LE CALCUL DES NOMBRES $\zeta(2k)$ AU MOYEN DES SÉRIES FORMELLES

Marc GUINOT

Le groupe mathématique de Saumur et le mathématicien Bernhard Riemann ne sont pas des inconnus pour les lecteurs de *'L'Ouvert'*. Les travaux du premier sur les quaternions, les octonions et la géométrie ont fait l'objet d'un article publié en deux parties par *'L'Ouvert'* en 1990-1991 (n° 61 et 62), article qui a été lu jusqu'au Portugal. Le second est connu pour un célèbre mémoire d'habilitation, présenté à Göttingen en 1854, dans lequel il pose les fondements de la topologie et de la géométrie riemannienne. Il est aussi l'auteur d'un court article sur "le nombre de nombres premiers inférieurs à une quantité donnée" dans lequel se trouve énoncée ce qu'on appelle maintenant l'*hypothèse de Riemann* sur la répartition des zéros de la fonction zêta.

Riemann mourut prématurément d'une maladie pulmonaire en 1866, à l'âge de 40 ans et, selon l'*Encyclopaedia Universalis*, il repose dans un petit cimetière près du lac Majeur, en Italie.

Le groupe mathématique de Saumur a failli être emporté à son tour l'hiver dernier. Pourtant, le 22 mai 1992, s'est tenue au lycée technique Sadi-Carnot une réunion inattendue, consacrée à "certaines valeurs de la fonction zêta", et plus précisément au calcul des sommes $1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \cdots$ Le compte-rendu de cette séance exceptionnelle ayant séduit le comité de rédaction de l'organe officiel de l'IREM de Strasbourg, je me permets d'en présenter ici une version plus étendue.

L'histoire (ou la préhistoire) de la fonction zêta commence en 1650 lorsqu'un certain Mengoli s'interrogea sur la possibilité de déterminer explicitement la somme $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots$ des inverses de tous les carrés parfaits. Le problème résista aux mathématiciens les plus chevronnés de l'époque, parmi lesquels Leibniz et un nombre indéterminé de Bernoulli, et c'est seulement en 1735 qu'Euler, alors dans sa vingt-neuvième année, découvrit la réponse : selon ses propres termes, le résultat dépend de la "quadrature du cercle", c'est-à-dire du nombre π ! Mais Euler ne s'arrêta pas à si peu et, dans le même temps, il obtint des résultats analogues et tout aussi étonnants pour les sommes $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \cdots$ avec $n = 4$, 6, 8 et 12 – ce que nous noterions aujourd'hui $\zeta(4), \zeta(6), \zeta(8)$ et $\zeta(12)$. C'est ainsi qu'il trouva la valeur de $\zeta(12)$ qui est, bien sûr, $\frac{691\pi^{12}}{638\ 512\ 875} \cdots$

Le raisonnement d'Euler manquait de rigueur et pour répondre aux interrogations de ses contemporains (et sans doute des siennes propres), il revint plusieurs fois sur le problème à l'aide de méthodes variées qui, tout en donnant les mêmes résultats, sacrifiaient encore par trop à la mode des calculs purement formels qui sévissaient

© L'OUVERT 69 (1992)

en analyse à cette époque. De nos jours, où la rigueur règne sans entraves dans le moindre manuel, les résultats d'Euler sont présentés comme des applications de théories plus ou moins rébarbatives, en rapport avec les fonctions holomorphes ou les séries de Fourier. Pourtant, les raisonnements d'Euler peuvent être rendus impeccables sans trop d'efforts, avec très peu d'analyse, en faisant appel à la notion moderne, simple et algébrique de séries formelles.

Auparavant, pour expliquer la terminologie contemporaine tout en rendant à Riemann l'hommage qui lui est dû, il n'est peut-être pas mauvais de rappeler que la fonction ζ de Riemann est une fonction d'une variable qui peut être définie soit par la condition

$$\zeta(\alpha) = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \cdots$$

où le second membre (*série de Riemann*) est une série convergente si $\alpha > 1$, soit par la décomposition en produit (due à Euler)

$$\zeta(\alpha) = \Pi_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^\alpha}}$$

le produit (infini) du second membre étant étendu à la totalité des nombres premiers (et étant encore convergent si $\alpha > 1$). C'est cette relation entre la série de Riemann et le produit ci-dessus qui fait l'importance de la fonction zêta, importance qui est apparue en pleine lumière lorsque Riemann eut montré l'intérêt qu'il y avait à choisir α complexe dans les formules précédentes et à étendre la fonction ζ ainsi obtenue au plan complexe tout entier de façon à en faire une fonction "méromorphe", avec un pôle unique (où la fonction n'est en réalité pas définie) correspondant à $\alpha = 1$. Riemann mit en évidence le lien qui existe alors entre le problème (déjà soulevé par Euler) de la répartition des nombres premiers et celui (apparemment sans rapport) de la localisation des nombres complexes α tels que $\zeta(\alpha) = 0$ ("zéros" de la fonction zêta). Le mieux en la matière serait de démontrer l'hypothèse de Riemann qui veut que, en dehors de cas dûment répertoriés sur la partie négative de l'axe des réels, tous ces zéros sont, en fait, placés sur une même droite "verticale", formée des nombres complexes dont la partie réelle est 1/2. Jusqu'à présent, malgré de très nombreuses vérifications à l'ordinateur (plus de 1 milliard!), cette conjecture est restée en suspens.

Après ces considérations hautement culturelles, nous allons revenir à notre véritable propos, qui est le calcul (sans larmes) des nombres $\zeta(2k)$. Pour mettre en appétit, on dira d'abord un mot du cas de $\zeta(2)$, c'est-à-dire du calcul de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

1. Le calcul de $\zeta(2)$

Il y a plusieurs façons de procéder. La plus simple me paraît être celle dont je ne donne ici que le canevas en demandant au lecteur de bien vouloir le compléter à sa guise. Elle consiste à utiliser des considérations trigonométriques élémentaires

permettant d'affirmer que

$$\cot^2 \frac{\pi}{2n+1} + \cot^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \cdots + \cot^2 \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

pour tout $n \geq 1$.

Pour établir cette relation, on développe $\sin(2n+1)\theta$ à l'aide de la formule de de Moivre, on met $\sin^{2n+1}\theta$ en facteur et on en déduit que les nombres $\cot^2 \frac{k\pi}{2n+1}$ sont (pour $1 \leq k \leq n$) les racines du polynôme

$$C^1_{2n+1} x^n - C^3_{2n+1}\, x^{n-1} + \cdots + (-1)^n.$$

D'où la formule ci-dessus en considérant la somme desdites racines. En s'appuyant alors sur le fait que $\cot^2\theta < \frac{1}{\theta^2} < 1 + \cot^2\theta$ lorsque $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ (relation qui se déduit sans peine du fait bien connu que $\sin\theta < \theta < \tan\theta$ dans les mêmes conditions), on est capable de prouver que

$$\frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{n(2n+2)\pi^2}{3(2n+1)^2}.$$

Comme les deux expressions encadrantes tendent vers une même limite, égale à $\frac{\pi^2}{6}$, on en déduit qu'il en est de même de la somme du milieu; c'est le résultat d'Euler :

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Pour aller plus loin, nous aurons besoin de développer quelques notions relatives aux séries formelles.

2. Séries formelles en une indéterminée

La notion de série formelle ne pose pas de problème conceptuels majeurs si on veut bien considérer qu'une série de ce genre n'est rien d'autre, au fond, qu'une suite illimitée $(a_n)_{n\geq 0} = (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ dont tous les termes sont choisis dans un même anneau commutatif A. Si on note S_A provisoirement l'ensemble de ces suites, on définit dans cet ensemble deux lois de composition (addition et multiplication) en posant

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) \text{ et } (a_n)(b_n) = (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)$$

lois de composition que l'on complète en leur adjoignant une "loi d'action" permettant de "multiplier" par un élément c quelconque de A un élément arbitraire de S_A, et ce grâce à la condition

$$c(a_n) = (ca_n).$$

Pour la première loi, les termes successifs du résultat sont donc $a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2$, etc.; pour la seconde loi, ce sont $a_0 b_0, a_0 b_1 + a_1 b_0, a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$, etc. et pour la loi "externe" : ca_0, ca_1, ca_2, et ainsi de suite.

Cela étant, à ces données de base s'ajoute une convention notatoire de pure forme qui consiste à écrire $\Sigma_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ au lieu de $(a_n)_{n\geq 0}$ ou $a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + \ldots$ au lieu de $(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$, moyennant quoi les opérations précédentes peuvent être considérées comme définies par les conditions :

$$(1) \qquad (a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots) + (b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \ldots) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + (a_2 + b_2)X^2 + \cdots$$

$$(2) \qquad (a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots)(b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \cdots) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)X + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)X^2 + \cdots$$

$$(3) \qquad c(a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots) = ca_0 + ca_1 X + ca_2 X^2 + \cdots$$

Le choix de ces notations tient à deux raisons principales auxquelles s'ajoute une troisième explication, de nature topologique, que nous passerons sous silence ici. La première provient du rapprochement que l'on peut faire entre les relations (1), (2) et (3) et des relations analogues concernant les polynômes en X et à coefficients dans l'anneau A. De façon plus précise, ce rapprochement permet d'identifier tout polynôme de ce genre avec un élément de S_A, à condition de convenir qu'un polynôme $a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ correspond à la suite $a_0, a_1, \ldots a_n, 0, 0, \ldots$ des coefficients de ce polynôme (suite qui, on le sait, ne comporte que des termes nuls au delà d'un certain rang). Cette identification faite, les éléments de S_A seront appelés désormais *séries formelles en X et à coefficients dans A* et on utilisera à leur propos, toutes les fois où ce sera possible, le vocabulaire propre aux polynômes : *terme constant, coefficients, terme de degré n* (ou en X^n), etc. On notera cependant qu'une série formelle qui n'est pas un polynôme n'a pas de "terme de plus haut degré", donc pas de degré, mais il y a un *ordre* qui est par définition le degré du terme de plus bas degré. On adoptera aussi des conventions d'écriture analogues à celles en usage pour les polynômes lorsqu'il y a des coefficients qui autorisent certaines simplifications. C'est ainsi que l'écriture $\Sigma_{n=0}^{+\infty} X^n$, ou $1 + X + X^2 + X^3 + \cdots$, représente une série bien précise (dite *série géométrique formelle*) dont tous les coefficients valent 1 (donc correspondant à la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ pour laquelle $a_n = 1$ pour tout n); cette série est à coefficients dans un anneau A quelconque. De la même façon, l'écriture $\Sigma_{n=0}^{+\infty} \frac{X^n}{n!}$, ou $1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots$, représente une autre série, à coefficients dans le corps $\mathbb{Q}$ cette fois, dont les coefficients successifs sont $1, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}$, etc. On appelle cette série l'*exponentielle formelle* et on la notera, par pure convention, e^X. Cette série nous sera utile plus loin, de même que le *sinus formel* et le *cosinus formel* respectivement définis par les conditions $\sin X = X - \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} - \frac{X^7}{7!} + \cdots$ et $\cos X = 1 - \frac{X^2}{2!} + \frac{X^4}{4!} - \frac{X^6}{6!} + \cdots$ dont les coefficients successifs sont, respectivement, $0, \frac{1}{1!}, 0, -\frac{1}{3!}, 0, \frac{1}{5!}, 0, \ldots$ et $1, 0, -\frac{1}{2!}, 0, \frac{1}{4!}, 0, \ldots$

Comme l'ensemble des polynômes en X et à coefficients dans un anneau commutatif A se note $A[X]$, on notera $A[[X]]$ l'ensemble des séries formelles du même genre.

La seconde raison qui explique toutes ces conventions d'écriture est l'espèce de

distributivité généralisée qu'exprime la relation suivante :

$$(4) \qquad X^k(c_0 + c_1X + c_2X^2 + \cdots) = c_0X^k + c_1X^{k+1} + c_2xX^{k+2} + \cdots$$

valable pour tout entier naturel k et toute série formelle $\Sigma_{n=0}^{\infty} c_n X^n$. Celle-ci se démontre sans difficultés en partant de la relation (2) ci-dessus, avec $a_n = 0$ si $n \neq k$, $a_n = 1$ si $n = k$ et $b_n = c_n$ quel que soit n.

De toute façon, les propriétés de l'ensemble $A[[X]]$, muni des lois (1), (2), (3), sont sans surprises et conduisent à l'énoncé du théorème suivant :

Théorème 1.– Muni des lois (1) et (2), l'ensemble $A[[X]]$ est un anneau commutatif contenant $A[X]$ comme sous-anneau. De plus, les lois (1) et (2) sont liées à la "multiplication" (3) par les règles

$$c(s+t) = cs + ct,\ (c+d)s = cs + ds,\ c(ds) = (cd)s,\ 1s = s$$
$$c(st) = (cs)t = s(ct)$$

où $c, d \in A$ et $s, t \in A[[X]]$.

On résume parfois tout cela en disant que $A[[X]]$ est une algèbre commutative (et associative) sur l'anneau A.

Les détails de la démonstration sont laissés au lecteur. Le seul point un peu délicat à vérifier est l'associativité de la multiplication. Après avoir noté que $(\Sigma_{n=0}^{+\infty} a_n X^n)(\Sigma_{n=0}^{+\infty} b_n X^n) = \Sigma_{n=0}^{+\infty}(\Sigma_{i+j=n} a_i b_j)X^n$, on vérifie séparément que dans l'anneau A, on a

$$\sum_{q+k=n} \Big(\sum_{i+j=q} a_i b_j\Big)c_k = \sum_{i+j+k=n} a_i b_j c_k \text{ et } \sum_{i+r=n} a_i \Big(\sum_{j+k=r} b_j c_k\Big) = \sum_{i+j+k=n} a_i b_j c_k.$$

Comme dans tout anneau, il y a dans $A[[X]]$ des éléments inversibles, mais ils sont plus nombreux que dans $A[X]$ comme le montre le cas de $1-X$ et $1+X+X^2+\cdots$, inverses l'un de l'autre car

$$(1-X)(1+X+X^2+\cdots) = (1+X+X^2+\cdots) - (X+X^2+X^3+\cdots) = 1.$$

Le résultat général est très simple :

Théorème 2.– Pour qu'une série formelle $a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots$ à coefficients dans un anneau commutatif A soit inversible (dans $A[[X]]$), il faut et il suffit que son terme constant a_0 soit inversible dans A.

En effet, pour qu'une série quelconque $b_0 + b_1X + b_2X^2 + \cdots$ soit inverse de la série $a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots$ il faut et il suffit que $a_0b_0 = 1$ et que $a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0 = 0$ pour tout $n \geq 1$. La première relation montre effectivement que a_0 doit être inversible dans A. Réciproquement, si cette condition

est vérifiée on a $a_0 b_0 = 1$ si on prend $b_0 = a_0^{-1}, a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0$ si on prend $b_1 = a_0^{-1}(-a_1 b_0), a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0$ si $b_2 = a_0^{-1}(-a_1 b_1 - a_2 b_0)$ et ainsi de suite. On calcule ainsi les éléments b_n de proche en proche en utilisant la seule inversibilité de a_0.

Nous invitons le lecteur à mettre en œuvre cette méthode dans le cas de la série exponentielle e^X, évidemment inversible : avec $a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{1!}, a_2 = \frac{1}{2!}, a_3 = \frac{1}{3!}$, etc., il devrait trouver $b_0 = 1, b_1 = -1, b_2 = \frac{1}{2}, b_3 = -\frac{1}{6}, b_4 = \frac{1}{24}, b_5 = -\frac{1}{120}, \cdots$ De là à penser que l'inverse de e^X est $1 - \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} - \frac{X^3}{3!} + \frac{X^4}{4!} - \frac{X^5}{5!} + \cdots$, il n'y a qu'un pas, à franchir par une petite récurrence ... Nous reverrons cela plus bas, dans un contexte plus général.

Plus difficile est le calcul de $(\cos X)^{-1}$. Le résultat commence, sauf erreur, par $1 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{5}{24}X^4 + \frac{61}{720}X^6 + \frac{277}{8064}X^8 \ldots$ Comprenne qui pourra!

A noter que la série $\sin X$, elle, n'est pas inversible dans $\mathbb{Q}[[X]]$ puisque son terme constant qui est nul n'est pas inversible dans $\mathbb{Q}$.

Dans le cas général où l'anneau A est un corps, le théorème 2 se traduit immédiatement de la façon suivante :

> **Théorème 3.**– Pour qu'une série formelle $a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots$ à coefficients dans un corps commutatif K soit inversible (dans l'anneau $K[[X]]$), il faut et il suffit que son terme constant ne soit pas nul.

Cela conduit à quelques conséquences intéressantes :

> **Corollaire 1.**– Toute série formelle non nulle $s \in K[[X]]$ peut se mettre sous la forme d'un produit $X^m s_0$ où m est un entier naturel et s_0 une série formelle inversible.

Si on pose $s = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots$, il suffit en effet de considérer le plus petit entier m tel que $a_m \neq 0$: on a alors $s = a_m X^m + a_{n+1} X^{m+1} + a_{m+2} X^{m+2} + \cdots = X^m s_0$ avec $s_0 = a_m + a_{m+1} X + a_{m+2} X^2 + \cdots$

> **Corollaire 2.**– Le produit de deux séries non nulles $s, t \in K[[X]]$ est une série non nulle.

Il suffit d'écrire (avec des notations évidentes) $s = X^m s_0$ et $t = X^n t_0$ pour voir que dans $st = X^{m+n} s_0 t_0$ le coefficient du terme de degré $m + n$ n'est pas nul.

Ce dernier résultat montre que si K est un corps, l'anneau $K[[X]]$ est intègre. Comme tout anneau intègre, on peut alors le plonger dans un corps, notamment son corps des fractions.

> **Théorème 4.**– Le corps des fractions de l'anneau $K[[X]]$ est formé d'éléments de la forme $\frac{u}{X^k}$ où $u \in K[[X]]$ et où k est un entier naturel quelconque.

En effet, par principe, tout élément du corps des fractions de $K[[X]]$ est de la forme $\frac{s}{t}$ où $s, t \in K[[X]]$ et où $t \neq 0$. D'après le cor. 1 du th. 3 ci-dessus, t peut s'écrire $X^k t_0$ où t_0 est une série inversible de $K[[X]]$. D'où $\frac{s}{t} = \frac{s}{X^k t_0} = \frac{st_0^{-1}}{X^k}$ où le numérateur $u = st_0^{-1}$ représente un élément $u \in K[[X]]$.

On peut dire aussi que les éléments du corps des fractions de $K[[X]]$ sont des séries "généralisées" de la forme $a_h X^h + a_{h+1} X^{h+2} + a_{h+2} X^{h+2} + \cdots$ où h est un entier de signe quelconque et où $a_h, a_{h+1}, a_{h+2}, \ldots$ sont des éléments quelconques du corps K.

Habituellement, on note $K((X))$ le corps des fractions de $K[[X]]$ (ou *corps des séries formelles généralisées* à coefficients dans K) en parallèle avec la notation $K(X)$ pour le corps des fractions de l'anneau $K[X]$ (ou *corps des fractions rationnelles* sur K). On notera au passage que $K(X)$ s'identifie à un sous-corps de $K((X))$.

Un exemple (qui nous servira plus loin) de série formelle généralisée est la "fraction" $\frac{\cos X}{\sin X}$ que l'on appellera la *cotangente formelle* et que l'on notera $\cot X$. Comme $\sin X = X(1 - \frac{X^2}{3!} + \frac{X^4}{5!} - \cdots)$, on voit que $\cot X$ est égal à

$$\frac{(1 - \frac{X^2}{2!} + \frac{X^4}{4!} - \cdots)(1 - \frac{X^2}{3!} + \frac{X^4}{5!} - \cdots)^{-1}}{X},$$

donc une série de la forme $\frac{1}{X} + a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots$ dont le lecteur aura à cœur de calculer les premiers coefficients (on trouve au début $a_0 = 0, a_1 = -\frac{1}{3}, a_2 = 0, a_3 = -\frac{1}{45}, a_4 = 0, a_5 = -\frac{1}{945}$). On notera au passage que bien que la "fraction" $\frac{\sin X}{\cos X} = \tan X$ (*tangente formelle*) soit une série "ordinaire" (je veux dire un élément de l'anneau $\mathbb{Q}[[X]]$) il n'est guère facile d'en calculer les coefficients – sauf ceux d'indices pairs, naturellement. Naturellement ?

Les propriétés purement algébriques dont il nous reste maintenant à parler sont très simples et concernent la notion de dérivée (formelle), celle de dérivée logarithmique et un petit problème lié à la question plus vaste du remplacement de X par autre chose dans une série. Sur ce dernier point, nous nous limiterons ici au cas où l'on désire remplacer, dans une série s donnée, X par cX où c est un élément donné de l'anneau A dans lequel sont pris les coefficients. Si la série s s'écrit $a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots$, ce remplacement de X par cX consiste simplement (et par définition) à remplacer s par la série $a_0 + a_1 cX + a_2 c^2 X^2 + \cdots$, c'est-à-dire par $\Sigma_{n=0}^{+\infty} a_n c^n X^n$. Si on note $s(cX)$ la nouvelle série, on démontre aussitôt le résultat suivant :

> **Théorème 5.**– Si s et t sont des séries formelles, à coefficients dans un anneau A quelconque, et si c est un élément de A, on a $(s + t)(cX) = s(cX) + t(cX)$ et $(st)(cX) = s(cX)t(cX)$.

Le lecteur remarquera, avec satisfaction, que $s = s(X)$ (où X est mis pour $1X \ldots$).

Lorsque s est l'une des séries $e^X, \sin X, \cos X$, on adoptera par convention les notations e^{cX}, $\sin cX$ et $\cos cX$ pour $s(cX)$ – ou mieux, car c'est plus joli comme cela, $e^{aX}, \sin aX$ et $\cos aX$ pour $s(aX)$.

On a ainsi, entre autres, $e^{aX} = 1 + \frac{aX}{1!} + \frac{a^2X^2}{2!} + \frac{a^3X^3}{3!} + \cdots$

Si on prend en particulier pour a le nombre i (ce qui suppose que l'on raisonne dans $\mathbb{C}$, ou plutôt dans $\mathbb{C}[[X]]$, on trouve comme par miracle

$$e^{iX} = 1 + \frac{iX}{1!} - \frac{X^2}{2!} - \frac{iX^3}{3!} + \frac{X^4}{4!} + \frac{iX^6}{6!} - \cdots = \cos X + i \sin X.$$

Comme la substitution de a par $-i$ donne de même $e^{-iX} = \cos X - i \sin X$, on tire de là les formules d'Euler (formelles!) :

$$\cos X = \frac{e^{iX} + e^{-iX}}{2} \text{ et } \sin X = \frac{e^{iX} - e^{-iX}}{2i} \tag{5}$$

valables dans l'anneau $\mathbb{C}[[X]]$.

On complètera ces propriétés de l'exponentielle formelle en établissant formellement que

$$e^{aX} e^{bX} = e^{(a+b)X} \tag{6}$$

quels que soient a, b (réels ou complexes).

Il est facile de voir que le coefficient du terme en X^n du produit $e^{aX}e^{bX}$ est $1\frac{b^n}{n!} + \frac{a}{1!}\frac{b^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{a^2}{2!}\frac{b^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + \frac{a^n}{n!}1$, autrement dit une somme dont le terme général est $\frac{a^k b^{n-k}}{k!(n-k)!}$. Comme $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, on reconnaît dans ce terme général $\frac{1}{n!}C_n^k a^k b^{n-k}$; d'où pour la somme complète $\frac{1}{n!}(a+b)^n$, ce qui est justement le coefficient du terme en X^n du second membre de l'égalité (6). CQFD.

En prenant $a = 1$ et $b = -1$, on trouve $e^X e^{-X} = 1$, ce qui se passe de commentaires.

La *dérivée formelle* d'une série s est par définition la série s', égale à $a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 + \cdots$, si $s = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \cdots$ Ici, l'anneau A est quelconque. On a en particulier $(X^n)' = nX^{n-1}$ si $n \geq 1$ et $(a)' = 0$.

Théorème 6.– Si s et t sont des séries formelles quelconques, on a $(s+t)' = s' + t', (st)' = s't + st', (cs)' = cs'$ et $[s(cX)]' = cs'(cX)$ pour tout élément c de A.

Contentons-nous de vérifier la seconde et la quatrième égalité. Si on écrit $s = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \cdots$ et $t = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3 + \cdots$ on a

$$\begin{aligned}(st)' =& [a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)X + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)X^2 \\ &+ (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)X^3 + \ldots]' \\ =& a_0b_1 + a_1b_0 + 2(a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)X \\ &+ 3(a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)X^2 + \ldots\end{aligned}$$

alors que

$$\begin{aligned} s't &= (a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 + \cdots)(b_0 + b_1X + b_2X^2 + \cdots) \\ &= a_1b_0 + (a_1b_1 + 2a_2b_0)X + ((a_1b_2 + 2a_2b_1 + 3a_3b_0)X^2 + \cdots \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} st' &= (a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots)(b_1 + 2b_2X + 3b_3X^2 + \cdots) \\ &= a_0b_1 + (2a_0b_2 + a_1b_1)X + (3a_0b_3 + 2a_1b_2 + a_2b_1)X^2 + \cdots \end{aligned}$$

On constate alors que l'addition de $s't$ et de st' donne $(st)'$. Que demander de plus ?

On a aussi $[s(cX)]' = (a_0 + a_1cX + a_2c^2X^2 + a_3c^3X^3 + \cdots)' = a_1c + 2a_2c^2X + 3a_3c^3X^2 + \cdots = c(a_1 + 2a_2cX + 3a_3c^2X^2 + \cdots) = cs'(cX)$.

Corollaire.– Si $s \in A[[X]]$ et si n est un entier $\geq 1, (s^n)' = ns^{n-1}s'$.

La démonstration est laissée au lecteur...

Si on applique la définition précédente à e^X, on trouve aisément, et comme par hasard, e^X. On vérifie de même sans problème que $(\sin X)' = \cos X$ et $(\cos X)' = -\sin X$. Mais nous n'aurons pas besoin de ces résultats. Passons plutôt à la définition et à l'étude de la notion de *dérivée logarithmique* $\lambda(s)$ d'une série s. Nous supposerons $s \neq 0$ et à coefficients dans un corps K. Moyennant quoi, nous poserons $\lambda(s) = \frac{s'}{s}$, le calcul s'effectuant dans le corps des fractions de $K[[X]]$. On a ainsi par exemple $\lambda(\sin X) = \frac{\cos X}{\sin X} = \cot X$.

Théorème 7.– Si s et t sont des séries formelles non nulles, on a $\lambda(st) = \lambda(s) + \lambda(t)$.

C'est immédiat car $\lambda(st) = \frac{(st)'}{st} = \frac{s't+st'}{st} = \frac{s'}{s} + \frac{t'}{t} = \lambda(s) + \lambda(t)$. On notera cependant l'intervention discrète du cor. 2 du th. 3.

Corollaire 1.– Si $c \in K$ et si $s \in k[[X]], \lambda(cs) = \lambda(s)$.

Cela vient de ce que $\lambda(c) = 0$.

Corolaire 2.– Si $s_1, \ldots, s_n$ est une suite de séries, $\lambda(\Pi_{i=1}^n s_i) = \Sigma_{i=1}^n \lambda(s_i)$.

Une récurrence s'impose!

A tout cela, enfin, on ajoutera la possibilité de définir une notion de convergence dite "*terme à terme*", pour les séries à coefficients réels ou complexes, qui consiste à dire qu'une suite (s_n) de séries de ce genre converge vers une série s si pour tout entier $k \geq 0$ (représentant un degré fixé), le coefficient $a_k^{(n)}$ du terme en X^k de s_n tend vers le coefficient a_k analogue de s lorsque n augmente indéfiniment. Donnons tout de suite un exemple spectaculaire :

Théorème 8.– Lorsque n tend vers $+\infty$, le polynôme $(1+\frac{X}{n})^n$ tend terme à terme vers la série exponentielle e^X.

Si on développe l'expression $(1+\frac{X}{n})^n$ par la formule du binôme, on sait que l'on obtient une somme dont le terme général est $C_n^k \frac{X^k}{n^k}$.

Quitte à définir le coefficient binomial C_n^k comme étant le nombre $\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$ (ce qui donne 0 si $k > n$), on peut dire que le coefficient de X^k dans la "série" $(1+\frac{X}{n})^n$ est $\frac{C_n^k}{n^k}$. Si k est fixé, ce coefficient est une fraction rationnelle en n, égale à $\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!n^k}$, qui tend donc vers $\frac{1}{k!}$ lorsque n tend vers $+\infty$. D'où le résultat cherché, compte tenu de ce que représente la notion de convergence terme à terme.

En plus de cet exemple, on retiendra les quatre règles contenues dans le théorème suivant :

Théorème 9.– Si (s_n) et (t_n) sont deux suites de séries formelles convergeant respectivement terme à terme vers s et t, alors (s_n+t_n) et (s_nt_n) convergent terme à terme vers $s+t$ pour la première et vers st pour la seconde. En outre, si c est un réel ou un complexe quelconque, la suite (cs_n) (resp. $(s_n(cX))$) converge terme à terme vers cs (resp. vers $s(cX)$).

Limitons la démonstration au cas le plus significatif. Supposons que $s_n = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}X + a_2^{(n)}X^2 + \cdots$ et $t_n = b_0^{(n)} + b_1^{(n)}X + b_2^{(n)}X^2 + \cdots$ et que parallèlement $s = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots$ et $t = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \cdots$ Alors le coefficient du terme en X^k de s_nt_n est, comme on sait, $a_0^{(n)}b_k^{(n)} + a_1^{(n)}b_{k-1}^{(n)} + \cdots + a_k^{(n)}b_0^{(n)}$. Comme $a_i^{(n)}$ tend vers a_i et que $b_j^{(n)}$ tend vers b_j (pour i et j fixés), on en déduit que le coefficient précédent tend vers $a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_kb_0$, ce qui est le coefficient de X^k dans st.

Corolaire.– Lorsque n tend vers $+\infty$, $(1+\frac{iX}{n})^n$ (resp. $(1-\frac{iX}{n})^n$) tend terme à terme vers e^{iX} (resp. e^{-iX}).

On a des résultats semblables donnant, à la limite, $\cos X$ et $\sin X$.

Eh bien, après tout ça, on peut enfin passer au plat de résistance!

3. Calcul de $\zeta(4)$, $\zeta(6)$ et tutti quanti

Chacun sait, bien sûr, que pour n donné ≥ 1, les racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire les racines complexes du polynôme $X^n - 1$) sont les nombres $e^{2ik\pi/n} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ où k varie, au choix, de 0 à $n-1$, de 1 à n, ou d'un entier a donné à l'entier $a+n-1$.

Si on prend en particulier n impair, égal à $2m+1$, on peut faire varier ainsi k de $-m$ à m, ce qui donne la factorisation suivante pour le polynôme $X^n - 1$:

$$X^n - 1 = \Pi_{k=-m}^{m}(X - e^{2ik\pi/n}) = (X-1)\Pi_{k=1}^{m}(X - e^{2ik\pi/n})(x - e^{-2ik\pi/n})$$

la seconde expression s'obtenant en isolant $k = 0$ et en regroupant deux par deux

les facteurs restants. On en déduit une décomposition à coefficients réels :

$$X^n - 1 = (X-1)\Pi_{k=1}^{m}(X^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n}X + 1)$$

puis en remplaçant X par $\frac{X}{Y}$ et en multipliant par Y^n, la factorisation analogue :

$$X^n - Y^n = (X-Y)\Pi_{k=1}^{m}(X^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n}XY + Y^2)$$

et enfin, par une ultime substitution

$$\begin{aligned}(1+\frac{iX}{n})^n - (1-\frac{iX}{n})^n =& \frac{2iX}{n}\Pi_{k=1}^{m}[(1+\frac{iX}{n})^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n}(1+\frac{iX}{n}) \\ & (1-\frac{iX}{n}) + (1-\frac{iX}{n})^2] \\ =& \frac{2iX}{n}\Pi_{k=1}^{m}[(2-2\cos\frac{2k\pi}{n}) - (2+2\cos\frac{2k\pi}{n})\frac{X^2}{n^2}] \\ =& \frac{2iX}{n}\Pi_{k=1}^{m}(4\sin^2\frac{k\pi}{n} - 4\cos^2\frac{k\pi}{n}\frac{X^2}{n^2})\end{aligned}$$

en terminant le calcul par un peu de trigonométrie : $2 - 2\cos 2\theta = 2 - 2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 2 - 2(1 - 2\sin^2\theta) = 4\sin^2\theta$ et $2 + 2\cos 2\theta = 2 + 2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 2 + 2(2\cos^2\theta - 1) = 4\cos^2\theta$.

La dérivée logarithmique du premier membre donne alors, grâce au théorème 6 ci-dessus (et à son corollaire) :

$$\frac{n(1+\frac{iX}{n})^{n-1}(\frac{i}{n}) - n(1-\frac{iX}{n})^{n-1}(-\frac{i}{n})}{(1+\frac{iX}{n})^n - (1-\frac{iX}{n})^n} = i\frac{(1+\frac{iX}{n})^{n-1} + (1-\frac{iX}{n})^{n-1}}{(1+\frac{iX}{n})^n - (1-\frac{iX}{n})^n}$$

alors que celle du second membre est (cf. le th. 7 et ses corollaires) :

$$\frac{1}{X} + \sum_{k=1}^{m}\frac{-8\cos^2\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{X}{n^2}}{4\sin^2\frac{k\pi}{n} - 4\cos^2\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{X^2}{n^2}} = \frac{1}{X} + \sum_{k=1}^{m}\frac{-2\cot^2\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{X}{n^2}}{1 - \cot^2\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{X^2}{n^2}}$$

en divisant numérateur et dénominateur par $4\sin^2\frac{k\pi}{n}$ (ce qui est possible car $\sin\frac{k\pi}{n} \neq 0$ vu que $0 < \frac{k\pi}{n} \leq \frac{m\pi}{n} < \frac{\pi}{2}$: on rappelle que $n = 2m+1$).

Le terme général de la somme finale est une fraction rationnelle qu'il est possible de transformer en une série formelle car on vérifie facilement que

$$\frac{1}{1 - \cot^2\frac{k\pi}{n}\frac{X^2}{n^2}} = 1 + \cot^2\frac{k\pi}{n}\frac{X^2}{n^2} + \cot^4\frac{k\pi}{n}\frac{X^4}{n^4} + \cot^6\frac{k\pi}{n}\frac{X^6}{n^6} + \cdots$$

C'est le même principe que pour l'égalité $\frac{1}{1-X} = 1 + X + X^2 + X^3 + \cdots$ vue (en substance) dans le précédent paragraphe.

D'où pour ce terme général l'expression

$$-2\cot^2\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{X}{n^2}-2\cot^4\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{X^3}{n^4}-2\cot^6\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{X^5}{n^6}-2\cot^8\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{X^7}{n^8}-\cdots$$

Si on additionne ces séries terme à terme (pour k variant de 1 à m) et si on reprend le premier membre du début, on obtient l'égalité

$$i\frac{(1+\frac{iX}{n})^{n-1}+(1-\frac{iX}{n})^{n-1}}{(1+\frac{iX}{n})^n-(1-\frac{iX}{n})^n}=\frac{1}{X}-2\frac{\sigma_2(n)}{n^2}X-2\frac{\sigma_4(n)}{n^4}X^3-2\frac{\sigma_6(n)}{n^6}X^5-2\frac{\sigma_8(n)}{n^8}X^7-\cdots$$

où l'on a posé

$$\sigma_2(n)=\sum_{k=1}^{m}\cot^2\frac{k\pi}{n},\ \sigma_4(n)=\sum_{k=1}^{m}\cot^4\frac{k\pi}{n},$$
$$\sigma_6(n)=\sum_{k=1}^{m}\cot^6\frac{k\pi}{n},\ \sigma_8(n)=\sum_{k=1}^{m}\cot^8\frac{k\pi}{n},$$

etc. (rappelons que m dépend directement de n puisque $n=2m+1$). Quitte à éliminer les dénominateurs par une multiplication convenable, cela peut s'écrire aussi :

$$iX[(1+\tfrac{iX}{n})^{n-1}+(1-\tfrac{iX}{n})^{n-1}] \tag{7}$$
$$=[(1+\tfrac{iX}{n})^n-(1-\tfrac{iX}{n})^n][1-2\tfrac{\sigma_2^{(n)}}{n^2}X^2-2\tfrac{\sigma_4(n)}{n^4}X^4-2\tfrac{\sigma_6(n)}{n^6}X^6-\cdots].$$

Examinons alors ce qui se passe lorsqu'on fait tendre n vers $+\infty$ (tout en le gardant impair). Il n'y a pas de problème pour $(1+\frac{iX}{n})^n$ et pour $(1-\frac{iX}{n})^n$ puisqu'on a vu en corollaire du théorème 9 que les limites respectives sont e^{iX} et e^{-iX}. On en déduit que la différence tend (terme à terme, ne l'oublions pas!) vers $2i\sin X$. Pour ce qui est de $(1+\frac{iX}{n})^{n-1}$, il est facile de vérifier que

$$(1+\frac{iX}{n})^{n-1}=(1+\frac{iX}{n})^n\frac{1}{1+\frac{iX}{n}}=(1+\frac{iX}{n})^n[1-\frac{iX}{n}+\frac{i^2X^2}{n^2}-\frac{i^3X^3}{n^3}+\cdots]$$

C'est encore une variante de la formule $\frac{1}{1-X}=1+X+X^2+X^3\cdots$

Comme $\frac{ik}{n^k}$, tend vers 0 lorsque n augmente indéfiniment, on en déduit que l'expression entre crochets ci-dessus tend terme à terme vers 1. En raisonnant de même pour $(1-\frac{iX}{n})^{n-1}$ on en déduit que le premier membre de (7) tend vers $2i\cos X$.

Reste à chercher la limite de $\frac{\sigma_2(n)}{n^2}$, de $\frac{\sigma_4(n)}{n^4}$, de $\frac{\sigma_6(n)}{n^6}$, etc.

La première peut s'obtenir en réutilisant la relation vue dans le premier paragraphe : $\cot^2\theta<\frac{1}{\theta^2}<1+\cot^2\theta$ qu'on va réécrire ici $\frac{1}{\theta^2}<1+\cot^2\theta<1+\frac{1}{\theta^2}$. En prenant $\theta=\frac{\pi}{n},\frac{2\pi}{n},\cdots,\frac{m\pi}{n}$ et en ajoutant membre à membre, on obtient $\frac{n^2}{\pi^2}(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{m^2})<m+\sigma_2(n)<m+\frac{n^2}{\pi^2}(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{m^2})$. Si on divise tout par n^2 et si on fait tendre $n=2m+1$ vers $+\infty$, on constate que les

expressions extrêmes ont toutes deux pour limites $\frac{\zeta(2)}{\pi^2}$ (car $\frac{m}{n^2} = \frac{n-1}{2n^2}$ tend vers 0).Il en est donc de même de $\frac{m}{n^2} + \frac{\sigma_2(n)}{n^2}$, donc finalement de $\frac{\sigma_2(n)}{n^2}$.

Pour $\frac{\sigma_4(n)}{n^4}$, on part de l'encadrement $\frac{1}{\theta^4} < 1 + 2\cot^2\theta + \cot^4\theta < 1 + \frac{2}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^4}$ qui donne, avec $\theta = \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \cdots \frac{m\pi}{n}$ et par addition, $\frac{n^4}{\pi^4}(1 + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{m^4}) < m+2\sigma_2(n)+\sigma_4(n) < m+\frac{2n^2}{\pi^2}(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{m^2})+\frac{n^4}{\pi^4}(1+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{m^4})$. Si on divise par n^4 et si on fait tendre n vers $+\infty$, on voit encore que les expressions encadrantes ont la même limite, $\frac{\zeta(4)}{\pi^4}$ (car $\frac{m}{n^4}$ et $\frac{2}{\pi^2 n^2}(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{m^2})$ ont toutes deux pour limite 0). Il en est donc de même de l'expression du milieu $\frac{m}{n^4}+2\frac{\sigma_2(n)}{n^4}+\frac{\sigma_4(n)}{n^4}$, donc finalement de $\frac{\sigma_4(n)}{n^4}$ (on observera que d'après le cas précédent $\frac{2\sigma_2(n)}{n^4}$ tend vers 0). Le cas général qui demande une petite récurrence (que dis-je? une récurrence soignée!) et l'usage de la formule du binôme se traite de même. Moyennant quoi, le passage à la limite terme à terme dans (7) donne finalement la relation

$$2iX\cos X = 2i\sin X(1 - 2\frac{\zeta(2)}{\pi^2}X^2 - 2\frac{\zeta(4)}{\pi^4}X^4 - 2\frac{\zeta(6)}{\pi^6}X^6 - \cdots)$$

ou si on préfère, le développement en série formelle de la cotangente formelle, sous la forme

$$X\cot X = 1 - 2\frac{\zeta(2)}{\pi^2}X^2 - 2\frac{\zeta(4)}{\pi^4}X^4 - 2\frac{\zeta(6)}{\pi^6}X^6 - \cdots \tag{8}$$

Cela ne donne pas encore, certes, la valeur de $\zeta(2k)$, mais permet d'affirmer qu'en général le quotient $\frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}}$ est un nombre rationnel : il est clair en effet que la série $X\cot X = \frac{X\cos X}{\sin X}$ est à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Pour les connaisseurs, cela implique que $\zeta(2k)$ est un nombre transcendant et en particulier un irrationnel ...

Pour calculer la valeur du quotient qui nous manque, on va chercher à atteindre $X\cot X$ à l'aide des formules d'Euler, en raisonnant plus ou moins dans le corps $\mathbb{C}((X))$ et en utilisant (6). Cela donne

$$\begin{aligned} X\cot X = X\frac{\cos X}{\sin X} &= X\frac{(e^{iX}+e^{-iX})/2}{(e^{iX}-e^{-iX})/2i} \\ &= iX\frac{e^{-iX}(e^{2iX}+1)}{e^{-iX}(e^{2iX}-1)} = iX\frac{e^{2iX}-1+2}{e^{2iX}-1} = iX + \frac{2iX}{e^{2iX}-1}. \end{aligned}$$

On remarque alors que la série $\frac{2iX}{e^{2iX}-1}$ est l'inverse de la série $\frac{e^{2iX}-1}{2iX}$, laquelle s'écrit $\frac{1}{2iX}(1 + \frac{2iX}{1!} + \frac{(2iX)^2}{2!} + \frac{(2iX)^3}{3!} + \cdots - 1) = \frac{1}{1!} + \frac{2iX}{2!} + \frac{(2iX)^2}{3!} + \cdots$ ou si on aime mieux $\Sigma_{n=0}^{+\infty}\alpha_n X^n$ avec $\alpha_n = \frac{(2i)^n}{(n+1)!}$.

La série $\frac{2iX}{e^{2iX}-1}$ cherchée s'écrit donc $\Sigma_{n=0}^{+\infty}\beta_n X^n$ où les coefficients β_n peuvent être calculés de proche en proche au moyen des relations

$$\begin{gathered} \alpha_0\beta_0 = 1,\ \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 = 0,\ \alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0 = 0, \\ \alpha_0\beta_3 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_0 = 0, \ldots \end{gathered} \tag{9}$$

(l'usage de lettres grecques, ici, est destiné à éviter toute confusion avec les nombres de Bernoulli dont on dira un mot plus loin).

Le rapprochement de (8) et de l'égalité $X\cot X = iX + \frac{2iX}{e^{2iX}-1} = \beta_0 + (\beta_1 + i)X + \Sigma_{n=2}^{+\infty}\beta_n X^n$ montre que $\zeta(2) = -\frac{\beta_2}{2}\pi^2$, $\zeta(4) = -\frac{\beta_4}{2}\pi^4$, $\zeta(6) = -\frac{\beta_6}{2}\pi^6$, etc. Le lecteur avisé verra sans doute d'avance que $\beta_1 + i = 0$, $\beta_3 = 0$, $\beta_5 = 0$, etc. Quoi qu'il en soit, les relations (9) donnent successivement (et de plus en plus péniblement) :

$\alpha_0 = 1 \quad \beta_0 = 1$
$\alpha_1 = i \quad \beta_1 = -i$
$\alpha_2 = -\frac{2}{3} \quad \beta_2 = -\frac{1}{3} \quad$ d'où $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$
$\alpha_3 = -\frac{i}{3} \quad \beta_3 = 0$
$\alpha_4 = \frac{2}{15} \quad \beta_4 = -\frac{1}{45} \quad$ d'où $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$
$\alpha_5 = \frac{2i}{45} \quad \beta_5 = 0$
$\alpha_6 = -\frac{4}{315} \quad \beta_6 = -\frac{2}{945} \quad$ d'où $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$
$\alpha_7 = -\frac{i}{315} \quad \beta_7 = 0$
$\alpha_8 = \frac{2}{2835} \quad \beta_8 = -\frac{1}{4725} \quad$ d'où $\zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}$
$\alpha_9 = \frac{2i}{14175} \quad \beta_9 = 0$

4. Epilogue : les nombres de Bernoulli

On peut trouver gênant que le calcul des nombres β_n dépende d'une série dont certains coefficients soient des nombres imaginaires. Le mal vient évidemment de la série $\frac{2iX}{e^{2iX}-1}$. C'est pourquoi on présente souvent les résultats précédents au moyen de la série $\frac{X}{e^X-1}$ qui n'a pas les mêmes inconvénients et pour des raisons variées on en profite pour multiplier le coefficient du terme en X^n par $n!$. Le résultat obtenu se note souvent b_n (cf. N. Bourbaki, Fonctions d'une variable réelle, chap. VI, p.8, 1976) et s'appelle le n-ième *nombre de Bernoulli*. De façon précise, les nombres b_n sont définis par le "développement de Taylor"

$$\frac{X}{e^X-1} = b_0 + \frac{b_1}{1!}X + \frac{b_2}{2!}X^2 + \frac{b_3}{3!}X^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{n!}X^n.$$

Comme il s'agit d'inverser la série $\frac{e^X-1}{X} = \frac{1}{1!} + \frac{X}{2!} + \frac{X^2}{3!} + \cdots = \Sigma_{n=0}^{+\infty}\frac{X^n}{(n+1)!}$, on doit avoir $b_0 = 1$ et $\frac{1}{1!}\frac{b_n}{n!} + \frac{1}{2!}\frac{b_{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!}b_0 = 0$ pour tout $n \geq 1$. En multipliant les deux membres de cette relation par $(n+1)!$, on obtient des coefficients binômiaux C_{n+1}^k et donc la relation, assez commode pour les calculs :

$$C_{n+1}^1 b_n + C_{n+1}^2 b_{n-1} + \ldots + C_{n+1}^{n+1} b_0 = 0 \tag{10}$$

c'est-à-dire concrètement $2b_1 + b_0 = 0$, $3b_2 + 3b_1 + b_0 = 0$, $4b_3 + 6b_2 + 4b_1 + b_0 = 0$, $5b_4 + 10b_3 + 10b_2 + 5b_1 + b_0 = 0$, $6b_5 + 15b_4 + 20b_3 + 15b_2 + 6b_1 + b_0 = 0$, etc. On trouve ainsi sans trop de difficultés $b_1 = -\frac{1}{2}, b_2 = \frac{1}{6}, b_3 = 0, b_4 = -\frac{1}{30}, b_5 = 0$. Des considérations de parité relatives à la série $\frac{X}{e^X-1} + \frac{1}{2}X$ permettent de montrer que $b_{2n+1} = 0$ si $n \geq 1$. Il reste donc à trouver b_{2n} pour $n \geq 3$, ce qui est laissé au lecteur, disons jusqu'à $2n = 30$.

De la définition des nombres b_n résulte que $\frac{2iX}{e^{2iX}-1} = \Sigma_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!}(2iX)^n$. De là, on tire le développement de $X \cot X = iX + \frac{2iX}{e^{2iX}-1}$ en fonction des nombres de Bernoulli :

$$X \cot X = 1 - 4\frac{b_2}{2!}X^2 + 16\frac{b_4}{4!}X^4 - 64\frac{b_6}{6!}X^6 + \cdots = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k 2^{2k}\frac{b_{2k}}{(2k)!}X^{2k}$$

et l'expression usuelle des nombres $\zeta(2k)$:

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1}\frac{(2\pi)^{2k}b_2 k}{2(2k)!}. \tag{11}$$

Cela permet de voir que les nombres b_{2k} sont alternativement positifs et négatifs (ce qui n'était pas du tout évident au départ) et de donner à partir des inégalités $1 \leq \zeta(2k) \leq \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ l'encadrement suivant pour b_{2k} :

$$\frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \leq |b_{2k}| \leq \frac{(2k)!}{3.2^{2k}\pi^{2k-2}}$$

de sorte que l'on a $b_{30} \geq 601\ 580\ 873$, $b_{40} \geq 1,92 \times 10^{16}$, $b_{50} \geq 7,5 \times 10^{24}$, etc. Je recopie sans réfléchir des calculs que j'ai fait l'an dernier et que j'ai la flemme de vérifier. Le lecteur s'en chargera!

Les nombres de Bernoulli interviennent dans plusieurs autres formules. Citons

$$\tan X = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}2^{2k}(2^{2k}-1)b_{2k}\frac{x^{2k-1}}{(2k)!}$$

$$\frac{1}{\sin X} = \frac{1}{X} + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}2(2^{2k-1}-1)b_{2k}\frac{X^{2k-1}}{(2k)!}.$$

Là, je recopie Bourbaki (FVR, chap. VI, p. 22, ex. 1 du § 22) en remplaçant n par k et z par X : c'est assez facile.

Avis aux amateurs : y a-t-il quelque chose de semblable pour $\frac{1}{\cos X}$?

Plus intéressante est l'identité :

$$1^k + 2^k + \cdots + n^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{2}n^k + \frac{1}{k+1}\sum_{i=2}^{k} C_{k+1}^i b_i n^{k+1-i}$$

qui est en fait à l'origine des nombres b_n et qui a été découverte par Jacques Bernoulli vers la fin du XVII$^{\text{e}}$ siècle (l'appellation même de "nombres de Bernoulli", popularisée par Euler, est due à de Moivre).

Mais ce qui est fascinant (du moins pour moi qui n'y comprends rien) est le fait que les numérateurs des nombres b_{2n} jouent un rôle capital dans la résolution

(encore inachevée) de l'équation de Fermat $x^m + y^m = z^m$. Je ne sais si, un jour, le groupe de Saumur aura l'occasion d'aborder ces difficiles questions ... Pour la saison 92-93, il a déjà prévu à son programme les fractions continues et l'équation de Pell. Du gâteau!

Post-scriptum

Je m'aperçois en relisant que je n'ai rien dit des nombres $\zeta(2k+1)$. C'est que la situation est très simple : jusqu'en 1979 (je mets ici la date de parution de l'article explicatif dans la revue "*Astérisque*"), on ne savait rien d'important à leur sujet. Depuis cette date, on sait, grâce à Roger Apéry, que $\zeta(3)$ est irrationnel. C'est tout.

Bien entendu, cela n'empêche pas de calculer $\zeta(3), \zeta(5)$, etc., avec le plus de décimales possibles. Euler avait déjà commencé, dans les années 1740, en donnant $\zeta(3)$ avec 15 décimales, grâce à la formule dite d'Euler-Maclaurin qui, j'y pense tout à coup, dépend aussi des nombres de Bernoulli. Ils sont vraiment partout!

AIGUILLES A TRICOTER

On trouvait page 21 de '*L'Ouvert*' n° 66 le problème de la conversion des mesures françaises (métriques) en mesures anglo-saxonnes pour la taille des aiguilles à tricoter.

Notons "f" la mesure française qui n'est autre que le diamètre en millimètres et "a" la mesure anglaise.

Différentes fonctions peuvent être proposées reliant f et a, étant donnée la précision très relative de l'appareil. Comme f et a varient en sens inverse l'un de l'autre on peut chercher une relation de la forme $(\alpha f + \beta)(\alpha' a + \beta') = \gamma$.

Dans ce cas, la réponse :

$$(5f + 22)(a + 16) = 1000$$

est satisfaisante et permet de travailler avec des entiers. On peut proposer d'autres types de réponses, mais la rédaction de '*L'Ouvert*' n'a rien reçu sur le sujet.