ULP

1992

LES NOMBRES NEGATIFS

ONT UNE HISTOIRE

I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 Strasbourg Cedex
Tél. 88 41 63 07 Secrétariat
88 41 64 40 Bibliothèque
Telex : ULP 870 260 F
Fax : 88 61 90 69

S. HAEGEL

LES NOMBRES NEGATIFS

L'utilisation des nombres négatifs nous est familière. Pourtant leur histoire nous montre qu'il n'en a pas toujours été ainsi. Leur reconnaissance date à peine de deux siècles! Le nombre, en effet, n'a au départ aucune existence propre, on dit par exemple un cheval, deux moutons.

L'invention des nombres a donc été motivée par le comptage. Le nombre était d'abord entier et toujours suivi d'une unité.

En mathématiques (on devrait dire en géométrie) les nombres représentaient une mesure, mesure de longueur, de surface, de volume, ils étaient évidemment positifs.

Quand les pythagoriciens ont découvert l'incommensurabilité de la diagonale et du côté d'un carré, ils n'ont pas parlé de nouveaux nombres : le Cosmos n'était pas aussi parfait qu'ils le pensaient auparavant. Les nombres entiers étaient, eux, merveilleux. On étudiait leurs propriétés : certains étaient pairs, d'autres triangulaires, d'autres encore parfaits etc...

Léopold Kronecker a dit : *"Dieu a fait les nombres entiers tout le reste est l'oeuvre de l'homme."* L'homme n'avait donc pas inventé les nombres entiers, il découvrait la perfection de la création.

Il en irait donc tout autrement des nombres négatifs? Ils ne feraient pas partie de la création! Ce serait une invention des hommes! Notre propos n'est pas d'entrer dans ce débat théologique.

Où rencontre-t-on les nombres négatifs? Dans quels problèmes apparaissent-ils? Depuis quand les mathématiciens les utilisent-ils? Depuis le développement du commerce accompagné de ses incontournables dettes? Les *géomètres* laissent ces problèmes aux *mathématici* (les calculateurs). Pour inventer les nombres négatifs, il a fallu les rencontrer en mathématiques et c'est ce cheminement que nous allons essayer de suivre.

C'est chez Diophante (250 après JC) que l'on trouve pour la première fois des problèmes qui font intervenir des nombres autres qu'entiers :

1) Diviser un nombre donné en deux parties ayant une différence donnée.
2) Trouver quatre nombres tels que la somme des trois premiers excède le quatrième par un nombre donné.
3) Etant donné deux nombres, trouver un troisième tels que les sommes des diverses paires multipliées par le troisième nombre correspondant fournissent trois nombres en progression arithmétique.
4) Trouver deux nombres tels que le carré de l'un ajouté à l'autre donne un carré.
5) Trouver deux nombres tels que leur somme et leur produit forment des nombres donnés.
6) Diviser une fraction donnée en 3 parties telles que l'une quelconque d'entre elles moins le cube de leur somme donne un carré.

Ce qui est remarquable, chez Diophante, c'est que dans ses problèmes il fait peu référence à la géométrie, ses énoncés portent sur des nombres. Il faut d'ailleurs remarquer que si ses solutions mènent à des résultats irrationnels, il les rejette. Les irrationnels ne sont donc pas des nombres! Leur existence est liée à la géométrie. Parallèlement les géomètres ingénieurs tels que HERON (II^{e} siècle avant J.C) n'ont aucun scrupule à utiliser les irrationnels : Avant de construire un pont il faut prévoir ses dimensions, ce qui amène à travailler avec les résultats tels qu'ils se présentent, irrationnels ou non. Héron d'ailleurs ne respecte pas non plus la règle qui considère comme un non sens le fait de multiplier plus de trois nombres. (On dépasse alors la dimension trois!) Sa célèbre formule : $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ donne presque toujours des résultats irrationnels.

Diophante procède donc comme si les nombres avaient une existence propre. C'est un premier pas vers l'indépendance, on pourrait qualifier cette attitude de révolutionnaire: Pour la première fois des nombres, non nécessairement entiers, se sont débarrassés du joug de la géométrie. Une porte est ouverte, il faudra pourtant encore attendre plusieurs siècles avant de voir les nombres négatifs s'y engouffrer!

Voici la solution de l'exercice 5) telle qu'elle a été donnée par Diophante. (Il utilisait un peu de symbolisme mais ses solutions se présentent comme un texte continu.) On pourra voir, ci contre un extrait de Diophante.

La somme est 20 et leur produit 96. Supposons que la différence des deux nombres fasse 2d leur somme fait 20, les deux nombres s'écrivent : *"10+d"* et *"10-d"*.

On connaît leur produit : 96

d'où : $100 - d^2 = 96$

Diophante donne les règles *"moins par moins égale plus"*
"plus par moins égale moins"

Il est clair que ces règles ne s'appliquent pas aux nombres négatifs mais expliquent comment on multiplie une soustraction par une soustraction ou par une addition.

Continuons le raisonnement de Diophante :
On a : $d^2 = 4$ donc $d = 2$ (il n'y a pas lieu pour lui de parler de la solution $d = -2$).

XX

Partager une fraction donnée en trois fractions, de manière que

(I). — Trouver trois nombres dont la somme est un carré, et tels que chacun d'eux, diminué du cube de leur somme, forme un carré.

(II). — Trouver trois nombres tels que leur somme soit un nombre donné, et tels que le cube de leur somme, augmenté de chacun d'eux, forme un carré.

(III). — Trouver trois nombres tels que leur somme soit un nombre donné, et tels que le cube de leur somme, diminué de chacun d'eux, forme un carré.

Le premier de ces problèmes aurait donc été en corrélation avec les problèmes XVIII et IX ; tandis que les deux autres auraient été en corrélation avec le problème X. Comme l'a fait remarquer Nesselmann (loc. cit. p. 410), le fragment de solution que présente le texte appartiendrait en réalité à la solution de la troisième proposition dont Bachet a proposé la reconstitution de l'énoncé.

On peut donc utiliser ce fragment pour reconstituer une solution complète, à la manière de Diophante, du troisième problème énoncé ci-dessus.

Soit 2 le nombre donné comme étant la somme des trois nombres cherchés. Les conditions du problème sont donc : $X+Y+Z=2$ (I) ; $(X+Y+Z)^3-X=\alpha^2$ (II) ; $(X+Y+Z)^3-Y=\beta^2$ (III) ; $(X+Y+Z)^3-Z=\gamma^2$ (IV).

Dès lors, on a, comme dans le fragment du texte : $(X+Y+Z)^3=8$, et pour satisfaire aux trois dernières relations, il faudra, comme dans le fragment du texte, retrancher chacun des nombres X, Y, Z de 8, de manière à obtenir un nombre carré. Or, les trois dernières conditions donnent, par addition : $3(X+Y+Z)^3-(X+Y+Z)=3\times 8-2=22=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$; donc, il faut, comme dans le fragment du texte, partager 22 en trois carrés respectivement plus grands que 6 et plus petits que 8. Et si nous retranchons les carrés ainsi trouvés de 8, nous aurons, comme le dit le fragment, les nombres cherchés. Le reste du fragment se borne à renvoyer à la méthode exposée précédemment, c'est-à-dire à celle de la proposition XI, pour partager 22 en trois carrés répondant aux conditions indiquées.

Considérons donc que les trois carrés seront plus grands que 6 et plus petits que 8 si on les détermine au plus près de $\frac{22}{3}=7\frac{1}{3}$. Soit donc $\frac{1}{9x^2}$ la fraction à ajouter à $7\frac{1}{2}$ pour que l'expression $7\frac{1}{3}+\frac{1}{9x^2}$ soit égale à un carré. Égalons cette expression au carré $\left(\frac{1+8x}{3x}\right)^2$, et il vient : $66x^2+1=(1+8x)^2$, d'où : $x=8$, d'où : $\frac{1}{9x^2}=\frac{1}{576}$. En conséquence, $7\frac{1}{3}+\frac{1}{576}=\left(\frac{65}{24}\right)^2$; nombre carré dont doivent se rapprocher les carrés α^2, β^2, γ^2, et qui répond donc à la condition : $6<\left(\frac{65}{24}\right)^2<8$. Or, considérant que l'on a : $22=3^2+3^2+2^2$, la comparaison de la racine $\frac{65}{24}$, avec les trois racines 3, 3, 2, montre que $\frac{65}{24}$ est inférieur à 3 de $\frac{7}{24}$, et supérieur à 2 de $\frac{17}{24}$, c'est-à-dire que l'on a : $\frac{65}{24}=3-\frac{7}{24}=2+\frac{17}{24}$. Dès lors, adoptons les déterminations : $\alpha^2=(3-7y)^2$; $\beta^2=(3-7y)^2$, et $\gamma^2=(2+17y)^2$, et l'on doit avoir : $22=(3-7y)^2+(3-7y)^2+(2+17y)^2$ d'où : $y=\frac{16}{387}$. Donc : $\alpha^2=\frac{1100401}{149769}$; $\beta^2=\frac{1100401}{149769}$, $\gamma^2=\frac{1094116}{149769}$. En conséquence, les trois nombres qui partagent 2 seront : $X=8-\frac{1100401}{149769}=\frac{97751}{149769}$; $Y=8-\frac{1100401}{149769}=\frac{97751}{149769}$, $Z=8-\frac{1094116}{149769}=\frac{104036}{149769}$.

chacune d'elles, diminuée du cube de la somme de ces trois fractions, forme un carré.

Que la fraction donnée soit $\frac{1}{4}$; il faut partager $\frac{1}{4}$ en trois fractions comme on le propose. En conséquence, il faut que chacune des fractions, diminuée de $\frac{1}{64}$ d'unité, forme un carré. Dès lors, la somme des trois fractions, diminuée de $\frac{3}{64}$ d'unité, forme la somme de trois carrés ; et, si l'on ajoute $\frac{1}{64}$ à chacun de ces carrés, on trouvera chacune des fractions cherchées. Or, la chose est aisée ; car elle se ramène à partager $\frac{13}{64}$ en trois carrés ; ce qui est facile (1).

XXI

Trouver trois carrés tels que le nombre solide issu de ces trois carrés (2), augmenté de chacun d'eux, forme un carré.

Posons que le nombre solide issu des trois carrés est 1 carré d'arithme, et cherchons trois carrés tels que, chacun d'eux forme un carré s'il est augmenté de 1 unité. Or, cela s'obtient au moyen d'un triangle rectangle quelconque. Choisissons trois triangles rectangles, et, prenant le carré de l'une des perpendiculaires, divisons-le par le carré de la perpendiculaire restante. Nous trouverons ainsi que l'un des carrés est $\frac{9}{16}$ de carré d'arithme, que l'autre est $\frac{25}{144}$ de carré d'arithme, et que le troisième est $\frac{64}{225}$ de carré d'arithme. Il se fait ainsi que chacun de ces carrés, augmenté de 1 carré d'arithme, forme un carré.

Reste à égaler le nombre solide issu des trois carrés à 1 carré d'arithme. Or, le nombre solide issu des trois carrés devient $\frac{14400}{518400}$ de cubocube d'arithme. Égalons-les à 1 carré d'arithme ; divisons tout

1. Le problème pose les conditions : $X+Y+Z=\frac{1}{4}$; $X-(X+Y+Z)^3=\alpha^2$; $Y-(X+Y+Z)^3=\beta^2$; $Z-(X+Y+Z)^3=\gamma^2$.

La première condition donne : $(X+Y+Z)^3=\frac{1}{64}$. Dès lors, les trois autres conditions donnent, par addition : $X+Y+Z-\frac{3}{64}=\frac{1}{4}-\frac{3}{64}=\frac{13}{64}=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$. Il faut donc partager $\frac{13}{64}$ en trois carrés. Or, $\frac{13}{64}=\frac{9}{64}+\frac{4}{64}=\frac{9}{64}+\frac{1}{25}+\frac{9}{400}$. Adoptons donc les déterminations : $\alpha^2=\frac{9}{64}$; $\beta^2=\frac{1}{25}$, $\gamma^2=\frac{9}{400}$, et les trois dernières conditions donnent : $X=\frac{9}{64}+\frac{1}{64}=\frac{10}{64}=\frac{250}{1600}$; $Y=\frac{1}{25}+\frac{1}{64}=\frac{89}{1600}$; $Z=\frac{9}{400}+\frac{1}{64}=\frac{976}{25600}=\frac{61}{1600}$.

2. ὁ ἐκ τῶν τριῶν στερεός, le (nombre) solide issu des trois (carrés) ; c'est-à-dire le produit continu des trois nombres carrés cherchés.

Les nombres cherchés sont : $10+2 = 12$ et $10-2 = 8$.

Avant d'aller plus avant il nous faut rappeler ici que les calculateurs chinois([1]) utilisaient les nombres négatifs. Sur leurs abaques ils utilisaient des **bâtons rouges et noirs** pour différencier les dettes des gains. Les nombres positifs sont désignés par ***"cheng"*** et les négatifs par ***"fu"***.

Voici un énoncé que l'on peut trouver dans le *"Chiu chang suan shu"*, livre d'arithmétique chinois :

> *"Si l'on vend deux boeufs et cinq moutons et que l'on achète treize cochons il reste mille pièces. Si l'on vend trois boeufs et trois cochons et si l'on achète neuf moutons, il ne reste rien. Si l'on vend six moutons et huit cochons et que l'on achète cinq boeufs l'argent ne suffit pas, il manque six cents pièces ."*

Ce problème est différent de ceux donnés par Diophante, il ne s'agit pas ici de problèmes concernant des nombres. Ce qui est intéressant c'est la méthode proposée pour le résoudre :

On lit : *"pose positivement deux boeufs et cinq moutons et négativement treize cochons et la somme restante positivement".*

Nous écririons :
$$\begin{aligned} 2x + 5y - 13z &= 1000 \\ 3x - 9y + 3z &= 0 \\ -5x + 6y + 8z &= -600 \end{aligned}$$

Ils résolvent ce genre de problèmes à l'aide de matrices :

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 6 & -9 & 5 \\ 8 & 3 & -13 \\ -600 & 0 & 1000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \\ 8 & -2 & -13 \\ -600 & 400 & 1000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 37 & 2 & 5 \\ -49 & -2 & -13 \\ 3800 & 400 & 1000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & x \\ 0 & 2 & 5 & y \\ -24 & -2 & -13 & z \\ -7200 & 400 & 1000 & \end{pmatrix}$$

Ils simplifient ainsi le système qui s'écrit :

$$\begin{aligned} &-24z = -7200 \\ &2y - 2z = 400 \\ &2x + 5y - 13z = 1000 \quad \text{d'où } z = 300 \;\; y = 500 \;\; \text{et } x = 1200 \end{aligned}$$

Chez les Hindous qui ont lu les textes chinois, les mots ***"dhana"*** et ***"rna"*** désignent les biens et les dettes, mais ils sont aussi utilisés d'une manière tout à fait abstraite pour désigner les nombres positifs et négatifs.

Brahmagupta (Hindou du VII^{e}) complète les règles données par Diophante *"Positif divisé par positif ou négatif divisé par négatif est positif. Zéro divisé par zéro est rien. Positif divisé par négatif est négatif. Négatif divisé par positif est négatif. Positif ou négatif divisé par zéro est une fraction en rapport avec le dénominateur."*

Les nombres négatifs sont notés surmontés d'un point.

---

[1] évolution de la numération (Irem Strasbourg)

Bhaskara (Hindou XII^e) met en évidence que la racine d'un nombre positif est double : positive et négative. Il soulève également le problème de la racine d'un nombre négatif et déclare qu'elle n'existe pas. Mais, lors de la résolution de problèmes, lorsqu'il trouve une solution négative, il écrit : *"Elle est inadéquate ; les gens n'approuvent pas les solutions négatives"*

Voici un de ses exercices:

> *"Le carré du cinquième d'une bande de singes moins trois entrent dans une grotte. Il ne reste qu'un singe."*

Nous écririons : $\left(\frac{x}{5} - 3\right)^2 + 1 = x$

ou : $x^2 - 55x = -250$

Bhaskara écrit : yav1 ya55 ru 0
yav0 ya0 ru 250

(avec $yav = x^2$; $ya = x$; $ru = x^0$)

On trouve: $x = 50$ ou $x' = 5$

Il supprime la dernière solution car dans ce cas $\frac{x}{5} - 3$ est négatif. Nous supprimons également la dernière solution, car même avec beaucoup d'imagination nous ne savons pas interpréter ces (-2) singes même si élevés au carré ils deviennent 4.

Voici un autre de ses exercices:

> *"On connaît la longueur des trois côtés d'un triangle. On mène une hauteur, quelle est la longueur des segments qu'elle définit sur la base?"*

Applications numériques :

1) $a=5$, $b=6$, $c=7$
2) $a=17$, $b=10$, $c=9$

Solution :

Soit a, b, c la longueur des côtés, c étant la longueur de la base. On a donc les égalités suivantes :

$$c_1 + c_2 = c$$
$$h^2 = a^2 - c_1^2$$
$$h^2 = b^2 - c_2^2$$

1) $c_1 + c_2 = 7$
$h^2 = 5^2 - c_1^2$

$h^2 = 6^2 - c_2^2$

On obtient donc :

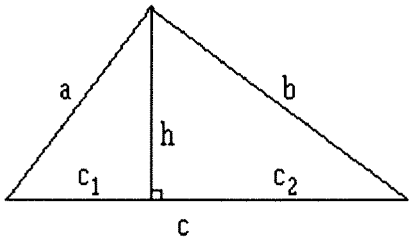
$c_1 + c_2 = 7$

$c_2^2 - c_1^2 = 9$

D'où :

$c_1 + c_2 = 7$

$c_2 - c_1 = \frac{9}{7}$



Finalement:

$c_2 = \frac{29}{7}$

$c_1 = \frac{20}{7}$

2) $c_1 + c_2 = 9$

$h^2 = 17^2 - c_1^2$

$h^2 = 10^2 - c_2^2$

$c_1 + c_2 = 9$

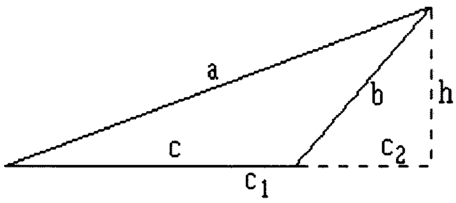
$c_2^2 - c_1^2 = -189$

$c_1 + c_2 = 9$

$c_2 - c_1 = -21$

$c_2 = -6$

$c_1 = 15$



On trouve dans le deuxième cas une solution négative, si on ne la rejette pas, que représente-t-elle? Ce résultat illustre bien la réflexion d'Albert Girard (p8) qui a dit que les nombres négatifs représentent une **régression** en géométrie: Dans ce cas, en effet, le pied de la hauteur est à l'extérieur du triangle. Notre hypothèse *"$c_1 + c_2 = 9$"* est donc fausse et Jean d'Alembert (p10) dit :

> *"ainsi les quantités négatives indiquent réellement dans les calculs des quantités positives(...)parce qu'il y a erreur tacite dans l'hypothèse du problème"*

Les mathématiciens arabes qui ont travaillé sur des textes hindous, et grecs ont gardé l'idée du nombre qu'avaient les Grecs. En effet, Al-Huwarizmi (vers le IX^{e}s) dans la première moitié de son *"algèbre"* expose en six chapitres la résolution des six équations :

$ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $ax^2 + bx = c$

$ax^2 + c = bx$, $bx = c$, $bx + c = ax^2$

Les nombres a, b, c sont des nombres positifs donnés (il n'utilise pas de lettres) et, si on change les coefficients c'est toute l'équation qui est transformée.

Ainsi $3x^2 - 6x + 1 = 0$ s'écrit : $3x^2 + 1 = 6x$ et $3x^2 - 6x - 1 = 0$ $3x^2 = 6x + 1$

Dans tous les cas, bien sûr, il ignore les racines négatives ainsi que la racine nulle.

C'est à AL-Karrhi (1020) que l'on attribue les premières solutions numériques des équations du type : $\mathbf{ax^{2n} + bx^n = c}$ et là aussi en termes de racines positives seulement.

AL-Samaw'Al médecin arabe réputé est le premier à exposer systématiquement les règles portant sur des quantités négatives comme:
$-(-ax^n) = ax^n$ ou $-ax^n - (bx^n) = -(a+b)x^n$

Il définit également:
$x^0 = 1$ puis $x^m x^n = x^{m+n}$ pour tout entier relatif

C'est, semble-t-il, Chuquet (XV^e) qui fut le premier à exprimer isolément un nombre négatif dans une équation algébrique:
$4x = -2$

Que représente *"-2"* pour Chuquet? Une étape dans un calcul? Sans doute, puisqu'il refuse généralement zéro comme solution tout comme les solutions négatives qu'il qualifie de nombres *absurdes*. Pourtant le problème suivant posé par Chuquet mène à une solution négative :

> *"Trouver cinq nombres tels que leur somme sauf le premier fasse 120 et que leur somme sauf le deuxième fasse 150, sans le troisième elle fait 240 , sans le quatrième, elle fait 300 et sans le cinquième elle fait 360."*

On trouve comme solution 180, 120, 60, 0 et -60

Il explique que si on domine les opérations avec les nombres négatifs, on peut vérifier que cette solution convient.

En résolvant des équations du type :

$ax^n + bx^{n+m} = cx^{n+2m}$

Il trouve dans certains cas des solutions imaginaires qu'il appelle *"nombres inépéribles"*. (ineperible vient sans doute du grec *"apeiros"* *"par l'expérience"* les nombres inépéribles ne sont donc pas des produits d'une expérience. Apeiros a également donné le mot *"empirique"*)

Stifel (1487-1567) dans son livre *"Arithmetica integra"* donne les règles de calcul concernant les nombres négatifs sur des exemples :

$12 - 10 = 2$; $10 - 10 = 0$; $8 - 10 = 0 - 2$

Il dit que l'on peut comparer la position des nombres négatifs par rapport au zéro à la position des fractions de l'unité par rapport à l'unité.

Stifel travaille avec des exposants négatifs et ces règles s'appliquent donc à eux. Il compare la progression arithmétique :

-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5

à la progression géométrique:

$\frac{1}{32}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\ 1\ 2\ 4\ 8\ 16\ 32$

Et fait constater le parallélisme qui existe entre les relations:

à $2 + 3 = 5$ correspond $4 \times 8 = 32$
à $-2+(-3) = -5$ correspond $\frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$

Stifel utilise les nombres négatifs comme outil simplifiant la notation *"fraction"* et les opérations que l'on est conduit à faire. Rappelons que Néper est né en 1550 et mort en 1617. Stifel adopte une démarche analogue à celle qu'utilisera Néper : *"Transformer une suite géométrique en une suite arithmétique dans le but de simplifier les calculs"*.

Bombelli (1526-1572) propose de représenter les nombres réels sur une droite orientée. Pour lui, les nombres négatifs existent et l'idée qu'il en a est la nôtre mais cela ne suffira pas à lever les réticences.

Cardan (1501-1576) cite les solutions négatives dans la résolution de ses équations mais il les considère comme *"impossibles"*, ce sont de simples symboles. Il les appelle *"nombres fictifs"*. Il explique que les solutions négatives d'une équation peuvent mener à de vraies solution d' une autre équation:

$x^2 = 4x + 32$, a pour solution -4 donc $x^2 + 4x = 32$, a pour solution 4

On retrouvera cette attitude chez Descartes et beaucoup plus tard chez De Morgan.

Dans ses exemples de résolution de cubiques, il tombe sur des racines carrées de nombres négatifs, qu'il appelle *"sophistiquées"* il considère alors ses solutions *"aussi subtiles qu'inutiles"*. Dans le chapitre 7 de *"Ars magna"* il propose le problème suivant :

> *"Diviser 10 en deux parties dont le produit est 40."* Cardan obtient les solutions: $5 + \sqrt{-15}$ et $5 - \sqrt{-15}$ il dit : *"Ainsi progresse la subtilité arithmétique, dont la fin est aussi raffinée qu'elle est inutile"*.

Lui aussi traite de façon distincte un grand nombre d'équations car il n'admet que les coefficients positifs.
Viete (1540-1603) écrit son algèbre, il utilise des lettres comme coefficients dans ses équations. Pour la première fois quelqu'un essaye de généraliser les résultats. Dans son livre *"logistica speciosa"* il donne une méthode générale pour résoudre les équations du second de-

gré : Les quantités connues sont représentées par des consonnes alors que les quantités inconnues le sont par des voyelles. Mais, et cela peut nous paraître inexplicable, il refuse que l'on attribue des valeurs négatives aux lettres et il rejette les solutions négatives.

A partir de l'équation :

$$A^3 - B.A = Z$$

Il explique comment ne faire apparaître que des additions.

Il pose $E = \frac{Z}{A}$ et l'équation ci dessus s'écrit :

$$\left(\frac{Z}{E}\right)^3 - B\ \frac{Z}{E} = Z \text{ ou encore}$$

$$Z^2 = B.E^2 + E^3$$

Les solutions sont en fait toujours liées à la géométrie et les nombres négatifs n'ont toujours pas de signification pour lui! Les coefficients sont toujours positifs car ils représentent des grandeurs géométriques. La géométrie lui permet de justifier le raisonnement algébrique. De plus, il respecte les règles d'homogénéité :

Dans l'équation : $ax = c$,

"*c*" est une mesure de volume,
"*x*" une mesure d'aire
"*a*" une mesure de longueur.

Il écrit cette équation sous la forme:

Bin A quadratus aequatur D solido
ou encore : Bin A q aequatur D solido

Et c'est Albert Girard (1595-1632) qui, pour la première fois accepte l'existence de racines négatives et imaginaires. Il explique que le négatif en géométrie correspond à une **régression** alors que le positif correspond à un **avancement** :

> *"La solution par moins s'explique en géométrie en rétrogradant, et le moins recule là ou le plus avance."*

Il justifie aussi son acceptation des solutions négatives et complexes : *"pour la certitude des règles générales, pour montrer qu'il n'en existe pas d'autres et pour leur utilité."*

Il n'accepte donc pas vraiment l'existence des **nombres négatifs**, ce sont des outils lui permettant d'être rigoureux dans ses résolutions :
Si une équation n'a que des solutions négatives, celles ci lui permettent de prouver que l'équation n'a pas de solutions.

Descartes (1596-1650) qualifie les racines négatives de *"fausses"* et il prouve que l'on peut transformer les équations menant à des réponses négatives en des équations qui, elles, mènent à des résultats positifs :

"Mais souvent il arrive que quelques unes de ces racines sont fausses, ou moindre que rien. Comme si on suppose que x désigne aussi le défaut d'une quantité qui fait 5, on a $x + 5 = 0$ qui étant multipliée par :

$x^3 - 9xx + 26x - 24x = 0$ fait : $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0$

pour une équation en laquelle il y a quatre racines, à savoir trois vraies qui sont 2, 3, 4 et une fausse qui est -5. (....) "

" Nous pouvons transformer les racines fausses en racines réelles".

"On peut toujours en augmentant la valeur des vraies racines d'une quantité qui soit plus grande que n'est celle d'aucune des fausses, faire qu'elles deviennent toutes vraies, en sorte qu'il n'y ait point deux signes qui s'entresuivent et outre cela que la quantité connue du troisième terme soit plus grande que le carré de la moitié de celle du second." (voir ci après)

Pourtant c'est grâce à la création de la géométrie analytique que la nécessité d'utiliser les nombres négatifs devait se faire jour. En effet, comment décrire une droite dans le plan muni d'un repère si on ne les utilise pas? (Ce n'est pas Descartes qui a crée la géométrie analytique, mais c'est lui qui a posé la pierre qui a permis de l'inventer). Pour Descartes l'algèbre reste une méthode d'analyse des problèmes géométriques.

Pascal (1623-1662) écrit dans ses Pensées :
" trop de vérité nous étonne ; j'en sais qui ne peuvent comprendre que, qui de zéro ôte 4 reste zéro. "

Il refuse l'algébrisation de la géométrie car celle ci n'a, pour lui, aucune base logique. Ce qui, il faut bien le dire, est vrai puisque les opérations, les règles de calcul sont basées sur l'intuition. Les nombres, qu'ils fussent positifs ou négatifs, s'ils ne sont pas entiers, n'ont aucune existence propre. Ce qu'Euclide a fait pour la géométrie et les nombres entiers : une construction rigoureuse, personne ne l'a fait jusqu'à présent pour les nombres réels!

Pourtant quand les mathématiciens utilisent les nombres négatifs, ils arrivent à des résultats cohérents. Cela permet de balayer les scrupules de certains mais pas de tout le monde.

Arnauld, théologien ami intime de Pascal, dit à propos de l'égalité :

$$\frac{(-1)}{1} = \frac{1}{(-1)}$$

"Comment un nombre plus petit pourrait-il être à un plus grand comme un plus grand à un plus petit?"

On retrouve ici le lien avec la géométrie euclidienne : les proportions.

berechnet man hieraus den Wert von x, so erhält man durch Addition von $\frac{1}{2}a$ den Wert von x.

Wie man alle falschen Wurzeln einer Gleichung in wahre verwandeln kann, ohne daß dadurch die wahren Wurzeln falsche werden.

Die zweite Aufgabe, die im folgenden einige Anwendungen finden soll, besteht darin, alle falschen Wurzeln einer Gleichung in wahre zu verwandeln. Dies geschieht, indem man die Werte der wahren Wurzeln um eine Größe vermehrt, die größer ist als der Wert irgendeiner falschen, dann werden alle falschen Wurzeln wahre, also folgen im Gleichungspolynom niemals zwei Vorzeichen + oder zwei Vorzeichen — aufeinander, und der Koeffizient des dritten Postens ist größer als das Quadrat des halben Koeffizienten des zweiten. Die Bestimmung einer Größe, wie die verlangte, ist auch, wenn die falschen Wurzeln der Gleichung nicht bekannt sind, möglich, denn es ist leicht, wenigstens nahezu ihre Größe abzuschätzen und dann eine Zahl zu nehmen, die sie um so viel oder um noch mehr übertrifft, als für den vorliegenden Zweck erforderlich ist. — Setzt man z. B. in der Gleichung

$$x^6 + nx^5 - 6n^2x^4 + 36n^3x^3 - 216n^4x^2 + 1296n^5x - 7776n^6 = 0$$

$$y - 6n = x$$

ein, so ergibt sich:

$$\begin{array}{llllll}
y^6 - 36n & y^5 + 540n^2 & y^4 - 4320n^3 & y^3 + 19440n^4 & y^2 - 46656n^5 & y + 46656n^6 \\
+ \; n & - 30n^2 & + 360n^3 & - 2160n^4 & + 6480n^5 & - 7776n^6 \\
 & - 6n^2 & + 144n^3 & - 1296n^4 & + 5184n^5 & - 7776n^6 \\
 & & + 36n^3 & - 648n^4 & + 3888n^5 & - 7776n^6 \\
 & & & - 216n^4 & + 2592n^5 & - 7776n^6 \\
 & & & & + 1296n^5 & - 7776n^6 \\
 & & & & & - 7776n^6 \\ \hline
y^6 - 35ny^5 & + 504n^2y^4 & - 3780n^3y^3 & + 15120n^4y^2 & - 27216n^5y & = 0.
\end{array}$$

Hier ist offenbar der Koeffizient des dritten Postens, $504\,n^2$, größer als das Quadrat von $\frac{35}{2}n$, der Hälfte des Koeffizienten des zweiten Postens. Die Größe, um die man die wahren Wurzeln zu vermehren hat, braucht in keinem Falle im Verhältnis zu den gegebenen Größen größer genommen zu werden, als es hier geschehen ist[40]).

Wie man bewirken kann, daß alle Posten einer Gleichung vorhanden sind.

In diesem Beispiele hat sich für den letzten Posten der Wert 0 ergeben; wenn dies unerwünscht sein sollte, so braucht man nur die Werte der Wurzeln um irgendeine Größe zu vermehren, und zwar kann man diese Größe beliebig klein annehmen und erreicht doch immer den beabsichtigten Zweck. Dies findet seine Anwendung, wenn man die Anzahl der Dimensionen einer Gleichung vermehren und doch alle Posten ausgefüllt erhalten will. Wenn z. B. die Gleichung

$$x^5 - b = 0$$

in eine andere verwandelt werden soll, in der die unbekannte Größe bis zur sechsten Dimension ansteigt und kein Posten den Wert Null hat, so hat man zuvörderst an Stelle von

$$x^5 - b = 0$$

zu schreiben

$$x^6 - bx = 0;$$

setzt man dann

$$x = y - a,$$

so kommt

$$y^6 - 6ay^5 + 15a^2y^4 - 20a^3y^3 + 15a^4y^2 - (6a^5 + b)y + a^6 + ab = 0$$

und in dieser Gleichung fehlt offenbar kein Posten, wie klein man auch die Größe a annehmen mag.

Wie man die Wurzeln, ohne sie zu kennen, multiplizieren oder dividieren kann.

Man kann auch die Wurzeln einer Gleichung, ohne ihre Werte zu kennen, mit einer beliebigen bekannten Größe multiplizieren oder durch eine solche dividieren; man denkt sich natürlich zu dem Ende eine neue Unbekannte eingeführt, die gleich ist der ursprünglichen, multipliziert oder dividiert mit derjenigen Größe, mit der die

Wallis (1616-1703) pense des négatifs qu'ils sont plus grands que l'infini tout en étant inférieurs à zéro. Dans *"arithmetica infinitorum"* il explique que : *"a étant un nombre positif"* le quotient $\frac{a}{0}$ est infini et comme $\frac{a}{(-1)}$ est plus grand, le dénominateur étant plus petit, il est plus grand que l'infini tout en étant inférieur à zéro car le résultat est négatif.

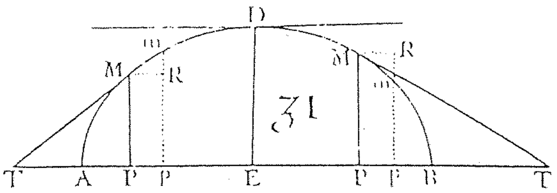
Il explique qu'il est impossible qu'une grandeur soit plus petite que rien mais si on les considère avec le point de vue du physicien, ces grandeurs peuvent avoir un sens.Il pense au principe de l'action et de la réaction

Le marquis de l'Hospital (1661-1704) écrit :

42 ANALYSE

ſant toujours, ſa différence ſera négative. Or toute quantité qui croît ou diminue continuellement, ne peut devenir de poſitive négative, qu'elle ne paſſe par l'infini ou par le zero; ſçavoir par le zero lorſqu'elle va d'abord en diminuant, & par l'infini lorſqu'elle va d'abord en augmentant. D'où il ſuit que la différence d'une quantité qui exprime un *plus grand* ou un *moindre*, doit être égale à zero ou à l'infini. Or la nature de la courbe *MDM* étant donnée, on trouvera* une valeur de *Rm*, laquelle étant égalée d'abord à zero, & enſuite à l'infini, ſervira à découvrir la valeur cherchée de *AE* dans l'une ou l'autre de ces ſuppoſitions.

* *Sect.* 1. n. 2.



Dans l'Encyclopédie de D'Alembert (1717-1783) on lit la définition des quantités négatives :

"Les quantités négatives en algèbre, sont celles qui sont précédées par le signe - et qui sont regardées par plusieurs mathématiciens comme plus petites que zéro. Cette dernière idée n'est cependant pas juste (...) Ainsi les quantités négatives indiquent réellement dans le calcul des quantités positives,mais qu'on a supposé dans une fausse position."

Bernoulli (1654-1705) et Leibnitz (1646-1716) ont échangé un abondant courrier concernant le logarithme d'un nombre négatif :

Leibnitz explique que l'on peut appeler imaginaires (non existantes) les quantités qui n'ont pas de logarithme, mais que l'on peut tout de même calculer avec elles.

Pour justifier de la non existence du logarithme d'un nombre négatif, il donne la raison suivante:

"Le logarithme d'un nombre plus grand que 1 est positif et le logarithme d'un nombre compris entre 0 et 1 est négatif, il ne reste donc plus de logarithmes pour les

4. Beweisgrund

Da es gemäß der Natur der Logarithmen sicher ist, daß der Logarithmus einer beliebigen Potenz p^n dem Logarithmus der Wurzel p selbst, multipliziert mit dem Exponenten n, gleich ist oder daß $\log p^n = n \log p$ ist, folgt daraus, daß man, wenn man p durch eine negative Zahl $-a$ ersetzt, $\log(-a)^n = n \log(-a)$ erhalten wird. Es sei $n=2$; dann wird $\log(-a)^2 = 2 \log(-a)$ sein. Weil aber $(-a)^2 = a^2$ ist, werden wir $\log(-a)^2 = \log a^2 = 2 \log a$ erhalten. Daraus folgt, daß $2 \log(-a) = 2 \log a$ ist, also $\log -a = \log +a$. Dies zeigt sich unmittelbarer auf folgende Art: Weil $(-a)^2 = (+a)^2$ ist, wird man $\log(-a)^2 = \log(+a)^2$ oder $2 \log -a = 2 \log +a$ und folglich $\log -a = \log +a$ erhalten.
Alle anderen Beweisgründe, die man anführen kann, um diese Auffassung zu beweisen, lassen sich leicht auf eine der vier reduzieren, die ich gerade dargestellt habe. Ich werde nun die Einwände, die man gegen diese Auffassung erhebt, sowie die Gründe, worauf diese sich stützt, darlegen.

1. Einwand

Herr Leibniz wandte gegen die erste Beweisführung ein, daß die Regel, den Logarithmus einer variablen Größe x zu differenzieren, indem man das Differential von x durch die gleiche Größe x teilt, nur gilt, wenn x eine positive Größe ist, so daß man sich irrt, wenn man das Differential von $\log -x$ gleich $\frac{-dx}{-x}$ oder $\frac{dx}{x}$ setzt [6]. Man muß nun aber zugeben, daß dieser Einwand nicht nur äußerst schwach ist und durch keinen gültigen

Beweisgrund gestützt wird, sondern die Differentialrechnung der Logarithmen völlig umstoßen würde. Da sich diese Rechnung auf variable Größen bezieht, d. h. auf allgemein betrachtete Größen, könnte man sich niemals dieser Regel bedienen, wenn es nicht allgemein wahr wäre, daß $\mathrm{d}\log x = \frac{\mathrm{d}x}{x}$ gilt, welche Größe man auch x zuordnet, sei es eine positive oder eine negative oder selbst eine imaginäre, denn die Richtigkeit der Differentialrechnung ist auf der Allgemeinheit der Regeln gegründet, die sie einschließt. Herr Leibniz hätte nun aber keine Veranlassung, sich auf diesen Einwand zu stützen, um seine Auffassung zu erhalten, weil er die Erklärung des Herrn Bernoulli durch einen sehr viel stärkeren Einwand als diesen hätte angreifen können.

2. Einwand

Indem Herr Bernoulli durch die Gleichheit der Differentiale beweisen wollte, daß $\log -x = \log +x$ sei, würde er durch den gleichen Gedankengang beweisen, daß $\log 2x = \log x$ sei, denn das Differential von $\log 2x$ ist $\frac{2\mathrm{d}x}{2x} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$, genau das gleiche wie das von $\log x$. Dementsprechend würde, wenn der Gedankengang des Herrn Bernoulli berechtigt wäre, daraus folgen, daß nicht nur $\log -x = \log +x$ ist, sondern auch $\log 2x = \log x$ und allgemein $\log nx = \log x$ ist, welche Zahl auch immer mit n bezeichnet wird, eine Schlußfolgerung, der Herr Bernoulli selbst niemals zustimmen würde. Man weiß nun, daß, wenn die Differentiale von zwei variablen Größen gleich sind, dann nicht mehr daraus folgt, als daß sich diese variablen Größen voneinander durch eine konstante Größe unterscheiden. Man wird daraus nicht schließen können, daß sie gleich seien. So wäre, obwohl das Differential von $x+a$ ebenso wie das von x gleich $\mathrm{d}x$ ist, die Schlußfolgerung durchaus falsch, daß $x+a=x$ sei. Durch diesen Gedankengang ist es also klar, daß sich die Größen $\log -x$ und $\log +x$, weil das Differential von $\log -x$ und das von $\log +x$ gleich $\frac{\mathrm{d}x}{x}$ ist, voneinander nur durch eine konstante Größe unterscheiden, was

ebenfalls offensichtlich ist, da $\log -x = \log -1 + \log x$ ist. Hieraus versteht man ebenso leicht, daß wegen $\log nx = \log x + \log n$ das Differential von $\log nx$ gleich dem Differential von $\log x$ sein muß. Herr Bernoulli nimmt allerdings an, daß $\log -1 = 0$ ist, ebenso wie $\log 1 = 0$ ist, so daß $\log -x = \log x + \log -1 = \log x$ wäre. Da dies aber genau das ist, was Herr Bernoulli durch diesen Gedankengang beweisen will, ist klar zu erkennen, daß diese Annahme nicht zugelassen werden kann.

3. Einwand

Man kann den gleichen Einwand vorbringen gegen den zweiten Beweisgrund des Herrn Bernoulli, in dem er mit Hilfe der Differentialgleichung $y\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$ der logarithmischen Kurve beweisen will, daß diese Kurve zwei gleichartige Zweige hat, die beiderseits der Achse liegen. Diese Gleichung würde nämlich nicht nur die gleiche bleiben, wenn man y durch $-y$ ersetzen würde, sondern auch, wenn man y durch $2y$ oder allgemein durch ny ersetzte. Daraus würde folgen, daß diese Kurve unendlich viele Zweige hätte und daß die Abszisse x der gemeinsame

Logarithmus nicht nur von y und von $-y$, sondern auch von $2y$ und allgemein von ny, welche Zahl n auch sei, wäre. Aus dem gleichen Grund, aus dem man das Recht hat, eine unendliche Anzahl von Zweigen der logarithmischen Kurve zu verneinen, wird man auch die Existenz von zwei Zweigen, die Herr Bernoulli einführen will, verneinen.

Dieser Einwand ist wiederum gegen die zwei Zweige der logarithmischen Kurve gerichtet. Obwohl man sicher auf die Existenz eines Durchmessers einer Kurve schließen könnte, wenn ihre Gleichung in den Koordinaten x und y derart ist, daß sie unverändert bleibt, wenn man y durch $-y$ ersetzt, ist dieses Kriterium jedoch nur gerechtfertigt, wenn die Gleichung für die Kurve algebraisch ist oder auf endliche Glieder beschränkt ist. Man weiß nämlich, daß eine Differentialgleichung sehr viel

allgemeiner ist als die endliche Gleichung, aus der sie abgeleitet wurde, und daß sie unendlich viele Kurven einschließt, die nicht von der endlichen Gleichung umfaßt werden. So besitzt die Gleichung der Parabel $yy=ax$ das Differential $2y\mathrm{d}y=a\mathrm{d}x$. Diese Differentialgleichung entspricht aber ebenso der allgemeinen Gleichung $yy=ax+ab$, die zugleich eine unendliche Anzahl von Parabeln einschließt. Genau so verhält es sich mit der Differentialgleichung $y\mathrm{d}x=\mathrm{d}y$ der logarithmischen Kurve, die ebenso der endlichen Gleichung $x=\log ny$ wie auch der Gleichung $x=\log y$ entspricht, die man aber einzig und allein im Auge hat. Daraus folgt, daß man nicht über die Form einer Kurve urteilen kann, wenn man nur ihre Differentialgleichung betrachtet.

5. Einwand

Dieser Einwand bezieht sich auf den dritten Beweisgrund, der zweifellos viel stärker ist. Wenn alle die Kurven, die in der allgemeinen Gleichung $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{y^n}$, wobei n eine ungerade Zahl darstellt, enthalten sind, einen Durchmesser haben, so muß die gleiche Eigenschaft vorliegen, wenn $n=1$ ist, was bei der logarithmischen Kurve der Fall ist. Da nun aber diese Eigenschaft nur offensichtlich ist, insofern man die algebraischen Integrale der Gleichung $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{y^n}$ betrachtet, was immer außer im Fall $n=1$ geschieht, so wird man in der gleichen Weise, wie man diesen Fall ausnehmen muß, wenn es um die Frage der Integrierbarkeit der Gleichung $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{y^n}$ geht, das Recht haben, die gleiche Ausnahme zu machen, wenn es sich um das Urteil über einen Durchmesser handelt [7]. Wenn man also nicht durch irgendeine andere Erklärung beweisen kann, daß die logarithmische Kurve einen Durchmesser besitzt, ist dieses aus der allgemeinen Gleichung $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{y^n}$ hergeleitete Argument also nicht überzeugend. Um seine Unzulänglichkeit deutlicher aufzuzeigen, werde ich sogar bei den algebraischen Kurven Fälle darstellen, bei denen *nombres négatifs ou complexes. En fait s'il existait un logarithme pour -1 alors selon la loi des logarithmes ln(-1) serait la moitié de ce nombre mais -1 n'a certainement pas de logarithme. "*

Bernoulli prétend que ln(-x)=lnx car : $\frac{d(-x)}{-x} = \frac{dx}{x}$ et aussi car : $2\ln(-a)=\ln(-a)^2= \ln a^2=2\ln a$

Euler (1707-1783) explique dans son *"Introduction complète à l'algèbre"* et justifie les règles de calcul avec les négatifs. Il dit : *"annuler une dette c'est comme faire un cadeau"* pour expliquer pourquoi soustraire (-b) revient à additionner b. Il dit aussi que (-1).(-1) = 1 car le résultat doit être 1 ou -1 et comme il a déjà démontré que *"1.(-1) = (-1)"*, le résultat est nécessairement 1.

On pourra lire à la fin de l'article les commentaires de Morits Cantor dans son histoire des grandeurs négatives.

Euler, comme on peut le lire dans l'extrait ci joint, dit que Leinitz aurait pu rétorquer que comme $\frac{d(2x)}{2x} = \frac{dx}{x}$ on aurait ln2x = lnx en suivant le raisonnement de Bernoulli et aussi lnpx = lnx pour tout p ce qui est absurde.

Euler explique que Bernoulli suppose que ln(-1) = 0 alors que c'est ce qu'il veut prouver. (ln(-x)=ln(-1)+lnx =lnx)

Euler donne la définition du logarithme des nombres négatifs et complexes suivante:

$$\ln(x+iy) = \ln(re^{i\beta}) = \ln r + i(\beta +2k\pi)$$

Il l'envoie à D'Alembert qui la refuse.

Traduction (approximative) du texte d'Euler

1. Objection

M.Leibniz s'opposait au premier exemple en disant que l'on se trompe si on pense que la dérivée de ln(-x) s'écrit : $\frac{-dx}{-x}$ ou $\frac{dx}{x}$ ou [6]. Mais on doit avouer que cet argument ne fait vraiment pas le poids, qu'il n'est étayé d'aucune preuve et qu'il mettrait en question toutes nos connaissances sur la différentiation des logarithmes. Comme ce calcul fait intervenir une grandeur variable, on ne pourrait jamais se servir de la règle : (lnx)' = $\frac{dx}{x}$ pour tout x qu'il soit positif, négatif ou même imaginaire, car la règle de la différentiation est universelle. M.Leibniz n'aurait pas eu besoin d'utiliser cet argument car il en existe un beaucoup plus puissant.

2. Objection

Lorsque M.Bernoulli veut prouver que $\ln(-x) = \ln x$ car $\frac{d(-x)}{-x}$ est égal à $\frac{dx}{x}$ on démontrerait de la même manière que $\ln(2x) = \ln x$ car $\frac{d(2x)}{2x}$ est égal à $\frac{dx}{x}$. Et si on suit les idées de M.Bernoulli on aurait non seulement $\ln(2x) = \ln x$ mais aussi $\ln(nx) = \ln x$ pour tout n ce que M.Bernoulli n'aurait jamais admis. On sait que si les dérivées de deux fonctions sont égales celles ci diffèrent par une constante. On ne peut donc conclure qu'elles sont égales car avec ce raisonnement on pourrait dire que comme $d(x+a) = dx$ alors $x+a = x$. Avec cette opinion on ne peut donc pas conclure que $\ln(-x) = \ln x$ mais qu'elles le sont à une constante près et donc que $\ln(-x) = \ln(-1) + \ln x$. A partir de là on comprend très aisément que $\ln(nx) = \ln n + \ln x$ M.Bernoulli admet donc que $\ln(-1) = 0$ car $\ln 1 = 0$ et qu'ainsi $\ln(-x) = 0 + \ln x$. Mais c'est justement ce qu'il veut prouver, on ne peut donc le prendre pour hypothèse.

3.Objection

On peut opposer les mêmes arguments contre la deuxième preuve de M. Bernoulli lorsqu'à l'aide de l'égalité $ydx = dy$ de la courbe du logarithme il veut prouver que cette courbe a deux branches identiques de chaque côté de l'axe. Cette égalité ne changerait pas si on remplaçait y par -y mais elle ne changerait pas non plus si on remplaçait y par 2y ou par ny. A partir de là il s'ensuivrait que la courbe aurait une infinité de branches et que les abscisses x de l'ensemble des logarithmes le serait si on remplaçait y par -y ou 2y ou encore ny. Pour la même raison que l'on nie que la courbe des logarithme a une infinité de branches on peut aussi nier l'existence des deux branches que M. Bernoulli voulait introduire.

4. Objection

Cet argument sera à nouveau dirigé contre l'existence des deux branches de la courbe des logarithme. Bien que l'on soit sûr de l'existence d'une sécante à une courbe, si leur égalité en x et y est telle qu'elle reste inchangée si on remplace y par -y ce critère ne permet de loin pas de conclure si cette égalité concerne une courbe algébrique ou si elle concerne un ensemble fini. On sait en effet qu'une égalité différentielle est bien plus générale qu'une égalité finie extraite. L'égalité $yy = ax$ a pour différentielle $2ydy = adx$. Mais cette égalité provient également de $yy = ax + ab$ qui correspond également à une infinité de paraboles. Cela se passe de la même façon avec l'égalité $ydx = dy$ de la courbe logarithme qui provient aussi bien de $x = \ln(ny)$ que de $x = \ln y$, alors que l'on a que celle là à l'esprit. C'est pourquoi l'on ne peut pas conjecturer sur la forme de la courbe quand on ne regarde que sa dérivée.

Francis Maseres, mathématicien anglais écrit en 1759 dans sa dissertation sur l'utilisation du signe négatif en algèbre : *"Elles servent seulement pour autant que je sois capable d'en juger, à obscurcir la doctrine toute entière des équations et à rendre ténébreuses et mystérieuses des choses qui sont dans leur nature excessivement évidentes et simples. Il eût été souhaitable en conséquence que les racines négatives n'aient jamais été admises dans l'algèbre ou qu'elles en aient été écartées."*

On pourra lire l'histoire des nombres négatifs écrite par Moritz Cantor jointe à cet article.

s'efforcer de n'utiliser les concepts du mathématicien que pour la fabrication de subtiles fictions qui en dehors de son champ sont d'une mince vérité. Il est facile de deviner de quel côté sera l'avantage dans le conflit de deux sciences dont l'une l'emporte sur toutes à la fois en certitude et en clarté et dont l'autre s'efforce d'abord d'y atteindre. La métaphysique cherche, par exemple, à trouver la nature de l'espace et la raison souveraine qui permet d'en comprendre la possibilité. Rien assurément ne pourrait être plus profitable à cet effet que d'emprunter à une discipline quelconque des données sûrement démontrées, afin de les prendre pour fondement de notre étude. La géométrie en livre certaines qui concernent les propriétés les plus générales de l'espace (3) : par exemple, l'espace n'est pas du tout composé de parties simples ; mais on n'en tient pas compte et l'on se fie uniquement à la conscience ambiguë de ce concept en le pensant d'une manière tout à fait abstraite. Dès lors que la spéculation ainsi conduite ne veut pas s'accorder avec les propositions des mathématiques, on cherche à sauver son concept artificiel par le blâme que l'on adresse à cette science, comme si les concepts qu'elle prend pour fondement n'étaient pas déduits de la nature véritable de l'espace, mais arbitrairement inventés. L'étude mathématique du mouvement, liée à la connaissance de l'espace, fournit pareillement de nombreuses données qui permettent de maintenir dans la voie de la vérité l'étude métaphysique du temps. Le célèbre Euler (4) en a donné le prétexte (*a*), mais, s'attarder sur des abstractions obscures et difficiles à examiner

(*a*) Histoire de l'Académie Royale des sciences et belles lettres, l'année 1748.

semble plus commode que d'entrer en relations avec une science qui ne participe qu'à des vues intelligibles et évidentes.

Le concept de l'infiniment petit, sur lequel les mathématiques reviennent si souvent, est audacieusement rejeté comme un pur produit de l'imagination ; mieux vaudrait présumer que l'on n'en a pas encore une connaissance suffisante pour y porter un jugement (5). La nature elle-même cependant semble nous donner des preuves point obscures de la vérité de ce concept. Car s'il est vrai qu'il existe des forces qui agissent durant un certain temps pour engendrer des mouvements, telle est suivant toute apparence la pesanteur, alors la force que celle-ci exerce dans l'instant initial de mouvement ou au repos doit être infiniment petite au regard de l'énergie qu'elle communique pendant un certain temps. Il est difficile, j'en conviens, de pénétrer la nature de ce concept ; cette difficulté peut tout au plus légitimer la prudence dans l'incertitude, mais non pas justifier l'affirmation d'une impossibilité.

Je me propose d'examiner maintenant un concept suffisamment connu en mathématiques, mais très étranger encore à la philosophie, dans son rapport à cette dernière. Ces considérations ne sont que de menus commencements comme il arrive d'ordinaire quand on veut ouvrir de nouveaux horizons. Cependant elles seules peuvent peut-être engendrer d'importantes conséquences. Par suite de la négligence du concept de grandeur négative, une quantité de fautes ou de fausses interprétations de la pensée d'autrui sont apparues dans la philosophie. Si, par exemple, l'illustre D. Crusius (6) avait bien voulu prendre connaissance de la signification mathématique de ce concept, il n'eût assurément pas trouvé fausse jusqu'à s'en étonner (*a*), la comparaison de Newton entre la force attractive qui, lorsque la distance augmente, sans cependant quitter le voisinage des corps, se dégrade peu à peu en force répulsive, et les séries dans lesquelles les grandeurs négatives commencent où les positives finissent. Car les grandeurs négatives ne sont pas des négations de grandeurs, comme le lui a laissé supposer l'analogie de l'expression, mais au contraire quelque chose de vraiment positif en soi, qui est simplement opposé à l'autre grandeur positive. De sorte que l'attraction négative n'est pas, comme il le pense, le repos, mais la véritable répulsion (7).

J'en viens enfin à la dissertation elle-même où j'ai dessein de montrer quelle peut être en philosophie l'application de ce concept.

Le concept de grandeur négative, depuis longtemps en usage dans les mathématiques, s'y est révélé d'une extrême importance. Toutefois la représentation que s'en sont fait la plupart, et l'explication qu'ils en donnaient, est étrange et contradictoire, bien qu'aucune inexactitude n'en ait rejailli sur l'application, car les règles particulières ont pris la place de la définition et en ont assuré l'usage. Personne n'a peut-être montré avec plus de clairvoyance et de certitude ce qu'il convient d'entendre par grandeurs négatives, que le fameux professeur Kästner (*b*), qui sait l'art de tout rendre précis, intelligible, agréable (8). Quand à cette occasion, il reproche à un philosophe foncièrement abstrait sa manie de diviser, cela est beaucoup plus général qu'il ne paraît et on pourrait l'interpréter comme une invitation à éprouver la

(*a*) Crusius, Naturl. 2 Teil., § 295.
(*b*) Anfangsgr. d. Arithm. S. 59-62.

prétendue perspicacité de maints penseurs à l'égard d'un concept vrai et utilisable, dont les mathématiques ont déjà assuré la justesse, afin d'en établir philosophiquement la nature. La fausse métaphysique se soustrait volontiers à cette épreuve, parce qu'un savant non-sens ne peut donner ici aussi aisément qu'ailleurs l'illusion de la solidité. Entreprenant de gagner à la philosophie un concept encore inemployé, quoique absolument nécessaire, je me souhaite pour juges des esprits aussi pénétrants que celui qui inspira cet essai. Car, en ce qui concerne les intelligences métaphysiques d'une pénétration accomplie, il faudrait être bien inexpérimenté pour s'imaginer qu'on pût ajouter quelque chose à leur sagesse ou retirer quelque chose de leur présomption.

aussi grand que si elle pouvait jouir du produit intégral. Il est clair maintenant qu'elle ne peut se réjouir de ces revenus que si après la déduction des redevances il lui reste quelque argent, et le degré de satisfaction est égal à : 2.000 — 200 — 100 — 150 = 1.550. En conséquence, le déplaisir n'est pas simplement un défaut de plaisir, mais le motif positif de la suppression, totale ou partielle, du plaisir qui découle d'un autre principe ; c'est pourquoi j'appelle le déplaisir un *plaisir négatif*. Le défaut du plaisir aussi bien que du déplaisir, en tant qu'il dérive de l'absence de principes, s'appelle *indifférence* (*indifferentia*). Le défaut du plaisir aussi bien que du déplaisir, dans la mesure où il dépend comme une conséquence de l'opposition réelle de principes égaux se nomme *équilibre* (*aequilibrium*) : le zéro se produit dans les deux cas, mais dans le premier cas nous avons tout simplement affaire à une négation, dans le second à une privation. La disposition de l'esprit dans laquelle il reste quelque chose de l'opposition de deux sensations, le plaisir et le déplaisir, d'inégale force, est *l'excédent* de plaisir ou de déplaisir (*suprapondium voluptatis vel taedii*). M. de Maupertuis, dans son *Essai de philosophie morale* (11), tâcha, d'après de semblables concepts, de mesurer la somme de bonheur de la vie humaine ; mais ce problème est insoluble pour l'homme, parce que seuls peuvent être additionnés des sentiments homogènes et que dans les complications de la vie le sentiment diffère absolument suivant la diversité des émotions. Ce savant fut conduit par ses calculs à un résultat négatif, en quoi je ne puis pas lui donner mon assentiment.

Pour ces raisons on peut appeler l'*aversion* un *désir négatif*, la *haine* un *amour négatif*, la *laideur* une *beauté négative*, le *blâme* un *éloge négatif*, etc... On pourrait ne voir ici qu'un fatras de mots. Mais ceux qui ont la plus petite connaissance des mathématiques n'ignorent pas combien il est avantageux que les expressions indiquent en même temps la relation à des concepts déjà connus. L'erreur dans laquelle cette négligence a précipité tant de philosophes, est manifeste. On s'aperçoit que le plus souvent ils traitent les maux comme de simples négations, bien qu'il ressorte évidemment de nos explications, qu'il existe des maux par défaut (*mala defectus*) et des maux par privation (*mala privationis*). Les premiers sont des négations, dont aucun principe ne fonde une position opposée, les derniers supposent des raisons positives de supprimer le bien dont un autre principe est réel, et sont un *bien négatif*. Ce dernier est un mal plus considérable que le premier. Ne pas donner est un mal par rapport au nécessiteux, mais prendre, extorquer, voler, est par rapport à lui un mal considérable encore : *prendre* est un *donner négatif*. On pourrait indiquer quelque chose de semblable dans les rapports logiques. Les *erreurs* sont des *vérités négatives* (qu'on ne les confonde pas avec la vérité de propositions négatives), une *réfutation* est une *preuve négative* ; mais je crains de m'attarder trop longtemps sur ce point. — Je n'ai dessein que d'animer ces concepts, l'usage en éclairera l'utilité ; enfin, j'en donnerai quelques aperçus dans la troisième partie de cet essai.

attraction une cause, quelle qu'elle puisse être, en vertu de laquelle un corps en contraint d'autres à peser sur l'espace qu'il occupe ou à se mouvoir vers lui (mais il suffit ici que cette attraction soit simplement conçue), alors l'impénétrabilité est une *attraction négative*. Il est montré par là qu'elle est une cause aussi positive que toute autre force motrice dans la nature, et, comme l'attraction négative est au fond une véritable répulsion, les forces des éléments qui leur font occuper un espace, mais de sorte qu'eux mêmes le délimitent par le conflit de deux forces opposées entre elles, donnent lieu à de nombreuses explications dans lesquelles je crois être parvenu à une connaissance claire et certaine, et que j'exposerai dans un autre traité.

II

La psychologie nous donnera un exemple. Il s'agit de savoir si le déplaisir est seulement un défaut de plaisir ou bien un principe de la privation du plaisir, qui soit quelque chose de positif en soi, et non seulement l'objet contradictoire du plaisir, mais qui lui soit opposé en un sens réel, et si, par conséquent, nous pouvons appeler le déplaisir un *plaisir négatif*. Le sentiment intérieur nous apprend immédiatement que le déplaisir est plus qu'une simple négation. Car, quelle que soit la nature de ce plaisir, êtres finis nous aspirons toujours à certain plaisir possible. Celui qui absorbe un médicament ayant le goût de l'eau pure, a peut-être plaisir à espérer la santé ; du goût par contre il ne tire point de plaisir, et ce défaut n'est pas encore déplaisir. Donnez-lui un médicament à l'absinthe, voilà qu'il éprouve une sensation très positive ; nous n'avons

plus affaire ici au pur défaut du plaisir, mais à quelque chose qui est une cause véritable du sentiment et que nous nommons déplaisir.

Les éclaircissements précédents témoignent que le déplaisir est bien un sentiment positif. Mais en voici un exemple : On annonce à une mère spartiate que son fils a héroïquement combattu pour sa patrie. L'agréable sentiment du plaisir s'empare de son cœur. Mais on ajoute qu'il y a trouvé une mort glorieuse. Cette nouvelle diminue considérablement le plaisir premier, l'abaisse à un moindre degré ; appelez 4a le degré du plaisir occasionné d'abord, et mettez que le déplaisir soit simplement une négation = 0 ; les deux choses réunies expriment la satisfaction : 4a + 0 = 4a ; par conséquent l'annonce de la mort n'eût en rien diminué le plaisir, ce qui est inexact. Admettons que le plaisir éprouvé au récit de la bravoure = 4a, et que ce qui en reste après la cause deuxième, qui entraîna le déplaisir, = 3a ; alors le déplaisir = a et il est la négative du plaisir, c'est-à-dire — a ; le plaisir définitif est donc : 4a — a = 3a.

L'estimation de la valeur totale de tout le plaisir dans un état mixte serait absurde si le déplaisir était une simple négation et égalait zéro. Une personne devient propriétaire d'un domaine qui lui rapporte annuellement 2.000 thalers. Soit 2.000 le degré du plaisir occasionné par cette recette. Mais tout ce que ce propriétaire doit en retrancher, et dont il ne peut jouir, est un motif de déplaisir ; mettons qu'il dépense chaque année : rente foncière : 200 thalers ; gages des domestiques : 100 thalers ; réparations : 150 thalers. Si le déplaisir était une pure négation = 0, alors, tout compte fait, le plaisir que cette personne retirerait de son achat, serait de 2.000 + 0 + 0 + 0 = 2.000, c'est-à-dire tout

Kastner explique qu'il faut considérer les nombres négatifs non pas en tant qu'entité mais en tant qu'objets opposés à d'autres, par exemple des biens et des dettes, avancer et reculer, et parmi ces grandeurs on choisit d' appeler les unes positives et les autres négatives.

Kant écrit en 1763 *"une grandeur est, comparativement à une autre, négative"* lorsqu'on peut les opposer par exemple *"Lust"* et *"Unlust"*. Les grandeurs négatives ne sont pas des négations de grandeurs qui elles seraient positives, c'est un sentiment positif et non un manque.

On lira l'extrait joint à cet article.

Carnot (1753-1823) n'est pas du tout d'accord et il explique pourquoi dans son livre *"Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal"*. Pour lui, les nombres négatifs ne sont que des objets fictifs. (Voir ci après)

William Frend (1757-1841), qui fut membre du Jesus college à Cambridge, déclare dans la préface de ses *"Principes d'algèbre"* en 1796 que retrancher un nombre plus grand d'un plus petit est une chose ridicule et au sujet de la résolution des équations du second degré: *"Tout cela n'est que jargon auquel le sens commun répugne (...) mais ce jargon trouve ses partisans les plus ardents parmi ceux qui préfèrent se fier à ce qu'on leur dit et détestent jusqu'à l'idée d'une pensée sérieuse."*

Robert Woodhouse (1773-1827) écrit en 1801 :

> *"Les paradoxes et les contradictions mutuellement opposés les uns aux autres par des mathématiciens engagés dans la controverse concernant l'application des logarithmes aux quantités négatives et impossibles pourraient servir d'arguments pour éviter d'utiliser de telles quantités dans la recherche"*. Il parle sans doute des logarithmes des nombres négatifs et non des nombres négatifs ou complexes eux mêmes .

En 1831 De Morgan (1806-1871) exprime ses objections envers les nombres négatifs et imaginaires : *"L'expression imaginaire $\sqrt{-a}$ et l'expression négative $-b$ se ressemblent en cela que chacune d'elles, lorsqu' elle apparait comme solution d'un problème, indique qu'il y a là quelque inconsistance ou absurdité. Pour ce qui concerne la réalité de leur signification, toutes deux sont également imaginaires puisque $0 - a$ est tout aussi inconcevable que $\sqrt{-a}$."*

De Morgan illustre ses objections à l'aide d'exemples, en voici un :

> *"Un père a 56 ans et son fils en a 29. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le double de celui de son fils?"*

Solution : Soit x le nombre d'années, x vérifie : $56 + x = 2(29 + x)$ On trouve : $x = -2$

> *"Ce résultat est absurde mais si nous changeons x en -x et si nous résolvons $56 - x = 2(29 - x)$ nous trouvons $x = 2$. La réponse négative montre que nous avons commis une erreur dans la première formulation de l'équation. Lorsque la réponse à un problème est négative, en changeant le signe de x dans l'équation qui a produit ce résultat, nous pouvons alors découvrir qu' une erreur a été commise dans la méthode utilisée pour former cette équation ou montrer que la question posée par le problème est trop limitée et devrait être étendue pour qu'il admette une solution satisfaisante. Lorsque la réponse est imaginaire ce n'est pas les cas. (...) Néanmoins une grande partie de l'al-*

174. Le mérite essentiel, le sublime, on peut le dire, de la méthode infinitésimale, est de réunir la facilité des procédés ordinaires d'un simple calcul d'approximation à l'exactitude des résultats de l'analyse ordinaire. Cet avantage immense serait perdu, ou du moins fort diminué, si à cette méthode pure et simple, telle que nous l'a donnée Leibniz, on voulait, sous l'apparence d'une plus grande rigueur soutenue dans tout le cours du calcul, en substituer d'autres moins naturelles, moins commodes, moins conformes à la marche probable des inventeurs. Si cette méthode est exacte dans les résultats, comme personne n'en doute aujourd'hui, si c'est toujours à elle qu'il faut en revenir dans les questions difficiles, comme il paraît encore que tout le monde en convient, pourquoi recourir à des moyens détournés et compliqués pour la suppléer ? Pourquoi se contenter de l'appuyer sur des inductions et sur la conformité de ses résultats avec ceux que fournissent les autres méthodes, lorsqu'on peut la démontrer directement et généralement, plus facilement, peut-être, qu'aucune de ces méthodes elles-mêmes ? Les objections que l'on a faites contre elle portent toutes sur cette fausse supposition, que les erreurs commises dans le cours du calcul, en y négligeant les quantités infiniment petites, sont demeurées dans le résultat de ce calcul, quelque petites qu'on les suppose : or c'est ce qui n'est point ; l'élimination les emporte toutes nécessairement, et il est singulier qu'on n'ait pas aperçu d'abord dans cette condition indispensable de l'élimination, le véritable caractère des quantités infinitésimales, et la réponse dirimante à toutes les objections.

NOTE

Relative au n° 162 de l'Ouvrage précédent.

1. Il y a une analogie remarquable entre la théorie des quantités négatives isolées et celle des quantités infinitésimales, en ce que les unes et les autres ne sauraient jamais être employées qu'auxiliairement, et qu'elles doivent nécessairement disparaître des résultats du calcul, pour que ces résultats deviennent parfaitement exacts et intelligibles : jusqu'alors ce ne sont que des formes algébriques plus ou moins implicites, et qui ne sont susceptibles d'aucune application immédiate.

2. Il paraît beaucoup plus difficile d'expliquer nettement ce qu'est une quantité négative isolée, que de comprendre ce qu'est une quantité infinitésimale ; car celle-ci, comme on l'a vu, est une quantité effective, au lieu que l'autre est un être de raison, puisqu'on ne pourrait l'obtenir que par une opération inexécutable.

3. Avancer qu'une quantité négative isolée est moindre que 0, c'est couvrir la science des mathématiques, qui doit être celle de l'évidence, d'un nuage impénétrable, et s'engager dans un labyrinthe de paradoxes tous plus bizarres les uns que les autres ; dire que ce n'est qu'une quantité opposée aux quantités positives, c'est ne rien dire du tout, parce qu'il faut expliquer ensuite ce que c'est que ces quantités opposées ; recourir pour cette explication à de nouvelles idées premières, semblables à celles de la matière, du temps et de l'espace, c'est déclarer qu'on regarde la difficulté comme insoluble, et c'est en faire naître de nouvelles ; car si l'on me donne pour exemple de quantités opposées un mouvement vers l'orient et un mouvement vers l'occident, ou un mouvement vers le nord et un mouvement vers le sud, je demanderai ce que c'est qu'un mouvement vers le nord-est, vers le nord-ouest, vers le sud-sud-ouest, etc., et de quels signes ces quantités devront être affectées dans le calcul ?

La ressource des idées premières est sans doute commode pour éluder les difficultés, mais elle est peu philosophique, lorsqu'elle n'est pas indispensable. La métaphysique des sciences peut ne pas contribuer beaucoup au progrès des méthodes, mais il y a des personnes qui s'en font une étude favorite, et c'est pour eux que j'ai composé cet opuscule. On pourrait également renvoyer la notion de l'infini mathématique aux idées premières, et les calculs fondés sur cette notion n'en seraient pas moins susceptibles de toutes les applications qu'on en fait ; cependant, dit d'Alembert, « cette métaphysique, dont on a tant écrit, est encore plus importante, et peut-être plus difficile à développer que les règles mêmes de ce calcul. »

Il me semble qu'on peut dire la même chose des quantités négatives isolées, et l'on peut en juger par les discussions dont elles ont été l'objet parmi les plus célèbres géomètres.

4. J'ai developpé ailleurs ce qui m'a paru être la véritable

théorie de ces sortes de quantités, et cette théorie a reçu un accueil favorable parmi les savants. La seule objection que je sache y avoir été faite est qu'elle peut paraître moins simple dans la pratique, que celle qui était généralement adoptée. Cet inconvénient, je l'avoue, serait considérable s'il existait, mais comme je crois que c'est tout le contraire, je vais tâcher de résumer ici cette théorie le plus brièvement possible.

Principe fondamental.

5. *Toute valeur négative trouvée pour une inconnue, par la résolution d'une équation, exprime, abstraction faite du signe de cette valeur, la différence de deux autres quantités, dont la plus grande a été prise pour la plus petite, et la plus petite pour la plus grande, dans l'expression des conditions du problème.*

Dém. — Pour mettre un problème en équations, on commence toujours par procéder comme dans la synthèse, c'est-à-dire que toutes les quantités sur lesquelles on établit le raisonnement sont considérées comme absolues. Donc, si la solution du problème est possible, et qu'on n'ait point fait de fausses suppositions, on doit aussi trouver pour chaque quantité une valeur absolue. Donc, si au contraire on ne trouve qu'une valeur négative ou imaginaire, on peut déjà conclure qu'il se trouve nécessairement quelque incompatibilité entre les conditions du problème et les hypothèses sur lesquelles le calcul est établi.

Maintenant, pour connaître en quoi consistent ces fausses suppositions qu'on veut avoir faites, je nomme x l'inconnue pour laquelle on a trouvé une valeur négative, et je suppose que cette valeur négative soit $-p$, on a donc trouvé $x = -p$, équation dans laquelle p est une quantité absolue : soit cette quantité absolue $p = m - n$, m et n étant aussi des quantités absolues. Nous aurons par conséquent $m > n$; mais, puisqu'au contraire dans la mise en équation on a considéré x comme une quantité absolue, on a donc aussi supposé que sa valeur $-p$ était une quantité absolue, c'est-à-dire qu'on a regardé $-(m-n)$ ou $(n-m)$ comme une quantité absolue. On a donc supposé $n > m$, tandis qu'au contraire on a réellement, comme on l'a vu ci-dessus, $m > n$. Donc la fausse supposition qui a été faite consiste en ce que des deux quantités m, n, dont p est la différence, la plus grande m a été prise pour la plus petite et la plus petite pour la plus grande ; et puisque cette quantité absolue p n'est autre chose que la valeur $-p$ trouvée pour l'inconnue, en faisant abstraction du signe, il s'ensuit que *toute valeur négative, etc. ; ce qu'il fallait démontrer.*

6. On ne peut pas dire précisément que l'équation $x = -p$ soit fausse, puisqu'elle exprime exactement les conditions proposées et les hypothèses sur lesquelles le calcul est établi ; mais ce sont ces conditions ou ces hypothèses qui, étant contradictoires entre elles, empêchent que le résultat du calcul ne puisse avoir lieu sans modifications. Il s'agit donc de trouver quelles sont les modifications propres à rendre ce résultat explicite, sans en altérer l'exactitude, c'est-à-dire propres à le dégager des quantités inintelligibles qu'il contient, ou des opérations inexécutables qu'il indique. Or pour cela il y a deux corrections à faire : la première consiste à changer le signe de l'inconnue dans les expressions algébriques qui la contiennent, afin que sa valeur dans l'équation finale devienne positive : la seconde est de faire aux conditions et hypothèses sur lesquelles le calcul est établi un changement analogue afin que les expressions algébriques se trouvent être toujours exactement la traduction de ces conditions et hypothèses : c'est sur quoi il n'y a pas plus de règles à donner que sur la manière de mettre un problème en équation ; mais avec un peu d'habitude on aperçoit pour l'ordinaire très facilement quel doit être le résultat de ces modifications, et l'on se borne à faire la correction nécessaire dans la solution indiquée par l'équation finale, sans prendre la peine de recommencer le calcul : c'est ce qu'on appelle *prendre les valeurs négatives en sens contraire des valeurs positives*, ou *prendre l'inconnue dans un sens contraire à celui qu'on lui avait attribué dans l'expression des conditions du problème.* La nouvelle théorie ne change absolument rien à cet égard aux anciens procédés, elle ne fait qu'en rendre raison et en démontrer l'exactitude.

7. Supposons par exemple que, voulant connaître quelle est la valeur d'un gain présumé, on ait représenté ce gain par x, et qu'on ait trouvé pour équation finale

$$x = -p\ ;$$

tout le monde en conclut sans hésiter que, au lieu d'un gain pré-

gèbre se développe à l'aide de tels symboles (...) mais on doit se rappeler que cela n'est qu'une petite partie d'un immense sujet."

Gauss (1777-1855) écrit en 1825 qu'il ne pouvait s'arracher *"de la vraie métaphysique des quantités négatives et imaginaires. Le véritable sens de -1 est constamment présent à mon esprit mais il serait toutefois difficile de l'exprimer à l'aide de mots"* et en 1831:

> *"Les anciens algébristes appelaient les racines négatives des racines fausses et elles le sont en effet quand le problème pour lequel la relation a été posée présente des quantités auxquelles on ne peut en attribuer d'autres qui leur sont opposées (...)Il ne faut pas refuser aux nombres négatifs les droits accordés aux nombres positifs (...) Les nombres négatifs ne peuvent trouver d'application que lorsque les choses comptées sont d'espèces opposées (...) Les objets comptés sont non pas des substances, des objets comme existant par eux mêmes mais des relations entre les objets. Les mathématiciens font entièrement abstraction de la nature des objets et ne s'occupent que de leurs relations"*

HISTOIRE DES MATHEMATIQUES
MORITZ CANTOR (Résumé)

L'extension de la notion de nombres par l'introduction des nombres négatifs a été due à la nécessité de pouvoir effectuer des soustractions dans tous les cas. Mais les mathématiciens n'ont pas réussi à se libérer de paradoxes gênants. On se rendait compte au $18^{è}$ des lacunes sans pour autant développer la logique. A la fin du siècle on a commencé à s'opposer à l'utilisation des nombres négatifs pour éviter les bricolages et l'opposition était encore plus forte envers les imaginaires bien que les mathématiciens de premier rang les utilisassent sans arrêt. Fancis Maseres, un écrivain, en a été un opposant farouche. Comme il ne voulait travailler qu'avec les nombres positifs, les négatifs devaient par tous les moyens apparaître dénués de sens.

Bien que l'exposé de Kastner n'ait pas été parfait il a vraiment amené l'extension de la notion de nombre.

Influencé par Kastner, Kant a écrit un article dans lequel il explique que les nombres négatifs ne sont pas des négations de grandeurs positives mais des vraies grandeurs.

Afin d'intégrer les pensées du moment dans les livres de math. on expose les explications de Euler et on les compare brièvement à celles d'autres auteurs. Son style était populaire mais son exposé ne méritait pas un tel succès et nous pensons que celui ci était plutôt destiné à la deuxième partie de son livre (L'analyse)

On cite les articles d'Euler :

Art.8 Pour additionner deux nombres, on fait précéder le deuxième d'un signe plus.
Art.11 Si on veut soustraire un nombre d'un autre on fait précéder celui ci d'un signe moins.
Art.16 Ce qui est important c'est le signe qui précède le nombre. On considère en algèbre le nombre précédé de son signe comme une grandeur.

Commentaire : les signes plus et moins sont-ils toujours à considérer comme des signes opératoires? Peut-on ajouter un nombre négatif à un nombre négatif? L'auteur ne donne pas de réponse satisfaisante à ces questions.

Le fait de considérer d'abord les signes plus et moins comme des signes opératoires puis comme des indications du signe du résultat a été une erreur à cette époque. Et c'est à cause de cette erreur que Simpson a pu prétendre que -a n'avait pas plus de signification que $\sqrt{-b}$. Trail prétend que l'on ne peut pas expliquer ce qu'est une grandeur négative.

C'est pourquoi on explique, dans les manuels, les négatifs à l'aide d'exemples. Dans certains manuels on utilise les signes plus et moins pour des grandeurs opposées, puis discrètement ils servent aussi à faire des opérations. Dans certains livres la différence de signification est expliquée.

Pour expliquer la multiplication Euler écrit que -a multiplié par -b fait +ab car il a déjà expliqué que -a par +b faisait -ab.

Euler aurait aussi pu dire que -a par -b fait -ab car +a par +b fait +ab. Affirmation que l'on trouve plus tard chez Porro.

Les règles que l'on trouve dans les manuels découlent pour la plupart de celles d'Euler. On demande au lecteur d'admettre les règles de calcul décrites à l'aide d'exemples. La preuve de Segner, Kastner et Da Cunha s'appuie sur une phrase non prouvée et avance ensuite discrètement que 1.+b = +b et 1.-b = -b qui est justement une partie de ce qu'ils veulent prouver. Voilà la phrase: *"Si dans une proportion les deux premiers termes sont de même signe (resp. de signe différent) il faut que les deux derniers soient également de même signe (resp. de signe différent)"*

Clairaut déduit de l'égalité : (a-b)(c-d)=ac-bc-ad+ad et en posant a=c=0 que -b.-d=+bd. Mais Simpson rétorque que -b et -d n'ont ici aucun sens car on ne peut pas enlever quelque chose de rien. William Frend critique aussi car dans la première égalité le signe - est un signe opératoire et -b n'a donc pas d'existence propre. Laplace propose la démonstration suivante: -a(b-b)=0 or -a.b=-ab donc -a.-b=+ab que l'on retrouve aussi chez Maclaurin. En fait ces démonstrations ne sont que des expositions de pratiques car elles ne reposent sur rien. L'ouvrage de Porro *"l'algèbre selon ses vrais principes"* a pour origine le flou des discussions portant sur les principes de base de l'algèbre. L'auteur explique que le signe - a en fait 4 significations 1.la soustraction 2.une quantité négative 3.la division 4.la multiplication. et la règle *"moins par moins égal plus"* est à rejeter car c'est elle qui est à l'origine de toutes les polémiques. Il suffit d'admettre que le produit de deux nombres négatifs est négatif.

William Hamilton (1805-1865) écrit dans un article publié en 1837 :

> *"Mais il n'est nul besoin de faire preuve d'un septicisme particulier pour ne pas croire la doctrine des négatifs et des imaginaires. (...)Il doit être bien difficile de fonder une science sur de telles bases." (Il fait allusion aux règles de calcul), bien que les formes de la logique puissent construire à partir d'elles un système symétrique d' expressions et qu'un art pratique puisse être appris afin d'appliquer correctement les règles utiles qui semblent dépendre d'elles (...)"*

Boole (1815-1864) explique dans son *"Investigation des lois de la pensée"* en 1854 que $\sqrt{-1}$ est un symbole ininterprétable : *"Toutefois en l'utilisant en trigonométrie nous passons d'expressions interprétables en expressions interprétables en passant par des expressions ininterprétables."*

C'est dans les années 1830 que les mathématiciens s'attaquent à la justification des opérations portant sur des expressions littérales et symboliques.

Peacock (1791-1858), par exemple, part des propriétés empiriquement admises des opérations sur les rationnels positifs:la commutativité, l' associativité de l'addition et de la multiplication,ainsi que l'existence d'un inverse puis à partir de l'équation x+ b = c il introduit un nouveau symbole : (c - b) et définit l'addition et la multiplication de ces symboles. Ces opérations gardant les mêmes propriétés. C'est ce qu'il appelle le principe de permanence.

eine Zahl nichts anders ist als das Verhältniß, worinnen eine Größe gegen eine andere, welche für die Einheit angenommen wird, steht. Hieraus ist klar, daß sich alle Größen durch Zahlen ausdrücken lassen, und also der Grund aller mathematischen Wissenschaften darin gesetzt werden muß, daß man die Lehre von den Zahlen ... genau in Erwegung ziehe, und vollständig abhandele." Hier ist der Gedankengang dem von uns oben angedeuteten entgegengesetzt. Die quantitative Idee wird der Zahl zugeschrieben und daraus der Schluß gezogen, daß Mathematik die Wissenschaft von der Größe sei. Dann und wann findet man auch in anderen Lehrbüchern dieser Zeit die Zahl ausdrücklich als ein Verhältnis erklärt. „Das 1 selber ist eine Zahl: denn 1 hält eine Verhältnuss zu eins", sagt einer[1]). „Das Verhältnis irgend einer Größe zu einer gleicher Art, die als Einheit erwählt ist, wird eine Zahl genannt, und man nennt Arithmetik die Wissenschaft von solchen Verhältnissen"[2]). Gewöhnlich wird aber der Begriff des Verhältnisses oder des Messens nicht so scharf hervorgehoben, so daß man im Zweifel ist, ob das Zählen als ein wirkliches Messen aufgefaßt wurde. „Eine Menge von Dingen einer Art heißt eine ganze Zahl", sagt Kästner[3]). Diese Definition der Zahl ist der Euklidischen, „eine aus Einheiten bestehende Menge", ganz ähnlich und hat keine notwendige Verknüpfung mit Verhältnissen. Bei Euklid waren Verhältnisse keine Zahlen. Bei Bézout[4]) scheint der Meßbegriff vorzuherrschen, denn er sagt: „le nombre exprime de combien d'unités, ou de parties d'unités, une quantité est composée" und „l'unité est une quantité que l'on prend .. pour servir de terme de comparaison à toutes les quantités d'une même espèce". Andere Schriftsteller führen unbedeutende Wortänderungen ein. „Mehrere gleichnamige Einheiten machen eine Zahl aus"[5]). „Mehrere solche zusammengestellte Einheiten geben eine ganze Zahl"[6]). Ob bei diesen und ähnlichen Ausdrücken, die in Lehrbüchern allgemein vorkommen, die Zahl ausschließlich als ein Verhältnis anzunehmen ist oder nicht, hängt davon ab, ob die Schriftsteller stillschweigend den Gedankengang von Newton und Wolf oder von Euklid befolgten.

J. F. Heynatz[7]) macht die Bemerkung: „Einige leugnen, daß Eins oder die Einheit eine Zahl sey, und lassen nur das, was durch die Wiederholung der Einheit herauskömmt .. für eine Zahl gelten".

---

[1]) Jacob Friederich Maler, Unterricht zum Rechnen, Carlsruhe 1765, S. 23. [2]) E. Develey, Arithmétique D'Émile, 2. Éd., Paris 1802, p. 2. [3]) Kästner, op. cit. S. 21. [4]) Bézout, op. cit. T. I, p. 2. [5]) Matthias Haußer, Analytische Abhandlung der Anfangsgründe d. Mathematik, I. Teil, Wien 1778, S. 1. [6]) Johann Georg Prändels Arithmetik, München 1795, S. 3 [7]) Heynatz, op. cit. S. 3.

Condillac[1]) hebt hervor, daß wenn eine Zahl als eine Menge von Einheiten angenommen wird, 1 keine Zahl sei. Gherli[2]) sagt ausdrücklich: „l'unità non è numero".

Kästner nennt einen Bruch eine ganze Zahl, deren Einheit ein Teil der ursprünglichen Einheit ist und so viele Einheiten hat, als der Zähler anzeigt. Irrationalzahlen oder surdische Zahlen lassen sich nach Kästner „weder durch ganze Einheiten noch durch Theile der Einheit vollkommen richtig ausdrücken"[3]).

Einen ganz neuen Zahlbegriff, welchem die Mathematiker des 18. Jahrhunderts gar keine Aufmerksamkeit schenkten, gab Immanuel Kant 1781 in seiner Kritik der reinen Vernunft[4]), worin er sich so ausspricht: „Das reine Schema der Größe aber (quantitatis), als eines Begriffes des Verstandes ist die Zahl, welche eine Vorstellung ist, die die successive Addition von Einem zu Einem (gleichartigen) zusammen befaßt; also ist die Zahl nichts anderes als die Einheit der Synthesis des Mannigfaltigen einer gleichartigen Anschauung überhaupt, dadurch daß ich die Zeit selbst in der Apprehension der Anschauung erzeuge". Erst im 19. Jahrhundert wurde dieser auf die Vorstellung der Zeit gegründete Zahlbegriff von einigen Mathematikern (z. B. W. R. Hamilton) freundlich aufgenommen.

Die Erweiterung des Zahlbegriffs durch die Einführung negativer Zahlen war die Folge des Bedürfnisses, die Subtraktion allgemein ausführen zu können. Eine solche Allgemeinheit wurde in der Entwicklung der Algebra schon früh als eine große Bequemlichkeit erkannt. Zur Einführung negativer Zahlen durch die Not gedrungen, war es den Mathematikern nie gelungen, die Theorie derselben von störenden Paradoxien zu befreien. In der zweiten Hälfte des Jahrhunderts wurden die allgemeinen Erklärungen negativer Zahlen und ihrer Operationsregeln allmählich als unzureichend erkannt, ohne daß aber im 18. Jahrhundert eine strenge Entwicklung der logischen Voraussetzungen erreicht wurde. Gegen Ende des Jahrhunderts begegnet man Forschern da und dort, die den Zahlbegriff auf positive Zahlen beschränken möchten, um dadurch die „Pfuschereien" in der Mathematik zu vermeiden. Der Einwand gegen imaginäre Zahlen war noch stärker als gegen die negativen, obschon alle Mathematiker ersten Ranges von beiden ohne Bedenken beständigen Gebrauch machten.

Ein Schriftsteller, welcher während der letzten vierzig Jahre des Jahrhunderts in England eine Reaktion gegen den Gebrauch von

---

[1]) La langue des calculs, p. 42. [2]) Gherli, op. cit. T. I, p. 2. [3]) Kästner, op. cit. S. 102. [4]) Kants sämtl. Werke, herausgeg. von Hartenstein, III, S. 144.

negativen und imaginären Größen in der Algebra hervorzurufen suchte und bei einigen gewissenhaften Mathematikern nicht ersten Ranges auch Anerkennung fand, war Francis Maseres (1731 bis 1824). Schon früher hatte Robert Simson, welcher 1711 zum Professor der Mathematik an der Universität von Glasgow ernannt wurde und während beinahe fünfzig Jahren diese Stelle bekleidete, negative Zahlen in der Algebra verworfen[1]). Maseres schrieb 1758 zu London eine in der Gleichungstheorie weiter zu besprechende Dissertation on the use of the negative sign etc. Er war damals „fellow of Clare-Hall" in Cambridge. In dieser und in späteren Schriften sucht er negative, sowie imaginäre Größen aus der Algebra zu verbannen, durch welche die sonst klare und elegante Wissenschaft bewölkt worden sei. Eine negative Größe definiert er als eine Zahl, die von einer größeren abgezogen werden soll. Der Ausdruck $a - b$ habe keinen Sinn, wenn $b > a$ ist; $(-5)(-5) = +25$ bedeute nur, daß $5 \times 5 = 25$, ohne Rücksicht auf Zeichen, oder es sei lauter Unsinn. So lange er nur im Bereich der positiven Zahlen zu rechnen unternahm, mußten natürlich alle wirklich negativen Zahlen sinneswidrig erscheinen.

Die Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und ebenen und sphärischen Trigonometrie von A. G. Kästner, welche im gleichen Jahre (1758) zu Göttingen erschienen, enthalten eine wirkliche Erweiterung des Zahlbegriffs, obschon die Exposition noch immer mangelhaft ist. „Entgegengesetzte Größen heißen Größen von einer Art, die unter solchen Bedingungen betrachtet werden, daß die eine die andere vermindert" (I. Cap., Art. 90). „Man kann die verneinende Größe als etwas, das von der bejahenden abgezogen werden muß, ansehen, und also mit dem Zeichen − bezeichnen, wenn die bejahende + hat" (Art. 92). „Die verneinende Größe kann die bejahende übertreffen" (Art. 93). „Dieses Negative, das übrig bleibt, ist eine wirkliche Größe, nur der, die als positiv betrachtet wird, entgegengesetzt" (Art. 94). Die Auffassung, daß eine verneinende Größe „abgezogen werden muß", hat bis in das 19. Jahrhundert gedauert.

Von Kästner beeinflußt, verfaßte Immanuel Kant 1763 eine Schrift, Versuch den Begriff der negativen Größen in die Weltweisheit einzuführen[2]). „Einander entgegengesetzt ist, wovon Eines dasjenige aufhebt, was durch das Andere gesetzt ist. Diese Entgegensetzung ist zwiefach; entweder logisch durch den Widerspruch, oder real, d. i. ohne Widerspruch." „Es sind die negativen Größen nicht Negationen von Größen, wie die Ähnlichkeit des Ausdrucks ihn hat vermuten lassen, sondern etwas an sich selbst wahrhaftig Positives, nur was dem andern entgegengesetzt ist." Seine Exposition der Zeichen + und − ist nicht so gewandt. „Da die Subtraction ein Aufheben ist, welches geschieht, wenn entgegengesetzte Größen zusammengenommen werden, so ist klar, daß das − eigentlich nicht ein Zeichen der Subtraction sein könne, wie es gemeiniglich vorgestellt wird, sondern das + und − zusammen nur zuerst eine Abziehung bezeichnen. Daher $-4 - 5 = -9$ gar keine Subtraction war, sondern eine wirkliche Vermehrung und Zusammenthuung von Größen einerlei Art. Aber $+9 - 5 = 4$ bedeutet eine Abziehung, indem die Zeichen der Entgegensetzung andeuten, daß die eine in der anderen, soviel ihr gleich ist, aufhebe."

[1]) C. Wordsworth, Scholae Academicae: Some Account of the Studies at English Universities in the 18. Century, 1877, p. 68. [2]) I. Kant, Sämmtliche Werke, herausg. v. G. Hartenstein, Bd. II, Leipzig 1867, S. 71—79.

Um den Gedankengang in Lehrbüchern in größerer Kürze darstellen zu können, werden wir die Erklärungen in Eulers Vollständige Anleitung zur Algebra (1770) vorführen und sie kurz mit denen anderer Autoren vergleichen. Das Werk ist in populärem Stile geschrieben. Was logische Entwicklung von Grundprinzipien anbelangt, kann es aber mehreren anderen Werken dieser Zeit nicht vorgestellt werden. Der Ruhm dieses Lehrbuches scheint uns eher dem zweiten Teile, über die unbestimmte Analysis, als dem ersten Teile zuzuschreiben zu sein.

In Art. 8 sagt Euler: „Wann zu einer Zahl eine andere hinzugesetzt oder addiert werden soll, so wird solches durch das Zeichen + angedeutet, welches der Zahl vorgesetzt und plus ausgesprochen wird". Art. 11: „Wann hingegen von einer Zahl eine andere weggenommen werden soll, oder subtrahirt wird, so wird solches durch das Zeichen − angedeutet, welches soviel als weniger ist, und derselben Zahl, welche weggenommen wird, vorgesetzt wird". Nach dieser Einführung von + und − als Operationszeichen liest man folgendes in Artikel 16: „Hier kommt also die Hauptsache darauf an, was für ein Zeichen eine jegliche Zahl vor sich stehen hat; daher pflegt man in der Algebra die Zahlen mit ihren vorstehenden Zeichen als einzelne Größen zu betrachten, und diejenigen, welche das Zeichen + vor sich haben, bejahende oder positive Größen zu nennen, diejenigen aber, welche das Zeichen − vor sich haben, werden verneinende oder negative Größen genennet". Sind nach dieser Erklärung die Zeichen + und − noch immer überall als Operationszeichen zu betrachten? Hat man in den gewöhnlichen Rechenbüchern nicht auch negative Zahlen an Stellen, wo das Zeichen − benutzt wird? Kann eine negative Zahl zu einer anderen addiert werden? Darüber gibt der Autor keine genügende Auskunft.

Die Zeichen + und − in der Algebra immer nur als Operationszeichen ausdrücklich zu erklären, und sie hernach ohne zulängliche Auseinandersetzungen auch zur Bezeichnung positiver und negativer Zahlen zu gebrauchen, war ein allgemeines Verfahren in Lehrbüchern damaliger Zeit. Man findet es in den Werken von Clairaut, Maclaurin, Thomas Simpson, W. Emerson, William Trail[1]), Bézout, Sauri, Blassière, Büsch, Bürja, Prändel, Karsten, Gherli, Paoli, Da Cunha und Bossut. Daß bei diesem Verfahren die Erschaffung einer neuen Zahlengattung für die Verallgemeinerung der Subtraktion nicht klar hervortritt, ersieht man aus der Bemerkung von Thomas Simpson, daß $-a$ in einem Sinne so unmöglich sei wie $\sqrt{-b}$, da es nicht möglich sei, a von nichts abzuziehen, und der Begriff oder Irrglaube einer Größe weniger als Nichts sinneswidrig sei. Trail behauptet, eine negative Größe an sich sei unerklärlich. In einer Pariser Promotionsschrift des Jahres 1774 heißt es[2]): Keine absolute Größe kann $= -a$; weshalb die Zeichenregel in der Multiplikation nur für Polynomien gilt. Daß die Möglichkeit negativer Zahlen von vielen geleugnet wurde, erhellt auch aus einer Promotionsschrift gleichen Jahres an der Universität Kopenhagen, worin negative Größen durch Beispiele erklärt werden[3]).

In einigen Lehrbüchern werden + und − zuerst zur Bezeichnung entgegengesetzter Zahlen angewandt und dann später stillschweigend auch als Operationszeichen gebraucht. Dieses ist z. B. bei Saunderson[4]), Le Blond und Haußer der Fall. Die zweifache Bedeutung von + und − wird aber in einigen wenigen Schriften recht sorgfältig erklärt, z. B. in der Traité élémentaire de l'analyse mathématique, Paris 1797, von Jacques Antoine Joseph Cousin (1739—1800), Professor an dem Collége de France. Das Werk wurde von ihm zur Zeit der Schreckensherrschaft im Gefängnis geschrieben.

Bei der Multiplikation ist folgendes bei Euler (Artikel 32) von Interesse: „Wir wollen erstlich $-a$ mit 3 oder $+3$ multipliciren; weil nun $-a$ als eine Schuld angesehen werden kann, so ist offenbar, daß wann diese Schuld 3 mal genommen wird, dieselbe auch 3 mal größer werden müsse, folglich wird das gesuchte Product $-3a$ seyn." Nicht so klar ist der nächste Ausspruch, daß „wann eine positive Größe mit einer negativen multiplicirt werden soll, das Product negativ werde", da der Fall, wo $+a$ mit $-b$ multipliziert werden soll, gar nicht besprochen wird. Euler fährt fort (Art. 33): „Nun ist also noch dieser Fall zu bestimmen übrig: nämlich, wann − mit − multiplicirt wird, oder $-a$ mit $-b$. Hierbey ist zuerst klar, daß das Product in Ansehung der Buchstaben heißen werde, ab: ob aber das Zeichen + oder − dafür zu setzen sey, ist noch ungewiß, so viel aber ist gewis, daß es entweder das eine, oder andere seyn muß. Nun aber, sage ich, kann es nicht das Zeichen − seyn? Dann $-a$ mit $+b$ mult. giebt $-ab$, und also $-a$ mit $-b$ mult. kann nicht eben das geben, was $-a$ mit $+b$ giebt, sondern es muß das Gegentheil herauskommen, welches nehmlich heißt, $+ab$. Hieraus entsteht die Regul, − mit − multiplicirt giebt + eben so wohl als + mit +." Diese Aussprüche soll der Leser augenscheinlich als einen Beweis der paradoxischen Zeichenregel akzeptieren, obschon man dieselben kaum eine Demonstration nennen darf. Euler hätte beinahe ebenso gut behaupten können, das Produkt sei $-ab$, weil es eben nicht das geben kann, was $+a$ mit $+b$ gibt; ein Schluß, den wir später (S. 85) bei Daniel Porro wirklich vorfinden. Euler sucht gar nicht zu entscheiden, inwieweit die Operationsregeln einfach auf Voraussetzungen beruhen und inwieweit sie wirklich bewiesen werden können.

Die Beweisführungen dieser Regel in anderen Lehrbüchern weichen gewöhnlich von der Eulerschen bedeutend ab. „Um zu beweisen," sagt Saunderson[1]), „daß $+4$ multiplizirt mit -3, -12 macht, multiplizire man $+4$ nach einander mit $+3$, 0 und -3, und die Produkte machen eine arithmetische Progression; die zwey ersten sind 12 und 0, das dritte also -12, und das Produkt von $+4$ mit -3 gleich -12." Schreibt man hier überall -4 und $+12$, statt $+4$ und -12, hat man Saundersons Nachweis, daß $- \cdot - = +$. Der Leser muß dabei mit dem Satze „bekannt gemacht worden seyn", daß wenn Zahlen in arithmetischer Progression durch einen Multiplikator, oder wenn eine Zahl durch jede Zahl einer arithmetischen Progression multipliziert wird, die Produkte ebenfalls eine arithmetische Progression bilden. Dieser ohne Beweis angenommene Satz birgt aber wichtige Voraussetzungen in sich.

---

[1]) Elements of Algebra for the Use of Students in Universities, 3rd Ed. 1789 (1st Ed. 1778). Im Dict. of the anonymous and pseudonymous literature of Great Britain, by S. Halkett and J. Laing, Edinburgh 1882, p. 238, wird dieses Werk dem Rev. William Trail, Professor der Mathematik am Marishal College zu Aberdeen, zugeschrieben. [2]) Theses mathematicas demonstrabit Theodorus Anna Bourrée de Corberon, 1774 „Nulla quantitas absoluta est $= -a$; hinc in solis polynomiis obtinet signorum regula". [3]) S. A. Christensen, op. cit. S. 180. [4]) Saundersons Algebra, übersetzt von Grüson, Halle 1798, I. Teil, S. 102, 123.

[1]) Saunderson, Aufl. Grüson, 1798, I, S. 113.

Die Nachweise von Segner[1]), Karsten[2]) und Da Cunha[3]) ruhen auf einem unbewiesenen Satz und setzen zu gleicher Zeit stillschweigend voraus, daß $1 \cdot + b = + b$ und $1 \cdot - b = - b$ ein Teil dessen, was die Autoren beweisen wollen. Der Satz lautet: Wenn in einer Proportion die zwei ersten Glieder gleiche (oder ungleiche) Zeichen haben, müssen die zwei letzten auch gleiche (oder ungleiche) Zeichen haben. Es ist $1 : a = - b : a\,(- b)$, $1 : - a = b : (- a)\, b$, $1 : a = b : a\,.\,b$, $1 : - a = - b : (- a)(- b)$. Also müsse $+ a \cdot - b$ und $- a \cdot + b = - ab$, aber $+ a \cdot + b$ und $- a \cdot - b = + ab$ sein.

Clairaut betrachtet in seiner Algebra (Art. 43, 44, 45, 60) das Produkt $(a - b)(c - d)$, wo $(a - b)$ so viel mal zu nehmen ist, als in $(c - d)$ Einheiten sind. Man hat $(a - b)\, c = ac - bc$. Um aber das richtige Resultat zu erlangen, muß man $(a - b)\, d$ oder $ad - bd$ abziehen, wodurch man das wahre Endresultat $ac - bc - ad + bd$ erhält. „Es erhellet folglich zugleich, daß das Glied $bd, \ldots$ das Zeichen + hat, da indessen die Buchstaben b und $d, \ldots$ das Zeichen — haben.“ Damit ist aber Clairaut nicht zufrieden. Man muß noch sehen, „ob, wenn zwo negative Größen, als $-b$ und $-d$, keine positive Größe vor sich haben, ihr Produkt noch bd sey“. Zu dem Zweck setzt er $a = c = 0$ und erhält $- b \cdot - d = + bd$. Thomas Simpson geht nicht so weit; er betrachtet das Produkt von $(a - b)(c - d)$, ohne am Ende $a = c = 0$ zu setzen, und erkennt einen Vorzug seines Verfahrens darin, daß Multiplikator und Multiplikand beide zusammengesetzte Größen sind. Einfache Größen, wie $-b$ und $-c$, unabhängig von anderen, seien unmögliche Größen, wegen der Unmöglichkeit, Etwas von Nichts abzuziehen. Es sei deshalb lächerlich durch wirkliche Demonstration zeigen zu wollen, was das Produkt von $-b$ und $-c$ oder von $\sqrt{-b}$ und $\sqrt{-c}$ sein muß, wenn man von den Werten der zu multiplizierenden Größen keine Idee habe.

William Frend[4]) kritisiert das Clairautsche Verfahren $a = c = 0$ zu setzen, weil Clairaut das Zeichen — als Subtraktionszeichen definiert habe, und die Subtraktion, in der Abwesenheit eines Minuenden, keinen Sinn habe, also $-b$ und $-d$ nicht selbständig existieren können. Der Beweis, den wir von Simpson entnahmen, wird von Bézout, Sauri, Lhuilier[5]) und vielen anderen Autoren angegeben.

Eine zweite weitverbreitete Beweismethode entnehmen wir aus

[1]) Segner, op. cit. I, S. 43. [2]) Karsten, op. cit. II, S. 77, 79. [3]) Da Cunha, Principios mathematicos, Lisboa 1790, p. 101. [4]) Principles of Algebra, London 1796, p. 514—518. [5]) Anl. zur Elementaralgebra, 1. Teil, Tübingen 1799. Lhuilier war seit 1795 Professor in Genf.

den Vorlesungen von Laplace[1]) 1795. „Cette règle“, sagt er, „présente quelques difficultés.“ Das Produkt von $-a$ mit $b - b$ ist $+ 0$, dasjenige von $-a$ mit $+b$ ist $-ab$, weshalb $- a \cdot - b$ den Wert $+ ab$ annehmen muß. Diesen Nachweis gaben auch W. Emerson[2]), Maclaurin (5. Auflage), Basedow und Paulus Makó.

In den zwei letzten Demonstrationen wird die Natur der stillschweigend vorausgesetzten Gesetze leichter wahrgenommen. In beiden sollte das distributive Gesetz als logischer Vordersatz angeführt sein. In allen „Beweisen“ der Zeichenregel für die Multiplikation, welche im 18. Jahrhundert gegeben wurden, werden Schlüsse gezogen, welche auf kein Grundgesetz zurückgeführt werden und deshalb in Wirklichkeit keine Deduktionen, sondern bloß Expositionen einer in der Praxis nützlich gefundenen Verfahrungsweise sind.

Ein Werk, welches der Unklarheit in der Auseinandersetzung der Grundprinzipien der Algebra seinen Ursprung verdankt, wurde von François Daniel Porro (1729—1795) von Besançon anonym unter dem Titel L'Algèbre selon ses vrais principes, à Londres, à Paris et à Besançon 1789, veröffentlicht. Früher erschien von ihm Exposition du calcul des quantités négatives, Avignon (Besançon) 1784. Der Autor klagt, in der gewöhnlichen Darstellung der Algebra hätten die Zeichen + und — je vier Bedeutungen. Das Symbol — bedeute 1) Subtraktion, 2) negative Größe, 3) Division, wie in a^{7-5}, 4) Multiplikation, wie in „$\frac{1}{-a^3} = 1 \times a^3$, parce que la quantité a^3 précédée du signe —, devient facteur du numérateur en changeant son signe“. Auch sei die Multiplikationsregel, $- \cdot -$ gibt +, zu verwerfen, denn diese Regel sei die Ursache des Streits über negative Größen, Imaginäres, den irreduktiblen Fall und Logarithmen negativer Größen. Dieses Übel könne man dadurch beseitigen, daß man annehme $+ \cdot +$ gibt + und $- \cdot -$ gibt —. Diese zwei Prinzipien gäben zwei Kalkülssorten, deren jede ihre eigenen Regeln hätte. In diesen Schriften hervorzuheben ist wohl der Gedanke des Autors, daß Grundoperationen in Algebra hauptsächlich Voraussetzungen sind, und daß verschiedene Annahmen verschiedene Arten der Algebra liefern.

Die Theorie negativer Größen wird auch von einem Professor der Mathematik an dem Collége national de Toulouse, Gratien Olléac, in einer Schrift, Sur des théories nouvelles des nombres opposés, des imaginaires et des équations du

[1]) Journal de l'école polytechnique. Septième et huitième cahiers. T. II, Paris 1812, p. 80. [2]) Treatise of Algebra, London 1780.

troisième degré, à Toulouse, an II (1794) behandelt. Man solle die Wolfsche Idee der Heterogenität entgegengesetzter Zahlen, der zufolge sie miteinander keine Verhältnisse haben können, als absurd fallen lassen und die Descartessche Idee der Realität der negativen sowohl als der positiven Zahlen annehmen.

An der Universität Cambridge sowie auch auf anderen Hochschulen in England hatte Baron Maseres' arithmetische Auffassung der Algebra gegen Ende des Jahrhunderts viele Nachfolger, denn nur durch die Fortschaffung negativer Zahlen glaubte man die Algebra zu den auf strenge Beweise gegründeten Wissenschaften zählen zu dürfen.

Uns ist nur eine Schrift bekannt, worin der Standpunkt von Maseres kritisiert wird. In einer Schrift On the use of negative quantities in the solution of problems by algebraic equations[1]) beklagt William Greenfield, Pfarrer der St. Andrewskirche und Professor der Rhetorik an der Universität Edinburgh, daß Maseres sein Geschick der Umstürzung, statt der Befestigung, der Theorien des Negativen zugewandt habe. Er selber versucht eine Erklärung, indem er das Zeichen — immer nur als Subtraktionszeichen ansieht. Wenn ein Problem es erlaubt, eine Unbekannte x in zwei entgegengesetzten Lagen anzunehmen, dann wird die Gleichung, welche die Bedingungen ausdrückt, die x in einer seiner Lagen verlangt, und deren positive Wurzeln die Werte von x für dieselbe Lage geben, zu gleicher Zeit auch, durch ihre negativen Wurzeln, die Werte von x für die entgegengesetzte Lage liefern. Ähnliches schließt Greenfield für den Fall, wo eine bekannte Größe entgegengesetzte Lagen einnehmen kann. Die Rechtfertigung negativer Größen beruht also bei Greenfield auf der Kenntnis, daß wirklich zwei Probleme auf einmal gelöst werden, und man für beide richtige Resultate erreicht.

Um den Einfluß von Maseres auf Lehrer der Mathematik zu erkennen, braucht man nur die Lehrbücher von Nicolas Vilant[2]), Professor der Mathematik an der Universität St. Andrews zu Edinburgh, von Thomas Manning[3]) in Cambridge, von W. Ludlam[4]), „fellow of St. John's College" in Cambridge, zu durchblättern. Besonders in der Exposition der Gleichungstheorie kommt Maseres' Standpunkt stark zum Vorschein. Ludlam lehrt, daß entgegengesetzte

[1]) Trans. of the Roy. Soc. of Edinburgh, Vol. 1, Edinburgh 1788, p. 131 bis 145. [2]) Elements of Mathematical Analysis, Edinburgh 1798. [3]) Introduction to Arithmetic and Algebra, Cambridge 1796. [4]) Rudiments of Mathematics designed for the use of students at the Universities, 5th Ed., London 1809.

Größen kein Verhältnis hätten. Die Proportion $-1:1=1:-1$ werde als eine wunderbare Paradoxie angeführt, da -1 (eine Zahl weniger als 0 und deshalb weniger als 1) zu einer größeren sein sollte, wie diese größere zur kleineren. In diesen Verhältnissen dürfe man aber nur die absoluten Werte in Betracht ziehen[1]).

Nach Maseres war der bekannteste Gegner des Negativen in England zu dieser Zeit William Frend (1757—1841). Er promovierte 1780 an Christ's College in Cambridge als zweiter „wrangler". Nachdem er ein halb Dutzend Jahre lang als Tutor der Mathematik an der Universität gewirkt hatte, wurde er durch die Paradoxien, über „Zahlen weniger als Nichts", über $-a \cdot -b = +ab$, über imaginäre Zahlen, deren Produkt die Einheit ist, zur Verwerfung aller negativen und imaginären Zahlen und zur Vorbereitung eines Lehrbuches einer streng arithmetischen Buchstabenrechnung geführt. So entstand sein Werk, Principles of Algebra, London 1796, mit einem Appendix über Gleichungen von Francis Maseres.

Die Argumente, welche diese Gegner der Algebra vorbrachten, waren unanfechtbar. Der Ausdruck, negative Zahlen sind „weniger als Nichts" oder, nach Newton, „nihilo minores", war nicht gehörig definiert und deshalb paradoxisch. Negative Zahlen, definiert als solche, die „abgezogen werden müssen", waren gewiß sinneswidrig, sobald der Subtrahend größer als der Minuend angenommen wurde. Man versuchte in den Lehrbüchern das Unmögliche zu tun, nämlich negative Zahlen aus positiven Zahlen abzuleiten, ohne die Operation der Subtraktion ausdrücklich zu erweitern oder den Begriff „weniger als Nichts" zu beleuchten. Eine solche Erweiterung oder Beleuchtung hätte die Verallgemeinerung des Zahlbegriffs erfordert. In keinem Lehrbuche erschienen aber negative Zahlen in klarem Lichte, als eine willkürliche Erweiterung des Zahlbereichs, oder als eine Annahme (Voraussetzung), welche mit der Annahme positiver Zahlen auf gleicher Stufe stand und in der Definition selbst die Existenz negativer Zahlen begründete.

Die besprochene Reaktion ist eine eigentümliche Erscheinung in der Geschichte der Mathematik. Gewiß fehlte es dem Robert Simson, Maseres und Frend an Einsicht, an einem ins Innere eindringenden Erkennen. Sonst, statt negative und imaginäre Zahlen, welche nie falsche Resultate lieferten und eine große Ökonomie im mathematischen Arbeiten erzielten, zu verwerfen, wären sie tiefer in die Theorie derselben gedrungen, um ihre logischen Grundlagen zu

[1]) Rudiments of Mathematics, S. 31.

entdecken. Der erste, der an der Universität Cambridge dieses versuchte und die Opposition gegen die Erweiterung des Zahlbereichs zu entfernen strebte, war Robert Woodhouse, welcher 1801 in den Philosophical Transactions eine Abhandlung über Algebra veröffentlichte. Eine 1806 dort gedruckte Arbeit über imaginäre Größen vom Abbé Buée soll dem Lesen von Frends Algebra seinen Ursprung verdanken. Ein Brief von Buée an Frend führt auf diese Vermutung[1]).

In Deutschland erschien 1795 ein Artikel Über die Lehre von den entgegengesetzten Größen[2]) von Georg Simon Klügel (1739—1812), Professor zu Halle, worin der Verfasser nahe daran war, einen wichtigen Schritt in der Exposition der Algebra vorzunehmen. Er führt acht Vorschriften für die gemeinen Operationen der Buchstabenrechnung an, welche das distributive Gesetz ausdrücken. Z. B. VII:

$$(a+b)(c-d) = a(c-d) + b(c-d) = ac - ad + bc - bd.$$

Es findet sich hier ein Versuch vor, die Formalgesetze der Algebra festzusetzen. Es wird aber angenommen, daß in der Formel VII der Subtrahend kleiner als der Minuend sei. Jeder Rest und Quotient wird ursprünglich als positiv angesehen. Aus VII erhelle es, daß ein Produkt aus zwei Faktoren das Zeichen — erhält, wenn die Faktoren verschiedene Zeichen haben.

So lange über negative Zahlen keine klaren Begriffe existierten, ist nicht zu verwundern, wenn imaginäre Größen allgemein als unmöglich angesehen wurden. Euler drückt sich in seiner Algebra (Art. 143, 144) so aus: „Weil nun alle mögliche Zahlen, die man sich nur immer vorstellen mag, entweder größer oder kleiner sind als 0, oder etwa 0 selbst; so ist klar, daß die Quadratwurzel von Negativ-Zahlen nicht einmal unter die möglichen Zahlen können gerechnet werden.... Von diesen behauptet man also mit allem Recht, daß sie weder größer noch kleiner sind als nichts; und auch nicht einmahl nichts selbsten, als aus welchem Grund sie folglich für ohnmöglich gehalten werden müssen." Eine andere Auffassung findet man in einem Werke, Éléments de mathématiques à l'usage des écoles nationales, Toulouse et Paris 1781 (nouv. Éd., Paris, an X) von Roger Martin (? — 1811), welcher sich viel Mühe nimmt, die Grundprinzipien deutlich darzulegen. Nach Euklid definiert er die Einheit als den abstrakten Begriff dessen, was irgend ein einziges

[1]) A. De Morgan, Trigonometry and Double Algebra, London 1849, p. V.
[2]) Archiv d. r. u. a. Math. (Hindenburg), Bd. I, 1795, S. 309—319, 470—481.

Dasein vorstellt, und die Zahl als eine Menge gleicher Einheiten. Irrationale und imaginäre Größen seien auch Zahlen. Nehme man $\sqrt{-1}$ als Einheit, könne man $2\sqrt{-1}$, $3\sqrt{-1}$ durch Wiederholungen erlangen, was für den Begriff einer Zahl genüge. „Rien n'empêche donc de mettre les imaginaires au rang des nombres."

In einer Schrift, On the arithmetic of impossible quantities[1]) gibt John Playfair (1748—1819), der schottische Mathematiker und Physiker, eine naive Erklärung, warum der Gebrauch von imaginären Größen zu richtigen Resultaten führe. Operationen mit imaginären Schriftzeichen, obschon in sich selbst unsinnig, seien Kennzeichen für andere, welche Sinn mit sich führen. Dies werde bei der Berechnung von Sinus und Kosinus in bezug auf den Kreis und die Hyperbel besprochen. Wenn Untersuchungen, die mit imaginären Größen durchgeführt werden, ebenso erfolgreich zur Wahrheit leiten, als solche mit reellen Größen, so könne dieser Umstand nur einer Analogie zugeschrieben werden, welche zwischen den untersuchten Gegenständen existiere, eine Analogie, die so eng sei, daß jede Eigenschaft des einen auf den anderen Gegenstand übertragen werden könne. Demnach könne jeder Ausdruck, den er beim Kreise abgeleitet habe, durch Substitution von $\sqrt{1}$ für $\sqrt{-1}$, in einen für die Hyperbel gültigen Ausdruck umgeändert werden. Die mit imaginären Symbolen durchgeführten Operationen, obschon an sich absurd, dienen als Wegweiser zu solchen, welche verständlich seien. Diese Abhandlung Playfairs machte großen Eindruck in England, und 1801 fand Robert Woodhouse[2]) es noch nötig, die Unzulänglichkeit dieser Erklärung hervorzuheben.

Eine eigentümliche Angabe findet man in W. Emersons Treatise of Algebra, welcher 1780 zu London erschien. Auf S. 67 heißt es: „Wenn imaginäre Wurzeln miteinander multipliziert werden, geben sie immer —, sonst würde ein reelles Produkt von unmöglichen Faktoren entspringen, was sinneswidrig wäre. Also $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{-ab}$, und $\sqrt{-a} \times -\sqrt{-b} = -\sqrt{-ab}$, etc. Auch $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = -a$, und $\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} = +a$, etc." Diese widersprüchlichen Angaben werden nicht weiter erklärt oder angewandt. Überhaupt ist die Entwicklung fundamentaler Begriffe bei Emerson sehr mangelhaft.

In Huttons Mathematical and Philosophical Dictionary, London 1796, wird im Artikel „Imaginary" hervorgehoben, daß man über die Arithmetik imaginärer Größen noch keine Übereinstimmung

[1]) Phil. Trans., Vol. 68 for the year 1778, Pt. I, p. 318—343. [2]) Phil. Trans., 1801, S. 89.

Pourquoi avoir mis si longtemps avant d'accepter les nombres négatifs? Pourquoi des savants parmi les plus grands (Pascal, Descartes pour ne citer qu'eux) ont-ils éprouvé tant de réticences à les utiliser?

La première raison a été le lien nombres-géométrie, la seconde la difficulté éprouvée par les partisans de leur utilisation de justifier et l'existence des nombres négatifs et les règles de calcul. Parmi ces règles de calcul il en fut une plus difficile à justifier que les autres : *"moins par moins égal plus"*. Aucun modèle, justifiant l' existence des nombres négatifs (dettes, température etc...) n'est capable d'expliquer cette règle. Seul le principe de permanence a réussi à la faire accepter!
Et si nos élèves étaient comme Pascal? Et si ceux qui éprouvent des difficultés n'étaient en fait que des individus nous demandant des justifications?

Comment les nombres négatifs sont-ils introduits? Si c'est à l'aide du modèle *"dettes,températures,etc... "* n'est ce pas réducteur par la suite? Seront-ils capables de s'en libérer? Il faudrait pouvoir rassurer ceux qui ne comprennent pas, leur dire qu'ils se trouvent dans une situation somme toute banale. S'ils avaient vécu deux siècles plus tôt, ils auraient fait partie d'une majorité!

Comment leur faire admettre cette règle si ce n'est en leur disant: *"c'est ainsi parce ÇA MARCHE "*? Ou, en nous souvenant de l'utilisation qu'en a fait Stifel?

$1:\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ s'écrit $((2)^{-1})^{-1} = 2^1$
$2^{(-1)\times(-1)} = 2^1$
donc $(-1)\times(-1) = 1$

Mais ce serait ce encore plus difficile, il faudrait pouvoir faire des recherches.

BIBLIOGRAPHIE

Brochures APMEP : Fragments d'histoire des mathématiques I et II ; (numéros 41 et 65).

Bulletin Inter-IREM Epistémologie : Pour une perspective historique de l'enseignement des mathématiques.

CANTOR Moritz : Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.

CARNOT : Métaphysique du calcul infinitésimal.

J.Paul COLLETTE : Histoire des mathématiques ; Tomes 1 et 2.

A.DAHAN-DALMEDICO et J.PFEIFFER : Une histoire des mathématiques ; Routes et dédales.

EULER : Über die Kontroverse.

GLAESER Georges : Epistémologie des nombres négatifs.

KANT Emmanuel : Essai pour introduire en philosophie le concept de grandeur négative. (Traduit par Roger Kempf).

IREM-POITIERS : Cahiers d'histoire des Mathématiques et d'Epistémologie ; VIETE (mai 1989).

Morris KLINE : Mathématiques ; La fin de la certitude.

The geometry of René Descartes : Livre IIIf.

Titre : Les nombres négatifs ont une histoire.

Auteur : S. HAEGEL - Groupe IREM Histoire des mathématiques .

Mots-clés : Histoire des nombres.

Résumé : L'histoire des nombres négatifs est étonnante. Ils ont mis plusieurs siècles à s'imposer !

Public concerné : Enseignants et élèves.

Editeur : I.R.E.M. de Strasbourg (Brochure S.154)