverse ces volées de critiques en toute impunité. Les représentations sociales du sport bénéficient d'une stupéfiante complaisance.
>
> Pierre PARLEBAS
> Le sport, fait social.
> La Recherche, Août 1992.