

UNE PREUVE LUMINEUSE DE LA RELATION

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)^2$$

Dominique DUMONT

On sait qu'Euler a calculé la somme des inverses des carrés des entiers naturels et trouvé

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

par plusieurs méthodes dont aucune ne constitue une preuve rigoureuse au sens où on l'entend depuis le siècle dernier. Dans ce qui suit nous proposons une nouvelle preuve *à la manière d'Euler* de ce résultat, mais comme cette manière n'est plus guère appréciée de nos jours, nous laisserons aux lecteurs le soin de "justifier" cette preuve, ou le ferons ultérieurement.

Il existe de nombreuses démonstrations de l'identité d'Euler, elles consistent le plus souvent à utiliser un développement en série de Fourier (souvent tiré lui aussi des œuvres d'Euler) dont on donne une démonstration certes rigoureuse mais jamais vraiment élémentaire. La preuve "lumineuse" qu'on propose ici ne requiert que très peu d'Analyse, et consiste en manipulations de séries.

Remarquons tout d'abord que la partie paire de la série d'Euler représente le quart du total, donc la partie impaire représente les trois quarts du total, par conséquent l'identité d'Euler est équivalente à

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Or on connaît bien la somme, plus élémentaire, de la série de Leibniz

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Rappelons-en la démonstration. On a pour tout x réel

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^{n-1}x^{2n-2} + \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}$$

d'où en intégrant entre 0 et 1

$$\operatorname{Arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + R_n$$

avec

$$|R_n| = \left| \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2} dx \right| \leq \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{2n+1}$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right) = \text{Arctg } 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Dans ces conditions le résultat d'Euler est équivalent à

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = 2 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \right)^2,$$

et c'est cette identité-là que nous nous proposons de démontrer directement en prenant le carré de la série de Leibniz :

$$\left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(2p-1)} \right) \left(\sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^{q+1}}{(2q-1)} \right) = \sum_{(p,q)} \frac{(-1)^{p+q}}{(2p-1)(2q-1)} = \frac{\pi^2}{16}.$$

Dans le premier quadrant, nous dessinons le réseau $\mathfrak{R}$ des points dont les coordonnées sont des entiers naturels impairs, et au point de coordonnées $(2p-1, 2q-1)$ nous portons le nombre $\frac{(-1)^{p+q}}{(2p-1)(2q-1)}$.

Dans tout ce qui suit nous allons considérer la somme de la série-double restreinte à tel ou tel sous-ensemble du réseau $\mathfrak{R}$, nous conviendrons d'utiliser une majuscule E pour désigner le sous-ensemble en question, et la minuscule correspondante e pour désigner la somme de la série-double restreinte à ce sous-ensemble.

Etant donné un entier $n > 0$, nous notons R_n le *rayon lumineux* incliné à 45 degrés qui se reflète sur les axes de coordonnées aux points $(0, 2n)$ et $(2n, 0)$. Ce rayon R_n est constitué

- de la demi-droite D_n qui passe par les points $(1, 2n+1), (3, 2n+3), (5, 2n+5), \dots$
- du segment S_n qui passe par les n points $(1, 2n-1), (3, 2n-3), \dots, (2n-1, 1), \dots$
- de la demi-droite $\overline{D}_n$ qui passe par les points $(2n+1, 1), (2n+3, 3), (2n+5, 5), \dots$

Lemme fondamental. *Pour tout $n \geq 0$, la somme r_n des termes de la série-double situés sur le rayon lumineux R_n est nulle.*

Montrons cela dans un cas particulier, par exemple sur le rayon R_3 . Pour calculer la somme sur D_3 , nous utilisons l'identité $\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$, et obtenons :

$$\begin{aligned} d_3 &= - \left(\frac{1}{1.7} + \frac{1}{3.9} + \frac{1}{5.11} + \frac{1}{7.13} + \cdots \right) \\ &= - \frac{1}{6} \left(\left(1 - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{11} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{13} \right) + \cdots \right) \\ &= - \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right). \end{aligned}$$

UNE PREUVE LUMINEUSE DE LA RELATION $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = 2(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots)^2$

Pour calculer la somme sur S_3 , nous utilisons l'identité $\frac{1}{ab} = \frac{1}{a+b}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$, et obtenons :

$$s_3 = \frac{1}{1.5} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.1} = \frac{1}{6}(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + 1) = \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}).$$

Comme par raison de symétrie la somme sur $\overline{D}_3$ vaut celle sur D_3 , on trouve bien que la somme sur le rayon R_3 est nulle.

Plus généralement, le lecteur se convaincra aisément qu'on a sur le segment S_n la somme

$$s_n = (-1)^{n+1} \sum_{p+q=n+1} \frac{1}{(2p-1)(2q-1)} = (-1)^{n+1} \frac{1}{n} (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1})$$

et que les sommes d_n et $\overline{d}_n$ sont chacune égale à la moitié de cette quantité avec le signe opposé, d'où le résultat général.

Si nous prenons la réunion des R_n pour $n = 1, 2, 3, \dots$, nous voyons que nous passons deux fois sur chaque point du réseau (une fois sur une demi-droite, une fois sur un segment), à l'exception des points de la diagonale principale Δ sur lesquels nous ne passons qu'une fois (sur un segment). Nous décidons donc d'ajouter la diagonale principale Δ parcourue *une seule fois*, de sorte qu'en prenant la réunion des rayons R_n et de Δ , nous passons exactement deux fois sur chaque point du réseau $\mathbb{R}$. Par conséquent

$$\delta = \delta + r_1 + r_2 + r_3 + \dots = 2 \sum_{\mathbb{R}},$$

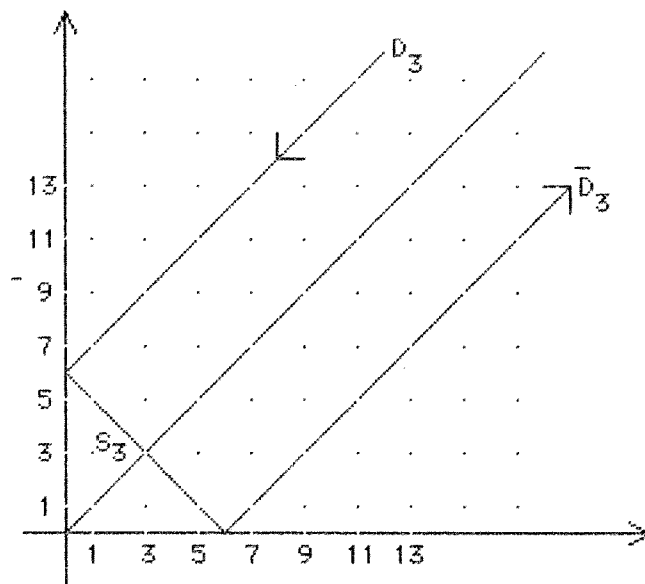
d'où le résultat annoncé :

$$\sum_p \frac{1}{(2p-1)^2} = 2 \sum_{p,q \geq 1} \frac{(-1)^{p+q}}{(2p-1)(2q-1)} = 2 \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(2p-1)} \right)^2.$$

Si cette démonstration aurait probablement convenu à Euler, elle manque terriblement de rigueur. La série-double que nous considérons ne constitue pas une *famille sommable*. L'écriture de la somme

$$\sum_{p,q \geq 1} \frac{(-1)^{p+q}}{(2p-1)(2q-1)}$$

n'a pas de sens précis, et nous courons le risque d'obtenir des limites distinctes selon la manière dont nous faisons tendre le domaine de sommation vers le réseau tout entier. Nous laissons aux lecteurs le soin de remédier à ce défaut, et sinon nous tenterons de le faire dans un article ultérieur.



Le rayon lumineux R_3

NOUVELLE BROCHURE :
ENSEIGNER LES PROBABILITÉS
EN CLASSE DE PREMIÈRE

(Programmes 1991)

Cette brochure est conçue dans l'esprit du nouveau programme de première. Le groupe "Probabilité" vous propose plusieurs activités d'introduction aux probabilités, de nombreux exercices avec des éléments de solution, quelques réflexions sur la notion de probabilité et les choix au hasard, ainsi qu'une activité à partir de la correspondance de Blaise Pascal et Pierre de Fermat sur le problème des partis.

Pour commander, s'adresser à la bibliothèque de l'IREM de Strasbourg et établir le paiement à l'ordre de l'Agent Comptable de l'ULP - IREM. Prix sur place, expédition en Alsace ou envoi à un établissement scolaire (hors Alsace) : 55 F ; si envoi à une adresse personnelle (hors Alsace) : 65 F.