A VOS STYLOS

RETOUR SUR LE PROBLÈME 19

Monsieur E. EHRHART propose la conjecture suivante : "Soit $\mathcal{C}$ un ensemble convexe, fermé de l'espace. On peut construire un parallélépipède P inclus dans $\mathcal{C}$ tel que le volume de P soit supérieur ou égal aux $4/9$ du volume de $\mathcal{C}$".

Cette conjecture étend à l'espace le problème n° 19 relatif au plan où il s'agissait d'inclure un parallélogramme P d'aire supérieure ou égale à la moitié de l'aire du convexe plan $\mathcal{C}$. On pourrait aussi conjecturer qu'en dimension 3 la meilleure constante est $1/3$, obtenue en inscrivant dans un tétraèdre un parallélépipède ayant un sommet et trois faces en commun avec le tétraèdre.

PROBLÈME 21

Énoncé (proposé par D. DUMONT)

Soient $2n$ écolières qui partent en promenade quotidienne en rang deux par deux et souhaitent changer de voisine chaque jour. Trouver un algorithme qui fasse en sorte qu'en $2n-1$ jours chacune ait eu pour voisine chacune des autres une fois et une seule. (Ce problème s'apparente au problème dit "des écolières de Kirkmann".)

Solution

Nous avons reçu deux solutions. La première est de F. Pluvinage :

Puisqu'il s'agit de former des couples, le registre naturel à utiliser est celui des tableaux. On considère un tableau de taille $(2n-1)\times(2n-1)$. Ce tableau, rempli convenablement par les entiers de 1 à $(2n-1)$, désignant les numéros des journées, fournira la matrice des rencontres. Les permutations circulaires de $\{1,2,\ldots,2n-1\}$ conduisent à une matrice symétrique dont chaque ligne et chaque colonne contient tous les entiers de 1 à $(2n-1)$. En termes de rencontres, on y lit par exemple que les individus 2 et 3 seront voisins le jour 4. Les défauts de cette matrice sont au nombre de 2 : l'individu $(2n)$ y est "oublié" et une date est assignée à des "auto-rencontres", comme celle de 2 avec 2 le jour 3. Comme chacun sait, deux défauts ont parfois le bon goût de se compenser : c'est précisément le cas ici, puisqu'il suffit de substituer les rencontres avec l'individu "oublié" aux "auto-rencontres" intempestives. Les nombres de la diagonale principale de la matrice désignent finalement les dates des rencontres avec $(2n)$ et tout le monde est satisfait.

	1	2	3	...	2n - 3	2n - 2	2n - 1
1	*1*	2	3	...	2n - 3	2n - 2	2n - 1
2	2	*3*	4	...	2n - 2	2n - 1	1
3	3	4	*5*	...	2n - 1	1	2
...	...						...
2n - 3	2n - 3	2n - 2	2n - 1	...	*2n - 6*	2n - 5	2n - 4
2n - 2	2n - 2	2n - 1	1	...	2n - 5	*2n - 4*	2n - 3
2n - 1	2n - 1	1	2	...	2n - 4	2n - 3	*2n - 2*

Matrice des dates de rencontres (en italiques : dates des rencontres avec $2n$)

La seconde solution nous a été envoyée indépendamment par C. Pagano et X. Yadol :

Une écolière A se place au centre d'un cercle sur lequel les $2n-1$ autres écolières occupent les sommets d'un polygone régulier. On établit un couplage de la manière suivante : l'écolière A se joint à une écolière quelconque X et les écolières situées aux extrémités d'une corde perpendiculaire au rayon AX se joignent. Le lendemain, on fait pivoter toutes les arêtes de $360°/(2n-1)$. En $2n-1$ jours, tous les couplages possibles ont été effectués.

Un instant de réflexion montre que ces deux algorithmes sont en fait identiques, la personne placée par Pluvinage au centre du cercle étant l'écolière numéro $2n$.

C. Pagano nous signale que cet algorithme est décrit – dans un autre langage – par Oystein Ore dans "les graphes et leurs applications", pages 51 à 54 (Dunod, collection sigma).

Il remarque aussi que, si l'on désigne par B, C, D, etc. les écolières qui donnent la main à l'écolière A les 1er, 2e, 3e jour, etc., il n'y a qu'un calendrier possible pour quatre écolières et exactement six calendriers différents pour six écolières.

PROBLÈME 22

Énoncé

Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ indéfiniment dérivable, telle que, pour tout x rationnel, la dérivée $n^{\text{ième}}$ $f^{(n)}(x)$ soit un rationnel pour n pair et un irrationnel pour n impair ?

Indication

La réponse est oui.

PROBLÈME 23

Énoncé (proposé par J.-M. Nagel)

Dans un jeu de 52 cartes battu, quelle est la probabilité pour qu'une dame et un roi soient voisins immédiats?

PROBLÈME 24

Énoncé

Un faisceau de droites parallèles fournit un exemple de partition du plan en droites.

a) Existe-t-il une partition du plan en cercles (non dégénérés, c'est-à-dire de rayon ni nul ni infini)?

b) Existe-t-il une partition du plan en figures formées chacune de deux cercles (distincts et non dégénérés) tangents intérieurement ou extérieurement?