RÉFLEXIONS PRÉLABLES À UNE ÉTUDE DES OBSTACLES

Georges GLAESER

I. Science ou systèmes idéologiques

La didactique expérimentale des mathématiques (D.E.M.) se nourrit de l'étude des **difficultés** d'apprentissage et des **erreurs des élèves**. Avant d'en aborder l'étude, elle peut prendre le temps de jeter un regard sur l'histoire des sciences qui se sont trouvées devant des tâches analogues.

Pendant des millénaires, la médecine empirique rêvait d'une **théorie générale des maladies** et d'une **belle typologie des symptômes**.

De même, la pré-physique s'est lancée, tête baissée, dans une classification des substances parmi lesquelles elle distinguait les "éléments".

Pour Empédocle, V^{e} siècle avant J.-C., c'étaient "la terre, l'eau, l'air, le feu", d'où d'autres penseurs ont déduit "le chaud et le froid, le sec et l'humide" ou encore "le vide et le plein", "la couleur", "l'âme", etc...

L'humanité a chèrement payé ces anticipations hâtives, puisqu'au XVIII^{e} siècle des "physiques" laissent encore des séquelles même dans l'esprit de grands savants (relisez attentivement Bachelard (BA)).

Or, si de nos jours, la science étudie encore, dans des chapitres séparés certaines de ces notions, elle n'en retient **aucune** comme élément premier.

> **L'impatience théorique a souvent constitué un frein puissant qui contraria les progrès ultérieurs.**

Pour la didactique, la tentation est grande de brosser à grands traits une **théorie des obstacles** autour de laquelle nos connaissances s'organiseraient harmonieusement. Il est certainement indispensable de placer nos recherches futures en perspectives, et d'imaginer par prémonition les progrès futurs.

Mais de grâce, chers amis, **n'oubliez pas Empédocle!** Ne prenons pas pour argent comptant des supputations hâtives. Ne vous laissez pas séduire par le verbe, ou par l'analogie facile.

Notre didactique doit opposer radicalement les deux attitudes suivantes :

> **A) Examen scrupuleux de quelques situations en rapport avec la génèse des concepts, des connaissances ou des habitudes qui interviennent au cours des apprentissages mathématiques. Le traitement de ces phénomènes se soumet aux exigences de l'esprit scientifique.**

Article publié dans le "Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique" de l'I.M.A.G. (Grenoble) n° 56 (1984) et publié avec l'aimable autorisation de l'auteur et de l'I.M.A.G.

B) Dissertation littéraire qui ne s'appuie que sur des opinions a priori, sans distinguer le rêve et la réalité, ni la constatation factuelle de l'anticipation prophétique.

Tous les didacticiens (y compris moi-même) prennent tour à tour les deux attitudes. Ils se distinguent entre eux, par le degré de foi qu'ils attachent aux conclusions tirées de l'attitude B).

Cette remarque s'applique particulièrement à Jean Piaget, précurseur de notre science. Il a découvert beaucoup de phénomènes importants grâce à l'attitude A). Mais, ce philosophe succomba plus d'une fois au démon des généralisations hâtives. Une tâche urgente qui incombe à notre D.E.M. est de procéder à un réexamen de l'héritage piagétien, pour distinguer ce qui s'appuie sur l'expérience de ce qui dérive d'une idéologie suspecte a priori.

II. Quelques dichotomies plausibles

En ce qui concerne les erreurs et les difficultés, nous sommes confrontés à **un chaos de constatations disparates**. Parmi les faits qui nous sont proposés, certains sont des fictions inventées de toute pièce, ou des annecdotes plus ou moins significatives.

D'autres sont rapportés avec trop peu de précision. Par exemple, on nous relate des exemples d'erreurs commises, sans que nous ayons des renseignements suffisants sur le sort ultérieur de l'incident : (on aurait envie de distinguer une infirmité rapidement guérie, de celles qui persistent en dépit de tous les traitements).

Certaines affirmations sont fréquemment confirmées par une masse de témoignages indépendants, ce qui leur confèrent un label de sérieux : cependant, il est des témoignages collectifs qui ne conduisent pas nécessairement à des certitudes (pensez aux O.V.N.I.).

Enfin, nous connaissons des faits qui ont été observés avec une minutie pastorienne, en prenant toutes les précautions expérimentales qui s'imposent.

Il s'agit de décider, **a priori**, mais **provisoirement**, ce que nous rejetons hors de notre domaine d'étude. Puis, dans le fatras restant, on opèrera des distinctions : considérons nous que la terre et le feu sont des "éléments" de même nature?

Dans ce qui suit, je me contente de poser beaucoup de questions, puis d'examiner des éléments de réponses plausibles, en opposant le pour et le contre.

Le seul point sur lequel je serai affirmatif est, qu'en **l'état actuel, nous n'avons pas les moyens de trancher!**

III. Le fortuit et le significatif

Parmi les faits qui nous sont proposés, quels sont ceux dont la didactique n'a pas à se préoccuper provisoirement?

La question a surgit, lorsque j'ai lu le travail de Jean Tonnelle "Le monde clos de la factorisation" (I.R.E.M. de Marseille, 1979). Il s'agit d'une réflexion qui s'appuie

essentiellement, sur un seul fait curieux, observé sur deux élèves :
"*Ayant à factoriser $2a - 2x$, une collégienne propose*

$$2a - 2x = (\sqrt{2a} - \sqrt{2x})(\sqrt{2a} + \sqrt{2x})".$$

Ce fait présente-t-il assez d'importance pour mériter une étude didactique? J'avoue qu'à première vue, j'ai pensé que depuis que j'enseigne (1935), je ne me souviens pas d'avoir rencontré la même "déviation".

Puis, un événement personnel m'est revenu en mémoire. Lorsque j'étais en seconde, je m'étais beaucoup ennuyé à rédiger un devoir insipide où l'on posait, entre autre, la question : "Compléter le carré suivant... : $x^2 + 8x\ldots$"

Après avoir donné la réponse attendue, je me suis permis à titre de canular de faire la remarque de mauvaise foi : "Les carrés suivants répondent aussi à la question : $(x + \sqrt{8x})^2$ ou $(\sqrt{8x} + \frac{x^2}{2\sqrt{8x}})^2$.

Mon cher professeur, Albert Momal, manqua d'humour en cette occasion et me réprimanda vertement. On dirait aujourd'hui que j'avais transgressé le contrat didactique.

J'aurais tendance à considérer que le cas signalé n'est qu'une curiosité... Mais soyons méfiants : il existe des phénomènes rares (comme les gaz et les terres du même nom) dont la découverte a constitué un pas scientifique important.

IV. Symptômes et causes

La science moderne recherche souvent des interprétations cachées, à des phénomènes directement perceptibles. Jean Perrin nous invite à expliquer "**du visible compliqué par de l'invisible simple**" ("Les atomes", 1939).

Cette attitude, parfaitement légitime, nous incite à chercher derrière les fautes commises par nos "étudiants" des explications cachées, auxquelles on donnerait le nom d'**obstacle**. Mais c'est là que le problème commence à se poser : des explications cachées, on en trouve toujours! Mais est-on sûr que ces explications sont les bonnes?

La "théorie" (?) atomique des anciens a inspiré un des plus beaux monuments de la littérature latine (Le "De natura rerum" de Lucrèce). Mais qu'a-t-elle apporté à la science depuis Démocrite (5e siècle avant J.-C.) jusqu'à Dalton (1766-1844)? On trouvera dans "Les atomes" (déjà cité) les éléments d'une réflexion sur ce qui manque à un système idéologique chimérique pour devenir une théorie scientifique.

Je voudrais poser le problème de la recherche de l'explication cachée, en l'illustrant d'une de mes expériences personnelles, douloureuse.

Tous mes amis connaissent mon orthographe déplorable. Mon père, fin lettré et polyglotte de haut niveau, souffrait d'avoir donné le jour à un fils incapable d'écrire une page sans commettre des dizaines de lapsus.

Il m'infligeait des dictées, enragaient d'y trouver des fautes puériles qu'il me faisait souligner. Il m'ordonnait ensuite de recopier la dictée : je produisais alors un texte *d'où les dix fautes initiales avaient disparues aussitôt relayées par quinze fautes nouvelles! Ces séances se terminaient dans les cris et les larmes!*

Il essaya de me faire donner des leçons. On m'enseigna la grammaire, que je connaissais aussi bien qu'un autre. La règle d'accord des participes n'a jamais eu de secret pour moi ... L'ennui, c'est que j'oubliais de l'appliquer aux moments les plus imprévisibles.

J'en suis arrivé à la conclusion que mon infirmité ne peut s'expliquer en terme de mauvaises connaissances. Elle doit avoir des causes cachées d'une autre nature. Voilà cinquante ans que je cherche désespérément à comprendre. Certes, il doit y avoir **un** *ou plutôt* **des obstacles**, *mais lesquels?*

Des charlatans essaient de nous faire croire qu'ils sont compétents : leur seul apport a consisté à forger un néologisme : la **dysorthographie** *qui, à mon avis, ne fait que cacher leur ignorance.*

Ils prétendent voir un lien avec des défauts de latéralisation (et en effet, je suis un gaucher contrarié) mais nul n'a apporté, à ma connaissance, la preuve d'une corrélation entre l'infirmité signalée et la latéralisation (cf. Michel Lobrot "Trouble de la langue écrite et ses remèdes", ESF, 1977, pp. 58).

Ce genre de phénomènes se rencontre souvent en mathématiques. J'ai observé beaucoup d'élèves qui connaissaient bien, une à une, les règles du calcul algébrique (aussi bien que moi en ce qui concerne les marques du pluriel).

Ils transgressent les règles qu'ils connaissent bien d'une façon qui paraît aléatoire. Les enseignants, désarmés devant ce phénomène massif, s'en tirent en disant que ces élèves sont **distraits, qu'ils ne font pas attention**.

Cela ne m'explique toujours pas pourquoi je serais distrait lorsqu'il s'agit de ne pas écrire un conditionnel présent comme un futur et que je ne le serais pas pour multiplier deux polynômes.

En tout cas, vous reconnaîtrez que cette énigme pédagogique mérite autant l'attention que d'autres types d'erreurs et qu'il est insensé de décider que comme il ne s'agit pas d'un **obstacle** au sens de Pierre ou de Paul, il doit être éliminé du domaine de la didactique.

Une autre question doit aussi être posée. S'il est légitime de chercher des causes derrière des symptômes, doit-on accepter d'étudier des symptômes, en s'en tenant à la surface des choses? (Autrement dit, toute erreur qui ne s'expliquerait pas par des obstacles cachés sort-elle du champ de la didactique?).

Je pense qu'il convient de distinguer : si un élève se trompe dans une opération et qu'il apparaît qu'il n'a pas bien appris ses tables de multiplications, il n'y a pas de mystères. Et la didactique n'a guère besoin d'intervenir.

Mais, il existe beaucoup d'erreurs apparentes qui s'expliquent parfaitement par des faits apparents compliqués sans qu'il soit nécessaire d'aller chercher de "l'invisible simple".

Exemple : Il a été remarqué, que lorsqu'on doit exécuter une opération qui comporte plusieurs sous-opérations, et que l'on commence par les sous-opérations difficiles, on oublie souvent les sous-opérations faciles, (ou bien l'on commet des erreurs à leur propos).

C'est pourquoi par exemple, on peut recommander à un élève qui calcule la dérivée d'un quotient $\frac{U}{V}$ de commencer par écrire $\frac{(\quad)-(\quad)}{V^2}$ avant d'aborder le calcul du numérateur.

De même, pour factoriser une différence de carré compliquée on écrira : $\{(\quad)+(\quad)\} \times \{(\quad)-(\quad)\}$ avant de remplir les parenthèses intérieures.

Les raisons de cette faute ne sont pas mystérieuses. A la suite de la tension d'esprit que constitue l'exécution d'une tâche délicate, la fatigue provoque une défaillance de l'attention.

Il est tout à fait possible de confirmer expérimentalement cette remarque, et, en ce cas, d'inclure ce résultat dans la formation des enseignants. Et pourtant, il n'y a pas d'obstacles cachés là dedans.

V. L'instable et le persistant

Il est raisonnable de distinguer radicalement les erreurs qui cèdent immédiatement et définitivement à un enseignement approprié de celles qui persistent, en dépit d'efforts pédagogiques réitérés. Les premières sont souvent causées par une **ignorance** qu'il suffit de réparer.

Exemple : L'anecdote, citée par Josette Adda, concernant une fillette à qui on demande d'écrire, en toutes lettres les nombres suivants : 12, 30, 89 et qui répond sur son cahier : **treize, trente et un, quatre vingt dix.**

L'objectif qui était d'apprendre l'orthographe des adjectifs numéraux cardinaux est manifestement atteint.

Peut-être est-ce une méprise sur le sens du mot "suivant" qui déclenche le gag! Ou bien, s'agit-il d'un défaut de segmentation dans la lecture orale : on oublie de faire une pause entre "nombres suivants" et le mot "12". Mais dès que ce point aura été clarifié, la victime du malentendu sera la première à s'amuser de cet incident.

Les secondes, bien plus importantes pour le didacticien, sont des erreurs qui désarment le pédagogue le plus persévérant : le maître aura beau expliquer et réexpliquer. Il trouvera encore des copies où il lira :

$$0 \times a = a \qquad x^2 = 4 \Longrightarrow x = 2 \qquad \text{ou encore} \quad \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

C'est aux sources d'erreurs de ce type qu'il semble raisonnable d'attribuer le nom **d'obstacle** (qui offre de la résistance à la compréhension).

Cependant ces cas d'erreurs persistantes sont parfois de natures très différentes. La didactique expérimentale explore en profondeur toutes ces nuances. Elle n'imite pas ces médecines pré-scientifiques qui mettaient dans le même sac toutes les "fièvres", sans savoir en guérir aucune.

C'est d'ailleurs dans la bonne voie que s'était d'abord engagé G. Brousseau lorsqu'il commença à distinguer des obstacles épistémologiques, des obstacles didactiques, ontogénétiques ...(auxquels il aurait pû ajouter d'autres catégories) et qu'il observait méticuleusement divers cas d'échecs électifs en mathématique. Mais le démon des généralisations hâtives l'a entraîné dans une impasse.

VI. Croyances, archétypes et connaissances

Surestimant une remarque isolée parmi tant d'autres dans l'ouvrage de Bachelard "La formation de l'esprit scientifique" (1938), il restreint l'idée d'obstacle épistémologique, à l'influence de connaissances antérieures et caduques, qui s'oppose au progrès de l'apprentissage. En fait, dans la célèbre citation "On connaît **contre** une connaissance antérieure ... " (p. 14). L'idée cruciale s'exprime dans le mot **contre**. Elle ne fait presque pas intervenir les connaissances.

Pour pouvoir examiner si des "connaissances mal faites" sont encore des sources d'erreurs, il faudrait commencer par préciser ce qu'est une connaissance. Si ce mot désigne n'importe quoi on ne pourra rien en tirer de sérieux.

Je me bornerai à exiger, ici, que l'on oppose **connaissance** à **croyance**, et que l'on fasse quelques distinctions parmi les connaissances.

Une **connaissance ne s'acquiert qu'après un effort intellectuel de réflexion**. En passant aux antonymes, l'**ignorance** s'oppose à l'**irréflexion**. On peut ignorer la réponse à une question à laquelle on a longuement réfléchi. Mais il existe une autre forme d'absence de connaissance, dûe à l'absence totale d'intérêt pour le problème posé.

Exemple : L'engouement pour beaucoup de nos contemporains pour l'**astrologie**, véhiculé par l'idéologie ambiante, relève de croyances irréfléchies. Lorsqu'exceptionnellement une personne curieuse consacre beaucoup d'efforts à consulter les ouvrages de "sciences occultes", elle acquiert des connaissances hélas "malfaites".

Dans l'enseignement des mathématiques nous nous heurtons souvent à beaucoup de préjugés, ancrés dans les esprits sous l'influence de ce qu'on entend dire, sans y prendre garde.

L'"évidence" de la platitude de la terre que j'ai maintes fois observée chez les contemporains, ou au contraire la certitude de la rotondité de la terre, sont souvent des croyances.

La compréhension de la théorie des probabilités est souvent gênée par des croyances fantaisistes sur la guigne, la déveine, le mauvais sort et sur une prétendue "loi des séries" chère aux présentateurs de télévision.

Laurence Viennot signale beaucoup de croyances analogues génératrices d'erreurs.

Il convient de distinguer les **connaissances structurées** qui constituent des systèmes, des **connaissances isolées ou mosaïques** qui ne sont que des informations juxtaposées.

Exemple : La mécanique newtonnienne, corps très cohérent de doctrines, a longtemps opposé des obstacles à ceux qui voulaient comprendre la **relativité**.

Mais il y a des informations isolées, qui finissent par s'ancrer dans l'esprit, et à s'opposer ainsi à des informations plus avancées.

Ainsi, après avoir longtemps compris qu'une sphère de $\mathbb{R}^n$ *est un ensemble compact, on généralise abusivement cette conviction à* $\mathbb{C}^n$

A ces préjugés, que transmet la société, on peut ajouter les fameux **archétypes** qui interviennent dans les théories platonisantes de René Thom. On sait que la théorie des réminiscences de Platon décrit l'apprentissage comme une résurgence de connaissances "inconscientes" apparue avant même la naissance.

L'originalité de l'apport de Thom est dans l'explication de ces "connaissances initiales". Les principales morphologies-archétypes correspondent dans le nuage des sensations que l'enfant reçoit aux **singularités stables** qui se rencontrent dans tous les phénomènes qui apparaissent sur des modèles représentés par des variétés différentiables. C'est ainsi que **l'émission, l'absorption, la fuite, la capture** etc ... sont des phénomènes, que le nourisson cotoie, non seulement à sa naissance, mais au cours de la vie intra-utérine, dans toutes les civilisations.

L'optimisme de Platon-Thom ajoute, en outre, que ces archétypes sont nécessairement générateurs de "bonnes connaissances". A mon avis, cette dernière opinion est complètement fausse.

Par exemple, l'attrait des modèles linéaires, $f(a+b) = f(a) + f(b)$ apparaît spontanément chez beaucoup d'individus. Et c'est pour cela qu'il faudra contrarier énergiquement la tendance à admettre que $(a+b)^2$ est égal à a^2+b^2, et que $\sqrt{a+b}$ vaut $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. Dans ce cas là, l'esclave du "Ménon" de Platon, devra non pas se souvenir, mais oublier des évidences erronées.

Exemple : *J'ai rencontré un bûcheron illetré qui devait me livrer du bois, en stères, dans une cave étroite. Avec la meilleure bonne foi, il se mit à construire un empilement où le raccourcissement de 20 cm en largeur (1 m - 0,20 m en largeur) devait être compensé par un agrandissement de 20 cm en hauteur (1 m + 20 cm). Il était persuadé qu'il obtenait ainsi un stère.*

Cette croyance à la compensation était un **obstacle** à la compréhension. Mais il ne s'agissait certainement pas de connaissance scolaire antérieure (car notre homme n'était guère allé à l'école).

Bien entendu, il existe **aussi** beaucoup d'incompréhension induite par des connaissances "mal faites". Ainsi, après avoir longuement manipulé le calcul des entiers supérieurs à 1, l'élève acquiert la conviction que l'élévation au carré agrandi un nombre. Et il faudra ultérieurement lutter contre cette conviction. De même les extentions successives de l'idée de nombre vont véhiculer leur cortège d'obstacles. C'est bien une situation que la didactique doit étudier avec soin, lorsqu'elle prétend échafauder une théorie des erreurs : **ce n'est pas la seule**.

VII. Une autre voie

Pour poursuivre ces pistes de recherches, il existe bien d'autres possibilités. Je voudrais maintenant signaler une autre manière fructueuse d'envisager l'explication des "obstacles". C'est une suggestion de François Pluvinage, qui y réfléchis depuis plus de sept ans (puisqu'on trouve cette idée en germe déjà dans sa thèse). S'il ne la développe pas encore, c'est précisément parce que, plus que moi, il répugne aux généralisations hâtives, aux anticipations pré-scientifiques. Cependant, depuis qu'il y songe, les faits semblent confirmer son intuition.

Il s'appuie sur ce qu'il appelle le modèle du **double contrôle**. Ce modèle distingue dans l'activité d'un "étudiant" en situation d'apprentissage une **fonction algorithmique**, assumée par un schèma de traitement, et une **fonction heuristique** dévolue au schéma de contrôle.

L'activité du sujet s'effectue donc à deux niveaux : sur l'un d'eux, il exécute des tâches, et sur l'autre il apprécie la tâche exécutée, à la lumière des finalités et des objectifs.

Sur un grand nombre de situations signalées par François Pluvinage, ces deux niveaux sont apparents, bien qu'il soit très difficile de les définir en toute généralité.

Qu'il me suffise de dire, que dans ces conditions, un obstacle serait un disfonctionnement où l'ancien schéma de contrôle ne serait plus compatible avec un nouveau schéma de traitement.

Il se peut que mon infirmité orthographique ait quelque chose à voir avec ces notions. Pendant l'exécution de "l'algorithmique" qui consiste à traduire mes pensées en écriture, le contrôle de l'orthographe reste en panne.

VIII. Conclusion

Je souhaite que dans les années qui viennent, des échanges fréquents s'établissent entre didacticiens sur leurs constructions théoriques. Mais, dans l'état actuel, une suggestion publiée dans une revue sérieuse risque d'être prise pour argent comptant. Et il serait bon qu'à l'avenir on évite d'écrire que "les travaux de Jacques ou de Jojo ont démontrées que ..." lorsque l'on n'est pas certain qu'une preuve a été apportée, ni même qu'il s'agisse de "travaux" ...