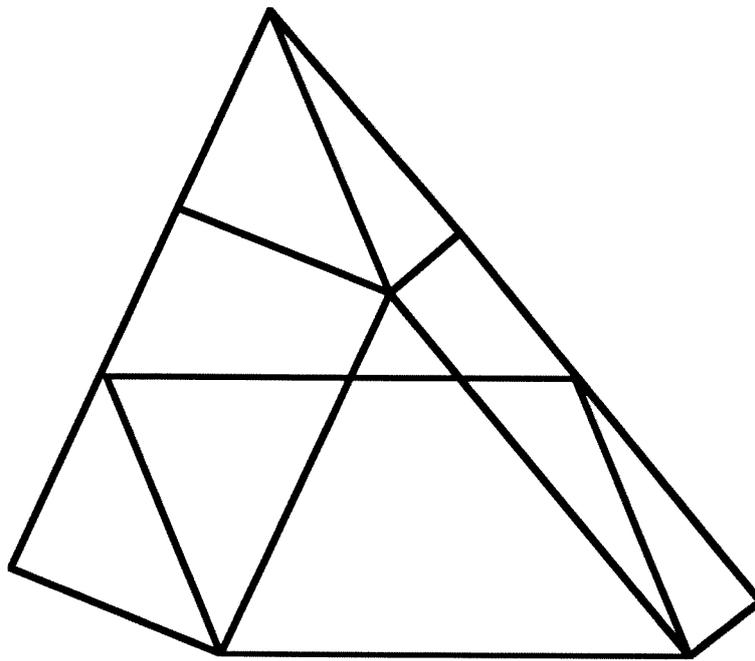


ANALYSE COGNITIVE DE  
QUELQUES  
DEMONSTRATIONS DU  
THEOREME DE PYTHAGORE



*Virginia Padilla*  
*IREM de Strasbourg - Université Louis Pasteur*

*avril, 1992*

# ANALYSE COGNITIVE DE QUELQUES DEMONSTRATIONS DU THEOREME DE PYTHAGORE

## Introduction

Il est classique de souligner le rôle intuitif ou heuristique que les figures ont en mathématique. Mais il y a très peu d'études qui sont consacrées aux procédures cognitives qui permettent aux figures de jouer ce rôle. Or cette question est d'autant plus importante que le rôle heuristique des figures est loin d'être évident aux yeux de la majorité des élèves de collège qu'il peut l'être pour les enseignants.

Les explications qui se réfèrent aux lois gestaltistes de la perception ne sont pas suffisantes pour expliquer ce rôle heuristique. Il faut pouvoir identifier les différentes opérations purement figurales auxquelles sont associés des traitements mathématiques pertinents, pour analyser les conditions de leur mise en œuvre et pour définir les possibilités de leur apprentissage, et les explications gestaltistes n'apportent là aucune indication.

Chaque registre sémiotique de représentation comporte des traitements qui lui sont strictement spécifiques. Les figures "géométriques" sont des représentations de l'un de ces registres sémiotiques. Dans ses analyses sur le rôle de la distinction et de la coordination des registres dans les apprentissages cognitifs, R. Duval a distingué différentes "appréhensions opératoires" qui permettent de rendre compte du rôle heuristique des figures. L'étude de l'une d'entre elles, la reconfiguration, a plus particulièrement retenu mon attention.

Une figure "géométrique" donnée peut être partagée en plusieurs sous-figures également "géométriques". Certaines des sous-figures obtenues, ou toutes, peuvent alors être regroupées en une autre figure. Cette modification peut être effectuée mentalement, réalisée graphiquement, ou même matériellement. **La reconfiguration** est cette appréhension opératoire de la figure initiale. Toute figure peut aussi être le support de plusieurs reconfigurations.

Le point important concernant la mobilisation de ce traitement figural, dont tous les jeunes élèves sont capables est le suivant : selon les figures et selon les problèmes mathématiques pour lesquelles les figures sont sollicitées, la reconfiguration peut être spontanée et évidente, même pour un élève qui ne comprend pas les mathématiques, ou, au contraire, difficile à "voir" sur la figure de départ. Ces variations tiennent à des

facteurs de visibilité et de complexité qui “facilitent” ou qui “inhibent” cette opération figurale dans la perception d'une figure.

L'identification de ces différents facteurs est donc le premier travail d'une étude de la reconfiguration. J'ai en grande partie repris la description que R. Duval en a proposée. Mais elle n'est pas suffisante. Il faut encore montrer comment ces facteurs permettent d'analyser le coût d'utilisation de la reconfiguration pour la résolution d'un problème mathématique donné. On peut en effet, à l'aide de ces facteurs, analyser toutes les productions mathématiques dans lesquelles le recours à la reconfiguration est un traitement figural pertinent, et en déterminer ainsi à priori le degré de difficulté pour les élèves.

La reconfiguration n'est évidemment pas le seul traitement figural qui rende compte du pouvoir heuristique des figures. Et surtout, ce traitement figural n'est pas pertinent pour toutes les situations géométriques. Cependant, je l'ai privilégié dans mon travail pour deux raisons.

La première est que la reconfiguration a joué historiquement un grand rôle dans la découverte des premiers résultats mathématiques.

Déjà les Egyptiens semblaient accoutumés à des transformations comprenant la congruence des rectangles à l'aide de triangles isocèles et de trapèzes isocèles. Euclide, dans les Eléments, a appliqué l'opération de reconfiguration, pour démontrer que “les trois angles intérieurs du triangle sont égaux à deux droits” (proposition XXXII du livre I) et pour démontrer le théorème de Thalès. Cette opération était connue chez les Chinois sous le nom “principe de rapiécage pour les figures géométriques” et, en Europe, on l'appelle “principe de Cavalieri”. La plupart des démonstrations du théorème de Pythagore correspond à des mises en œuvre différentes de la reconfiguration.

La seconde est que le type de situations géométriques présenté dans les premières années de collège relève de ce type de traitement figural. Et cette opération conserve son intérêt à des niveaux avancés.

La reconfiguration peut donc être considérée comme un cas exemplaire pour montrer l'importance de la prise en compte d'un traitement purement figural dans l'enseignement des mathématiques.

L'opération de reconfiguration consistant en un **regroupement pertinent des parties élémentaires d'une figure**, permet donc d'enclencher immédiatement des traitements tels que :

- **La mesure d'aires par sommation ou par retranchements des parties élémentaires.**

Dans ce cas, les démarches se fondent sur le principe de la conservation des aires et sur l'application d'un des axiomes d'Euclide : “en soustrayant des quantités égales à des quantités égales, on obtient des quantités égales”.

**- La mise en évidence de l'équivalence de deux regroupements intermédiaires.**

Dans ce cas l'équivalence peut être justifié par différents arguments, par exemple parce que les sous-figures résultant des regroupements pertinents ont même base et même hauteur (argument utilisé par Euclide dans la démonstration du théorème de Thalès).

**- La reconstitution de la figure initiale en une autre figure par déplacement d'éléments.**

Naturellement des transformations ponctuelles : translations, rotations et symétries, peuvent au plan discursif, justifier mathématiquement les regroupements opérés figuralemment.

L'opération de reconfiguration soulève deux types de problèmes radicalement différents : ceux internes au registre des figures et ceux relatifs à l'articulation de ce mode de traitement figural avec des traitements propres à d'autres registres.

Les problèmes internes au registre des figures concernent les facteurs qui jouent sur la visibilité et la complexité de la reconfiguration. Les problèmes relatifs à l'articulation avec d'autres registres sont essentiellement des problèmes de congruence.

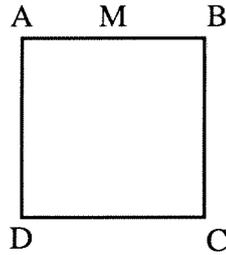
### **Les facteurs de visibilité et de complexité.**

Le rôle intuitif d'une figure géométrique dépend de plusieurs facteurs. Ces facteurs peuvent jouer un rôle pour faciliter ou, au contraire, pour occulter l'appréhension opératoire conduisant à la solution du problème posé. Le fait que les élèves “voient” rapidement ou “ne voient pas” l'opération figurale suggérant un traitement mathématique pertinent, dépend de ces facteurs.

Dans le cas de la reconfiguration nous distinguerons sept facteurs qui jouent sur la “visibilité” et sur la “complexité” de cette appréhension opératoire.

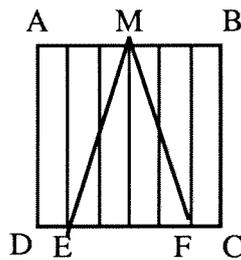
**a - Le fait que le fractionnement de la figure en parties élémentaires soit donné au départ ou qu'il doive être trouvé.**

Exemple, dans le problème suivant : *Faire la partition d'un carré en trois parties égales, en faisant le partage à partir du milieu (M) du côté AB.*



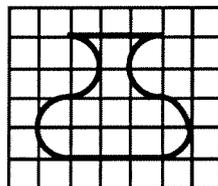
La figure demande des traitements auxiliaires à effectuer, qui consistent à tracer des segments (ou des droites, éventuellement), pour avoir plus de parties élémentaires (carrés ou rectangles) que n'en a la figure de départ, c'est à dire la figure correspondant à l'objet sur lequel porte l'énoncé du problème. Bien que l'énoncé demande un fractionnement de la figure de départ, il n'en suggère aucun : l'application de l'opération de reconfiguration exige, donc, d'effectuer des tracés supplémentaires auxiliaires sur la figure.

On pourrait donner un autre énoncé : *ABCD est un carré partagé en bandes égales. Prouve que les aires AMED, MEF et MBCF sont égales.* Sur cet énoncé l'opération de reconfiguration peut être mise en œuvre directement sans recours à des tracés auxiliaires.



**a<sub>1</sub> - Le fait que la figure soit dessinée sur un fond quadrillé ou sur un fond non-quadrillé.**

Soit le problème suivant : *Quelle est l'aire (en carreaux) de cette surface ?*



Nous avons observé que le support quadrillage est une aide pour l'application de l'opération de reconfiguration. Ce fond quadrillé induit deux types de procédures : la reconfiguration des petits carreaux et la reconfiguration de la forme globale (vase) en une autre forme globale (rectangle). (V. Padilla, 1990, p. 243-248).

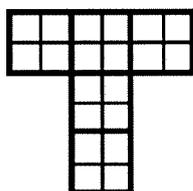
D. Küchemann (1981), a montré que l'existence ou non d'un fond quadrillé dans des tâches de symétrie avait un effet sur le taux de réussite ; plus précisément, le taux de réussite dans une tâche élémentaire de symétrie tombait de 86% à 61% quand on passait d'un fond quadrillé à un fond non-quadrillé (ibid., page 142).

L'existence d'un fond quadrillé peut aussi avoir un effet perturbateur, comme le montre l'étude de D. Grenier (1988) : "En effet, les items sur papier quadrillé ne sont pas mieux réussis que ceux sur papier blanc. Or, le papier quadrillé enduit la prise en compte des points particuliers de la figure : nous l'avons repéré en observant des élèves en résolution de problème. Si cet effet du papier quadrillé est positif (abandon de la perception globale, analyse de la figure en points), la matérialisation des lignes du quadrillage a, elle, un effet perturbateur : elle induit des procédures de comptage sur des lignes de rappel horizontal ou vertical, qui sont fausses dès que l'axe est oblique dans la feuille . Les procédures de 'rappel horizontal' fonctionnent dès que l'axe de symétrie est vertical" (ibid. p. 63-64).

**b - Le fait que le regroupement pertinent des parties élémentaires forme une reconfiguration qui est convexe ou au contraire non convexe.**

Une sous-figure non convexe est plus difficile à détacher de la figure qu'une sous-figure convexe, car la loi gestaltiste de simplicité du contour n'est plus respectée. (Mesquita A., 1989, page 72).

Exemple. Dans le problème suivant : *Cette figure est formée de cinq carrés. Peut-on la découper en quatre morceaux superposables ? Marque les traits du découpage sur la figure.*



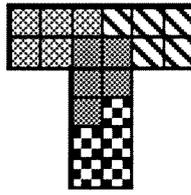
Le regroupement pertinent des parties élémentaires forme des sous-figures qui sont non convexes.



Nous avons constaté que ce facteur joue un rôle important pour discerner parmi plusieurs reconfigurations possibles celle qui est mathématiquement pertinente. ( V. Padilla,1990, p. 232-238).

**c - Le nombre de modifications positionnelles (rotations et translations) à effectuer sur la sous-figure clé pour arriver à bien la placer.**

Par exemple, dans le problème antérieur, on doit effectuer trois rotations de la sous-figure clé pour arriver à bien la placer pour résoudre le problème.

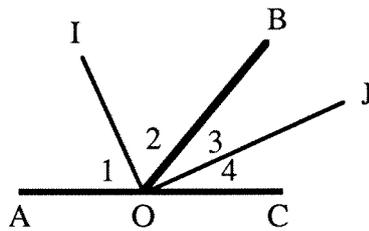


Ce problème a été proposé dans le questionnaire pour l'évaluation du Programme de Mathématiques fin de 6ème, 1987, réalisé par l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public), il a eu une réussite de 22% et l'APMEP a considéré, sans prendre en compte ce facteur, que ce problème était “une tâche peu facile”.

**d - Le fait qu'une même partie élémentaire doive entrer simultanément dans deux regroupements intermédiaires à comparer.**

C'est ce que R. DUVAL a appelé l'**obstacle du dédoublement des objets**. “Le dédoublement d'un objet donné, pratique aussi triviale et nécessaire que l'identification d'un même objet sous plusieurs expressions ou points de vue différents, constitue un obstacle qu'une partie des élèves ne cesse de retrouver dans les diverses situations d'apprentissage où ils sont placés” (DUVAL R., 1983, p. 387).

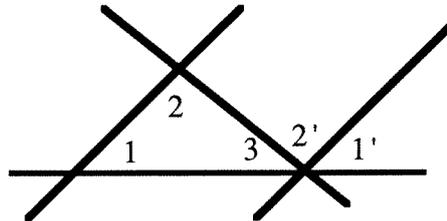
Exemple, dans le problème suivant : *IO et OJ étant respectivement les bissectrices des angles AOB et BOC, quelle est la valeur de l'angle IOJ ? Pourquoi ?*



Les parties élémentaires 2 et 3 entrent simultanément dans deux regroupements intermédiaires : IOJ et AOB pour la partie élémentaire 2, IOJ et BOC pour la partie élémentaire 3. R. DUVAL, a observé que cela constituait un réel obstacle pour certains élèves : ils ne pouvaient voir et comprendre *qu'un même objet puisse être en même temps dans deux regroupements posés comme différents puisqu'on cherchait à les comparer*.

**e - Le fait que le regroupement pertinent exige que l'on substitue des parties élémentaires auxiliaires à celles auxquelles l'énoncé du problème réfère.**

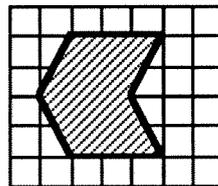
Pour montrer, par exemple, que la somme des angles d'un triangle fait  $180^\circ$ , on reconfigure les angles du triangle en un angle plat : cette reconfiguration exige la substitution des parties élémentaires 1' et 2' respectivement à 1 et 2. (R. DUVAL, 1988, pages 66, 67, 68).



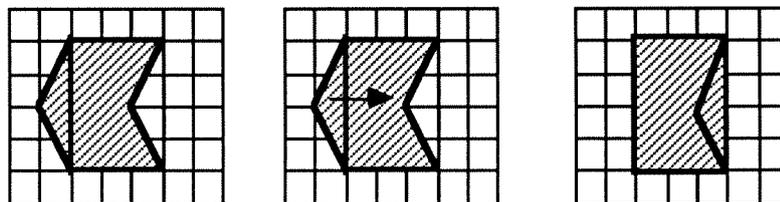
**f - Le fait que l'opération de reconfiguration ne doive prendre en compte que les caractéristiques du contour.**

Les propriétés du contour de la figure sont-elles une aide pour l'application de l'opération de reconfiguration ?

Exemple, dans le problème suivant : *Calculer l'aire de la figure hachurée. (Aire du chaque carreau du quadrillage :  $1\text{cm}^2$ ).*

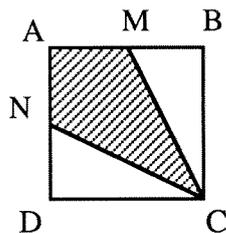


Indépendamment du fond, quadrillé ou non, le contour de la figure représente une aide pour l'application de l'opération de reconfiguration. La figure est non convexe : il "lui manque" un triangle. Mais le regard gestaltiste jeté sur la figure nous montre où se trouve ce triangle manquant et, pour régulariser la figure, on peut faire un assemblage des triangles : le triangle "mâle" et le triangle "femelle", c'est-à-dire on comble un trou.



Mais, dans cet autre problème :

La figure représente un carré ABCD avec deux milieux de côtés, M et N. Quelle est la fraction que représente la partie hachurée du carré ? Explique comment tu l'as trouvée.

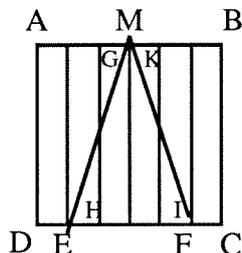


les caractéristiques du contour ne sont plus une aide pour l'application de l'opération de reconfiguration intermédiaire.

**g - Le fait que toutes les sous-figures doivent être déplacées à l'intérieur même de la figure de départ, ou au contraire, que quelques sous-figures doivent sortir du contour de la figure de départ.**

Les types de déplacements à effectuer sur les sous-figures pertinentes ont un lien avec le contour de la figure. En effet ces déplacements peuvent être effectués à l'intérieur ou à l'extérieur de celle-ci, en fonction de son contour. Exemples :

1° Dans le problème de la page 8 un binôme d'élèves de la classe de 6ème a fait le raisonnement suivant :



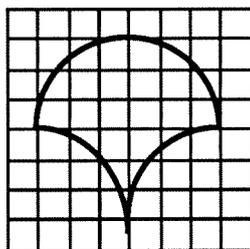
Le morceau H peut être mis à la place G et réciproquement

Le morceau I peut être mis à la place K

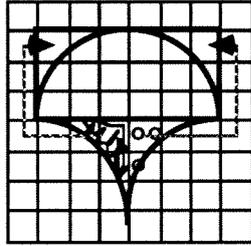
On obtiendra alors trois rangées de 2 bandes égales.

Pour reconfigurer les bandes, les sous-figures pertinentes ont été déplacées à l'intérieur même de la figure de départ le carré ABCD.

2° Quelle est l'aire (en carreaux) de cette surface ?



Un binôme d'élèves de la classe de 6ème a fait le raisonnement suivant :



On prend le demi-cercle on y ajoute  
le reste au-dessus ce qui nous donne  
un rectangle de 3 sur 6  
 $3 \times 6 = 18$

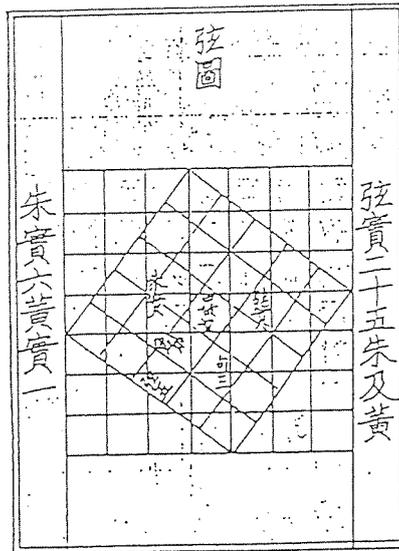
Pour reconfigurer la figure donnée en un rectangle global, les sous-figures ont été déplacées à l'extérieur du contour de la figure de départ.

Ces facteurs permettent d'évaluer le degré de visibilité de la reconfiguration pertinente (car plusieurs reconfigurations sont toujours possibles sur une même figure) et d'analyser avec précision le degré de complexité de l'application de l'opération de reconfiguration intermédiaire.

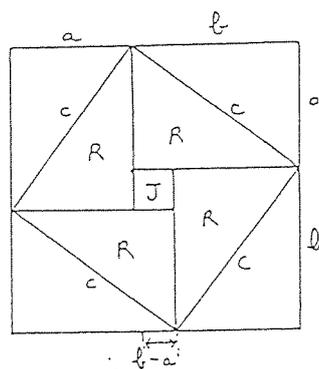
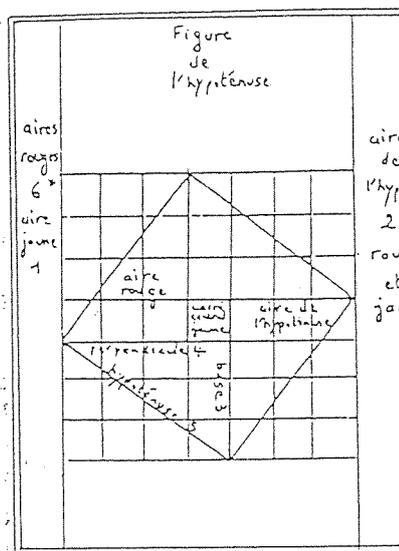
### **Application aux démonstrations du théorème de Pythagore qui mettent en œuvre l'opération de reconfiguration.**

Le théorème de Pythagore a été un théorème important à travers l'histoire. Il a été démontré de plusieurs façons à toutes les époques, et il a reçu différents dénominations, telles que : Théorème de la mariée (chez les Grecs), Chaise de la mariée (chez les Hindous), Figure de l'épousée (chez les Persans), le théorème réciproque porte chez les Persans le nom de Soeur de l'épousée, Invention digne d'une hécatombe et Maître de la mathématique (au Moyen-âge), Pont aux ânes (chez les collégiens), Théorème du carré de l'hypoténuse et enfin Théorème de Pythagore. Pour M. GLAESER, l'importance de ce théorème tient à ce qu'il établit un "pont" entre une propriété métrique et une propriété angulaire (propriétés qu'initialement sont étudiées séparément), car à l'aide d'une propriété des angles on trouve une propriété des longueurs qu'on démontre à l'aide d'une propriété des aires. Et pour lui, "la cause de la validité du théorème de Pythagore est que les triangles rectangles sont les seuls qui peuvent être découpés en deux parties semblables au tout" (GLAESER, 1990, page 21).

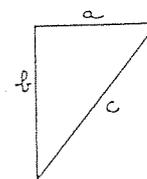
Un texte de l'antique culture Chinoise, qui remonte à environ 1230 av. J.C., contient une figure appelé "de l'hypoténuse" (xian tu), qui montre déjà le théorème de Pythagore (MARTZLOFF J.C., 1989, p. 134, 142, 143).



La "figure de l'hypoténuse" (xian tu)  
du Zhoubi suanjing



R = rouge  
J = jaune



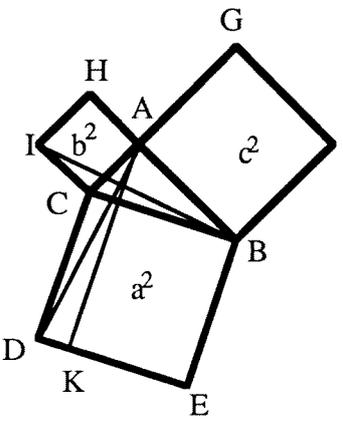
La "figure de l'hypoténuse" (traduction)

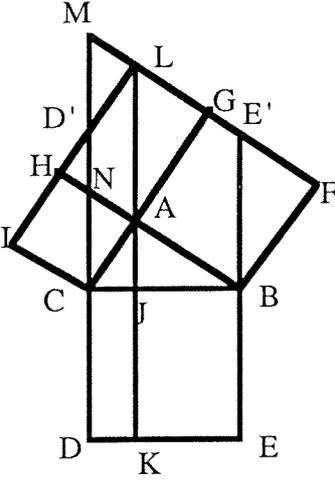
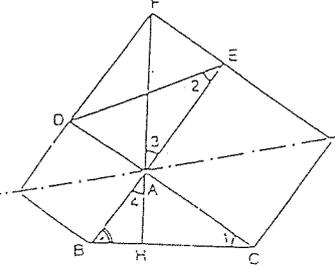
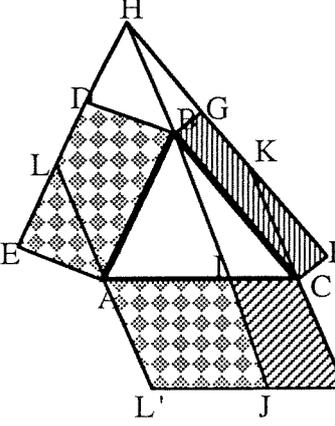
Or la plupart de ces démonstrations correspondent à des mises en œuvre différentes de la reconfiguration. Car même celles qui sont considérées comme algébriques sont fondées sur l'application de l'opération de reconfiguration.

Les facteurs de visibilité et de complexité que nous venons de dégager permettent donc d'analyser ces démonstrations, dans la mesure où elles traduisent une manière spécifique de mettre en œuvre la reconfiguration. L'intérêt d'une telle analyse n'est pas seulement de donner un exemple d'application de la grille des facteurs que nous venons de dégager. Elle permet de classer les démonstrations selon leur coût de traitement figural, et, donc, selon leurs difficultés éventuelles de "compréhension". Une telle analyse présente donc un intérêt didactique majeur.

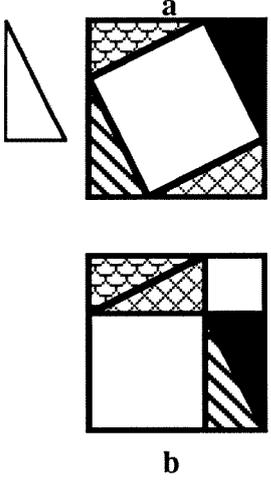
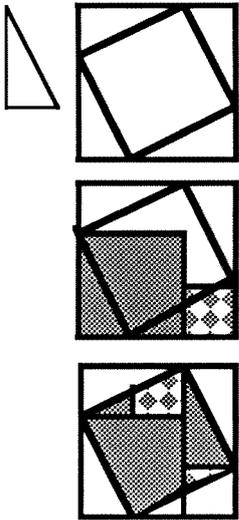
Le tableau synoptique ci-dessous donne une présentation synoptique de cette analyse. L'analyse détaillée de chaque démonstration se trouve après le tableau.

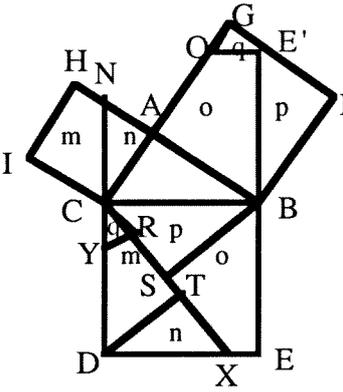
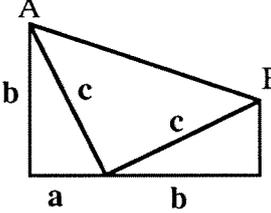
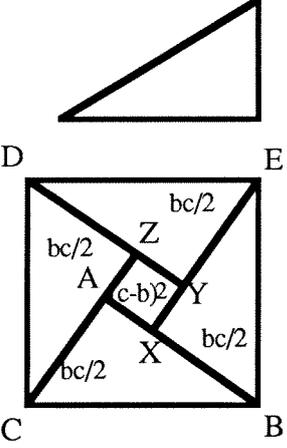
Nous avons regroupés les différentes démonstrations en trois types selon les traitements mathématiques mis en jeu. Ce regroupement est extrinsèque aux traitements figuraux.

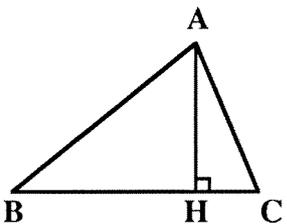
<b>Premier type : démonstrations par transformations laissant l'aire des quadrilatères invariante</b>		
Reconfiguration effectuée	Facteurs qui rendent l'application de l'opération de reconfiguration plus ou moins "visible", plus ou moins "complexe"	Traitement auxiliaire à effectuer
 <p style="text-align: center;"><b>Euclide</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* le fractionnement de la figure en parties élémentaires n'est pas donné au départ, il doit être trouvé</li> <li>* 12 fois la substitution de parties élémentaires auxiliaires à celles auxquelles l'énoncé du problème réfère</li> <li>* 6 fois le dédoublement d'une sous-figure</li> <li>* les caractéristiques du contour n'aident pas à l'application de l'opération de reconfiguration intermédiaire</li> <li>* sous-figures convexes</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* 5 tracés supplémentaires</li> </ul>

 <p>Nassir-ed-DIN</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* le fractionnement de la figure en parties élémentaires n'est pas donné au départ, il doit être trouvé</li> <li>* 6 fois la substitution de parties élémentaires auxiliaires à celles auxquelles l'énoncé du problème réfère</li> <li>* 2 fois le dédoublement d'une sous-figure</li> <li>* les caractéristiques du contour n'aident pas à l'application de l'opération de reconfiguration intermédiaire</li> <li>* sous-figures convexes</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* 6 tracés supplémentaires</li> </ul>
 <p>IREM de Strasbourg</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* le fractionnement de la figure en parties élémentaires n'est pas donné au départ, il doit être trouvé</li> <li>* 6 fois la substitution de parties élémentaires auxiliaires à celles auxquelles l'énoncé du problème réfère</li> <li>* 5 fois le dédoublement d'une sous-figure</li> <li>* les caractéristiques du contour n'aident pas à l'application de l'opération de reconfiguration intermédiaire</li> <li>* sous-figures convexes</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* 5 tracés supplémentaires</li> </ul>
 <p>Pappus</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* le fractionnement de la figure en parties élémentaires n'est pas donné au départ, il doit être trouvé</li> <li>* 6 fois la substitution de parties élémentaires auxiliaires à celles auxquelles l'énoncé du problème réfère</li> <li>* 2 fois le dédoublement d'une sous-figure</li> <li>* les caractéristiques du contour n'aident pas à l'application de l'opération de reconfiguration intermédiaire</li> <li>* sous-figures convexes</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* 5 tracés supplémentaires</li> </ul>

**Deuxième type : démonstrations par transposition d'éléments**

Reconfiguration effectuée	Facteurs qui rendent l'application de l'opération de reconfiguration plus ou moins "visible", plus ou moins "complexe"	Traitement auxiliaire à effectuer
 <p align="center"><b>hindoue</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* le fractionnement de la figure en parties élémentaires est donné au départ</li> <li>* les caractéristiques du contour aident à l'application de l'opération de reconfiguration intermédiaire</li> <li>* sous-figures non-convexes</li> <li>* 6 modifications positionnelles à effectuer</li> <li>* il n'y a pas de substitutions de parties élémentaires auxiliaires * il n'y a pas des dédoublements des parties élémentaires</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* 4 tracés supplémentaires</li> </ul>
 <p align="center"><b>Liu Hui</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* le fractionnement de la figure en parties élémentaires n'est pas donné au départ, il doit être trouvé</li> <li>* les caractéristiques du contour n'aident pas à l'application de l'opération de reconfiguration intermédiaire</li> <li>* sous-figures non-convexes</li> <li>* 5 modifications positionnelles à effectuer</li> <li>* toutes les sous-figures sont déplacées à l'intérieur même de la figure de départ</li> <li>* il n'y a pas de substitutions de parties élémentaires auxiliaires</li> <li>* 2 fois le dédoublement d'une sous-figure</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* 3 tracés supplémentaires</li> </ul>

 <p><b>Ozanam</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* le fractionnement de la figure en parties élémentaires n'est pas donné au départ, il doit être trouvé</li> <li>* les caractéristiques du contour n'aident pas à l'application de l'opération de reconfiguration intermédiaire</li> <li>* sous-figures convexes</li> <li>* 9 modifications positionnelles à effectuer</li> <li>* toutes les sous-figures sont déplacées à l'extérieur de la figure de départ</li> <li>* il n'y a pas de substitutions de parties élémentaires auxiliaires</li> <li>* il n'y a pas de dédoublements des parties élémentaires</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* 7 tracés supplémentaires</li> </ul>
<b>Troisième type : démonstrations algébriques</b>		
<p>Reconfiguration effectuée</p>	<p>Facteurs qui rendent l'application de l'opération de reconfiguration plus ou moins "visible", plus ou moins "complexe"</p>	<p>Traitement auxiliaire à effectuer</p>
 <p><b>Garfield</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* le fractionnement de la figure en parties élémentaires est donné au départ</li> <li>* sous-figures non-convexes</li> <li>* 1 modification positionnelle</li> <li>* les caractéristiques du contour aident à l'application de l'opération de reconfiguration intermédiaire</li> <li>* il n'a pas de dédoublements de parties élémentaires</li> <li>* il n'y a pas de substitutions de parties élémentaires auxiliaires</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* 1 tracé supplémentaire</li> </ul>
 <p><b>Bhaskara 1</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* le fractionnement de la figure en parties élémentaires est donné au départ</li> <li>* sous-figures non-convexes</li> <li>* les caractéristiques du contour aident à l'application de l'opération de reconfiguration intermédiaire</li> <li>* 1 dédoublement d'une partie élémentaire</li> <li>* 4 modifications positionnelles</li> <li>* il n'y a pas de substitutions de parties élémentaires auxiliaires</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* il n'y a pas de traitements auxiliaires à effectuer</li> </ul>

 <p><b>Bhâskara 2</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* le fractionnement de la figure en parties élémentaires est donné au départ</li> <li>* sous-figures convexes</li> <li>* 2 dédoublements de parties élémentaires</li> <li>* les caractéristiques du contour aident à l'application de l'opération de reconfiguration intermédiaire</li> <li>* il n'y a pas de substitutions de parties élémentaires auxiliaires</li> <li>* il n'y a pas de modifications positionnelles</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* il n'y a pas des traitements auxiliaires à effectuer</li> </ul>
--	---	--

## Analyse détaillée de chaque démonstration.

Dans tous les exemples de démonstrations du théorème de Pythagore que nous présentons ci-après, nous partons d'un triangle rectangle à partir duquel on construit la figure qui est la base de la démonstration. Nous analysons les facteurs qui interviennent dans l'application de l'opération de reconfiguration intermédiaire pour arriver à reconstruire le carré de l'hypoténuse à partir des carrés des côtés de l'angle droit.

**Premier type : Démonstrations par transformations laissant l'aire des quadrilatères invariante.**

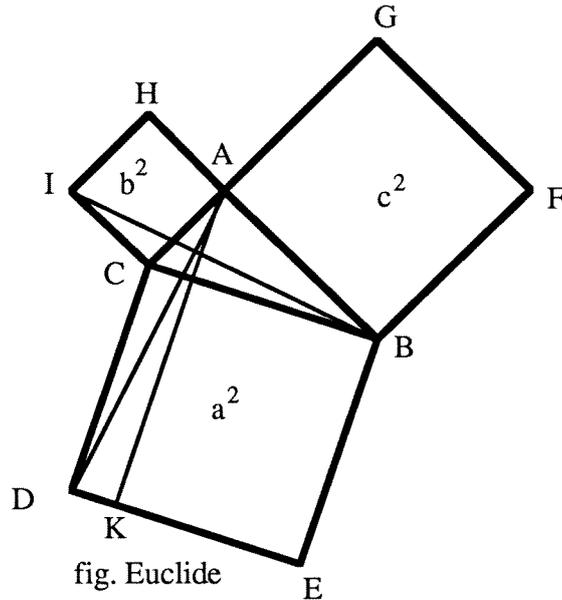
**Exemple n°1 : Démonstration d'Euclide.**

Nous allons commencer par l'analyse de la démonstration la plus ancienne qui soit connue, qui est encore la plus répandue, celle contenue dans les Eléments d'Euclide, Livre I, 47 (IIIème siècle av. J.C.) ; mais suivant le rapport formel de Proclus , elle est dûe au géomètre Alexandrin. C'est une démonstration basée sur l'équivalence des aires. La figure qui a été utilisée par Euclide nous l'appellerons par la suite fig. Euclide. Voici cette démonstration :

**Démonstration d'Euclide**

Nous utiliserons tri. pour triangle.

“Menons AK parallèle à CD, traçons AD, IB. On a tri. ACD = tri. ICB comme ayant CI = CA, CB = CD et  $\sphericalangle$  ICB =  $\sphericalangle$  ACD. On voit aisément d'autre part que tri. ICB =  $\frac{1}{2}$  carré  $b^2$  et tri. CAD =  $\frac{1}{2}$  rect. CK ; donc rect. CK =  $b^2$ . De même rect. BK =  $c^2$ , et enfin, puisque rect.CK + rect. BK =  $a^2$ ,  $a^2 = b^2 + c^2$ ” (FOURREY, 1938, p.69 - 70).



**Analyse :**

- Le fractionnement de la figure en parties élémentaires n'est pas donné au départ, il doit être trouvé.
- La figure demande des traitements auxiliaires à effectuer, qui consistent à tracer des segments (ou des droites, éventuellement), pour avoir plus de parties élémentaires qu'il y avait à l'origine (carrés ou rectangles). La démonstration exige d'effectuer 5 tracés supplémentaires sur la figure : AK, AD, IB, qui sont dessinés, et CF et AE qui ne sont pas dessinés, mais qui sont nécessaires.
- Les caractéristiques du contour n'aident pas à l'application de l'opération de reconfiguration intermédiaire.
- Les regroupements pertinents des parties élémentaires forment des sous-figures convexes.
- Dans la reconstitution du carré de l'hypoténuse,  $a^2$ , avec les deux carrés des côtés,  $b^2$  et  $c^2$ , nous trouvons tout d'abord, le fait que le regroupement pertinent exige que l'on substitue des parties élémentaires auxiliaires à celles auxquelles l'énoncé du problème réfère, nous avons 12 substitutions à effectuer : 6 pour arriver à la substitution du carré  $b^2$  par le rectangle CK et 6 pour arriver à la substitution du carré  $c^2$  par le rectangle BK. En effet, pour arriver à substituer le rect.CK au carré  $b^2$ , nous avons : 1°) la substitution de tri.ICB à  $1/2b^2$ , 2°) la substitution de tri.ACD à tri.ICB, 3°) la substitution de tri.ACD à  $1/2b^2$ , 4°) la substitution de  $1/2$ rect.CK à tri.ACD, 5°) la substitution de  $1/2$ rect.CK à  $1/2b^2$  et 6°) finalement la substitution de rect.CK à  $b^2$ . De même pour faire la substitution de rect.BK à  $c^2$ .

- Dans le raisonnement fait pour justifier ces substitutions, nous devons franchir 6 fois l'obstacle du dédoublements des objets : 3 fois pour chaque substitution ; car pour substituer le rectangle CK au carré  $b^2$ , les deux premiers regroupements à comparer, les triangles ACD et ICB, ont une partie commune ; le deuxième regroupement, le triangle ICB et le carré  $b^2$ , ont également une partie qui appartient simultanément aux deux sous-figures ; et le dernier regroupement, le triangle CAD et le rectangle CK ont aussi une partie commune. Et pour substituer le rectangle BK au carré  $c^2$  nous trouvons également 3 fois le même obstacle.

**Commentaire :**

On ne voit pas si “aisément” l'équivalence entre les différents regroupements. Le fait d'avoir à découvrir le fractionnement de la figure en parties élémentaires, d'avoir cinq tracés à effectuer, d'avoir un contour neutre pour cette opération, la multiplicité des substitutions et l'obstacle du dédoublement six fois présent, augmentent le degré de “complexité” et diminuent le degré de “visibilité” de l'application de l'opération de reconfiguration intermédiaire.

**Exemple n°2 : Démonstration de Nassir-ed-Din**

Edition arabe des Eléments d'Euclide. Rome 1594. Dans “Curiosités Géométriques” (FOURREY, 1938, page 72).

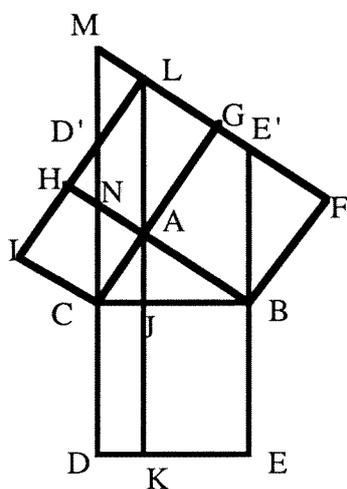


fig. Nassir-ed-Din

“Nassir-ed-Din considère huit cas des figures ; nous nous contenterons de traiter le cas où aucun des carrés ne recouvre le triangle.

Soit L le point de rencontre de FG et HI ; joignons A à L et abaissons AK perpendiculaire sur DE. On a tri. LGA = tri. ABC comme ayant les deux côtés de l'angle droit égaux ; donc LA = BC,  $\angle GAL = \angle ABC = \angle CAJ$  et LAJK est une ligne droite.

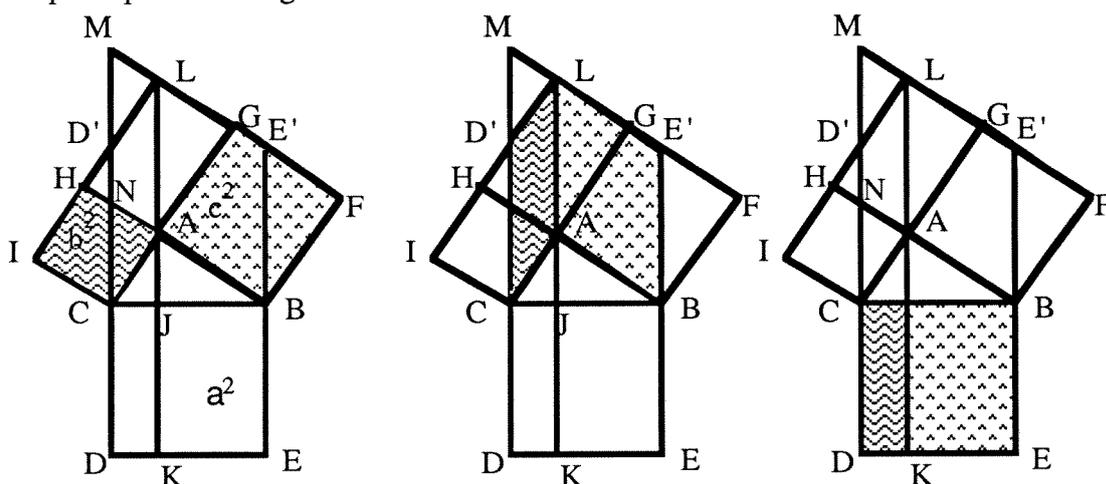
Prolongeons DC jusqu'à sa rencontre D' avec IH. On a parall. ACD'L =  $b^2$ , comme ayant même base et même hauteur CI. On a aussi parall. ACD'L = rect. CK comme ayant même base LA = BC = CD et même hauteur CJ ; donc rect. CK =  $b^2$ . De même, si l'on prolonge EB jusqu' en E' à sa rencontre avec FG, on a parall. ABE'L =  $c^2$  et parall. ABE'L = rect. BK ; par suite rect. BK =  $c^2$  et  $a^2 = b^2 + c^2$ ...”

**Analyse :**

C'est une démonstration par transformations laissant l'aire des quadrilatères invariante, semblable à celle d'Euclide, fondée sur l'équivalence des aires.

- Le fractionnement de la figure en parties élémentaires n'est pas donné au départ, il doit être trouvé.

- La figure demande des traitements auxiliaires à effectuer. La démonstration exige six tracés supplémentaires sur la figure : les droites FG, HI, AL, AK, DC et EB, pour avoir plus des parties élémentaires que celles données au départ.
- Les caractéristiques du contour n'aident pas à l'application de l'opération de reconfiguration intermédiaire.
- Les regroupements pertinents des parties élémentaires forment des sous-figures convexes.
- Le regroupement pertinent exige que l'on substitue des parties élémentaires auxiliaires à celles auxquelles l'énoncé du problème réfère, on doit faire six substitutions, trois pour chaque carré, comme nous avons essayer de le montrer ci-après. Le carré de l'hypoténuse,  $a^2$ , a été reconstitué avec les deux carrés des côtés,  $b^2$  et  $c^2$ , mais dans cette reconstitution, le carré  $b^2$  a été remplacé d'abord par le parallélogramme ACD'L, après, ce parallélogramme ACD'L a été remplacé par le rectangle CK, conclusion : le carré  $b^2$  a été remplacé par le rectangle CK ; le carré  $c^2$  a été remplacé d'abord par le parallélogramme ABE'L, après par le rectangle BK, conclusion : le carré  $c^2$  a été remplacé par le rectangle BK.



- Nous avons deux fois un dédoublement des parties élémentaires. Pour comparer le premier regroupement pertinent des sous-figures : le carré  $b^2$  et le parallélogramme ACD'L il est nécessaire de surmonter l'obstacle du dédoublement des objets, car ces deux sous-figures se chevauchent. Le même obstacle surgit pour le second regroupement : comparaison du carré  $c^2$  et du parallélogramme ABE'L.

#### Commentaire :

Le fait d'avoir à découvrir le fractionnement de la figure en parties élémentaires, d'avoir six tracés supplémentaires à effectuer, d'avoir un contour neutre pour cette opération, la multiplicité de substitutions et l'obstacle du dédoublement deux fois présent, augmentent le degré de "complexité" et diminuent le degré de "visibilité" de l'application de l'opération de reconfiguration intermédiaire.

### Exemple n°3 : Démonstration de l'IREM de Strasbourg.

Nous trouvons ce type de démonstration dans le livre : "Mathématiques 4ème". IREM de Strasbourg. Collection Collèges. Edition Castella, 1988. Page 128. Ce qui est original, par rapport à des démonstrations antérieures c'est le recours aux symétries et translations. Nous appellerons fig. IREM de Strasbourg la figure utilisée dans ce livre, pour cette démonstration.

## 3. Pour ceux qui veulent aller plus loin : une démonstration du théorème de Pythagore

Rappel de l'énoncé : si un triangle ABC est rectangle en A, alors  $AB^2 + AC^2 = BC^2$ .

A partir d'un triangle ABC rectangle en A, on peut représenter  $AB^2$  et  $AC^2$  comme les aires des carrés de côtés AB et AC.

#### ■ Etude de la figure :

Les deux carrés construits sur les côtés du triangle ABC ont un axe de symétrie commun, la diagonale commune.

On a noté D le symétrique de B, et E le symétrique de C.

Ainsi,  $DE = BC$  et  $\widehat{DEA} = \widehat{ACB}$ .

En complétant le rectangle DAEF, on obtient par symétrie du rectangle,  $AF = DE$  et  $\widehat{EAF} = \widehat{DEA}$ .

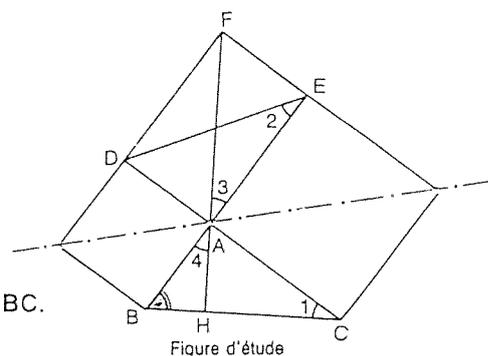
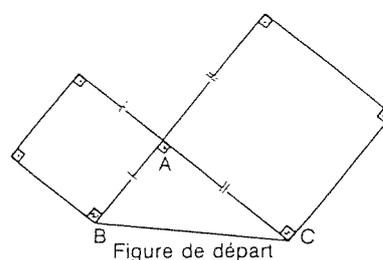
On a tracé la droite FA, et on a appelé H son point d'intersection avec BC.

Ainsi  $\widehat{BAH} = \widehat{EAF}$ , comme angles de demi-droites opposées.

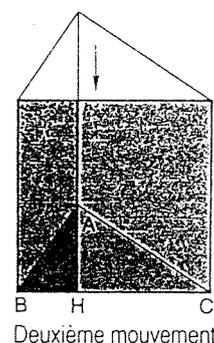
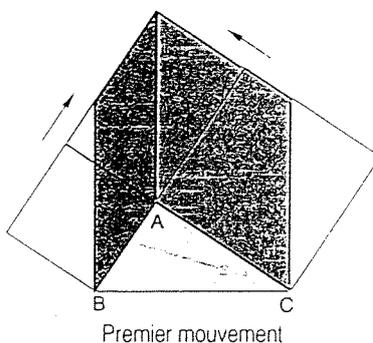
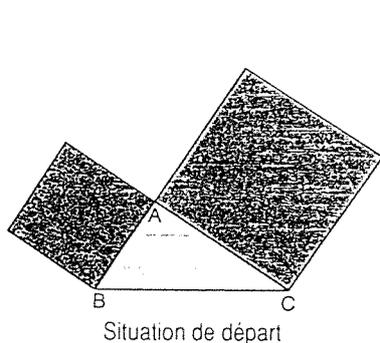
Finalement :  $AF = BC$  et  $\widehat{BAH} = \widehat{ACB}$ .

Le triangle ABH a donc les mêmes angles que le triangle ABC ; il est rectangle en H, puisque le triangle ABC est rectangle en A.

Résumons :  $AF = BC$ , et la droite AF est perpendiculaire à BC.



#### ■ Obtention du résultat de Pythagore en deux mouvements :



Lors du premier mouvement, chaque carré se transforme en un parallélogramme de même aire.

Lors du deuxième mouvement, chaque parallélogramme se transforme en un rectangle de même aire.

La figure finale a deux côtés parallèles à AF, donc perpendiculaires à BC, et de même longueur que AF, qui est égal à BC. C'est donc un carré de côté BC. Ceci établit bien le théorème de Pythagore.

Supplément : nous avons établi que  $AB^2 = BH \times BC$  et  $AC^2 = CH \times BC$  (ce sont les aires des rectangles du deuxième mouvement). Ces relations seront revues en classe de troisième.

### **Analyse :**

- Le fractionnement de la figure en parties élémentaires n'est pas donné au départ, il doit être trouvé.
- La figure “IREM de Strasbourg” exige de traitements auxiliaires à effectuer : cinq tracés supplémentaires, pour avoir plus des parties élémentaires que celles données au départ.
- Les caractéristiques du contour n'aident pas à l'application de l'opération de reconfiguration intermédiaire.
- Les regroupements pertinents des parties élémentaires forment des sous-figures convexes.
- Le regroupement pertinent exige que l'on substitue des parties élémentaires auxiliaires à celles auxquelles l'énoncé du problème réfère, on doit faire 6 substitutions, 3 pour chaque carré. Cette figure présente l'obtention du résultat de Pythagore en “deux mouvements” : dans le premier mouvement, chacun des carrés des côtés a été transformé en un parallélogramme de même aire. “Lors du deuxième mouvement chaque parallélogramme se transforme en un rectangle de même aire”, conclusion : chaque carré a été remplacé par un rectangle de même aire.
- Nous avons cinq fois un dédoublement des parties élémentaires : dans le premier mouvement le carré  $c^2$  et le parallélogramme résultante de la transformation effectuée, ont une partie commune, de même pour le carré  $b^2$ . “Lors du deuxième mouvement chaque parallélogramme se transforme en un rectangle de même aire” et nous avons encore la double présence de l'obstacle du dédoublement, car dans chaque transformation la figure résultante a une partie commune avec la figure de départ. Finalement, le carré de l'hypoténuse reconstitué avec les carrés des deux cotés, figure résultante des transformations effectuées, présente de nouveau, l'obstacle du dédoublement des objets, car elle contient le triangle ABC, objet qui est à l'origine des trois carrés à comparer, et, comme nous l'avons déjà expliqué, ce fait constitue un “vrai obstacle” pour les élèves.

### **Commentaire :**

Le fait d'avoir à découvrir le fractionnement de la figure en parties élémentaires, d'avoir cinq tracés supplémentaires à effectuer, d'avoir un contour neutre pour cette opération, la multiplicité de substitutions et l'obstacle du dédoublement cinq fois présent, augmentent le degré de “complexité” et diminuent le degré de “visibilité” de l'application de l'opération de reconfiguration intermédiaire.

Le lien entre les deux parties : “Etude de la figure” et “Obtention du résultat de Pythagore” en deux mouvements, est aussi une difficulté.

### **Exemple n°4 : Démonstration de Pappus.**

C'est autre exemple de démonstration, du même style que celle d'Euclide, qui est une proposition plus générale de la démonstration du théorème de Pythagore due à Pappus

d'ALEXANDRIE (environ 320 après J.C.). Présentée par FRIEDELMEYER, 1990, page 8.

“Soit un triangle ABC quelconque, et ABDE, BCFG deux parallélogrammes quelconques construits sur les deux côtés AB et BC. Soit H le point de rencontre de (ED) et (FG). Si on mène par A et C les parallèles à (BH), qui coupent respectivement (ED) et (FG) en L et K, alors le quadrilatère ALKC est un parallélogramme équivalent à la somme des parallélogrammes ABDE et BCFG.

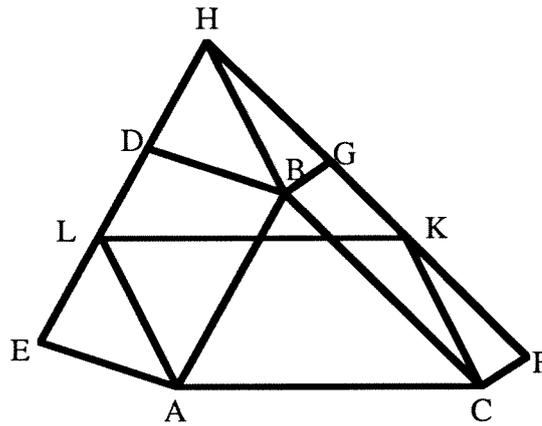


fig. FRIEDELMEYER

Le lecteur en trouvera facilement la démonstration ”.

### Analyse :

Cette démonstration est-elle évidente ? Voyons, nous allons essayer d'analyser et de filmer la reconfiguration pertinente.

D'abord la lecture de la figure FRIEDELMEYER est compliquée, car on a l'impression de ne pas être dans le plan mais dans l'espace.

Mais la démonstration que donne FOURREY (1938, p.101) de cette propriété de Pappus, semble plus immédiate, parce que le parallélogramme que nous essayons de reconstituer (ACKL) n'est plus à l'intérieur de la figure mais à l'extérieur (ACK'L'), ce qui élimine l'impression d'être dans l'espace. Mais cela ne veut pas dire que la démonstration soit plus simple.

- Le fractionnement de la figure en parties élémentaires n'est pas donné au départ, il doit être trouvé.
- La démonstration exige des traitements auxiliaires à effectuer : cinq tracés supplémentaires, pour avoir plus des parties élémentaires que celles données au départ.
- Les caractéristiques du contour n'aident pas à l'application de l'opération de reconfiguration intermédiaire.
- Les regroupements pertinents des parties élémentaires forment des sous-figures convexes.

- Le regroupement pertinent exige que l'on substitue des parties élémentaires auxiliaires à celles auxquelles l'énoncé du problème réfère, on doit faire six substitutions, trois pour chaque parallélogramme. En effet le regroupement pertinent (fig4) exige : pour passer de la fig2 à la fig3 le remplacement des parallélogrammes ABDE et BCFG par les parallélogrammes ABHL et BCKH, qui ont des aires équivalentes (même base et même hauteur). Pour passer de la fig3 à la fig4, on doit remplacer les parallélogrammes ABHL et BCKH par les parallélogrammes AL'JI et ICJK', qui ont des aires équivalentes, car on a  $HB=IJ$ , conclusion : on remplace les parallélogrammes ABDE et BCFG par les parallélogrammes AL'JI et ICJK', respectivement.

- Nous avons deux fois un dédoublement des parties élémentaires : pour les parallélogrammes ABDE et ABHL et les parallélogrammes BCFG et BCKH.

Nous avons essayé de filmer cette démonstration, la voici :

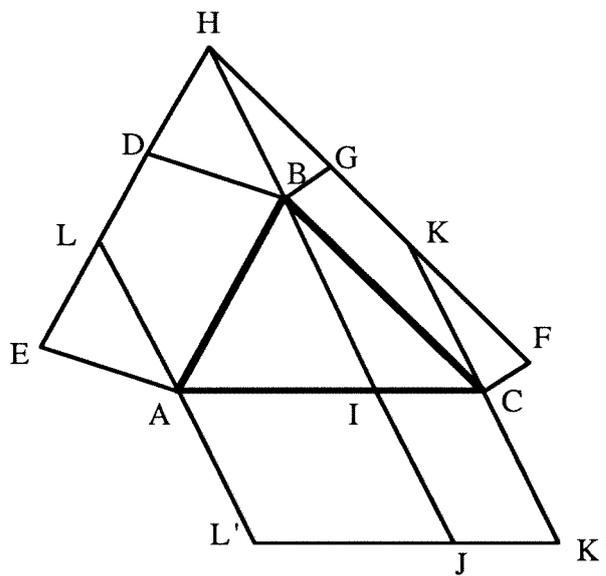


fig.1 : fig.Pappus

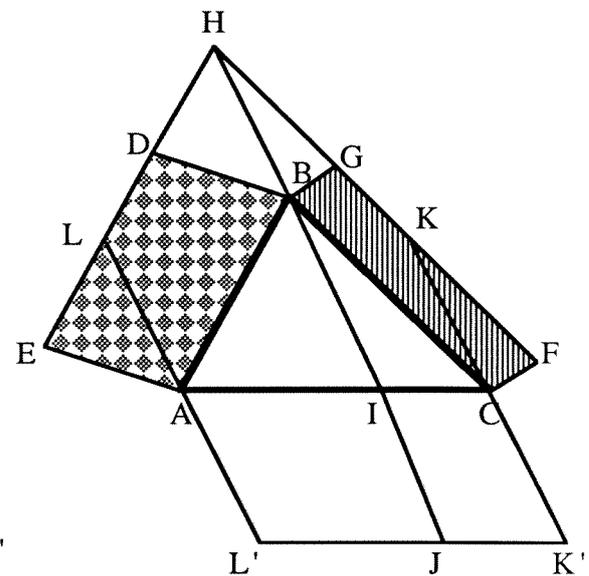
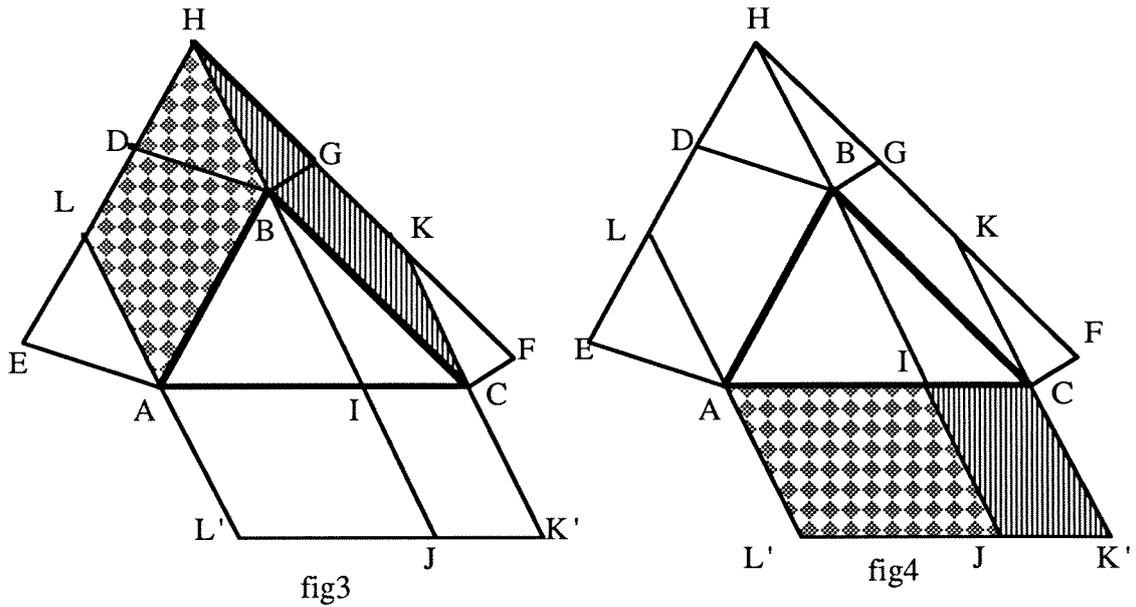


fig2



**Commentaire :**

Le fait d'avoir à découvrir le fractionnement de la figure en parties élémentaires, d'avoir cinq tracés supplémentaires à effectuer, d'avoir un contour neutre pour cette opération, la multiplicité de substitutions et l'obstacle du dédoublement deux fois présent, augmentent le degré de "complexité" et diminuent le degré de "visibilité" de l'application de l'opération de reconfiguration intermédiaire.

**Deuxième type : Démonstrations par transposition d'éléments.**

**Exemple n°1 : Figure hindoue.**

C'est une démonstration par transposition d'éléments, avec quatre exemplaires d'un triangle rectangle disposés en carré, d'origine hindoue. Présentée par FOURREY comme un démonstration d'après BRETSCHNEIDER : Simpson (trad. de l'anglais). *Eléments de Géométrie*, Paris, 1766. (FOURREY, 1938, p. 80).

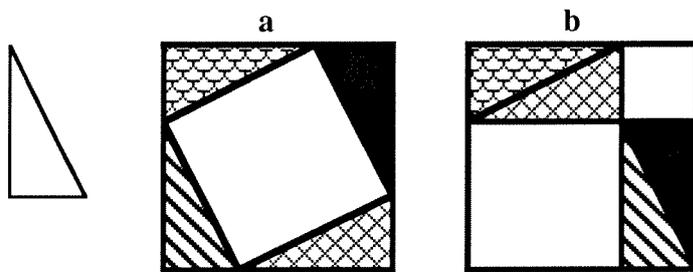


fig. hindoue

Le carré de l'hypoténuse a même complémentaire dans le grand carré que la somme des carrés des côtés de l'angle droit.

### Analyse :

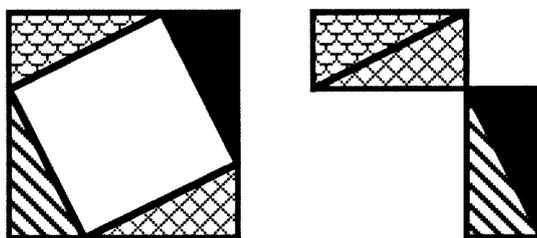
Avec quatre exemplaires d'un triangle rectangle, disposés convenablement, on forme un grand carré, de côté égal à la somme des côtés de l'angle droit (fig.a). Le complémentaire des quatre triangles dans le grand carré est le carré de l'hypoténuse. En reconfigurant d'une autre façon les quatre triangles rectangles (fig.b) on "voit" que le complémentaire de ces quatre triangles dans le grand carré est, maintenant, la somme des carrés des côtés de l'angle droit, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.

Cette figure "démontre" aussi  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

- La reconfiguration des quatre triangles rectangles pour avoir la figure **a** demande trois modifications positionnelles : trois rotations.

La reconfiguration des quatre triangles rectangles pour avoir la figure **b** demande, également, trois modifications positionnelle : trois translations.

- La figure **a** est formée par un regroupement non convexe des quatre triangles. La figure **b** c'est le regroupement non convexe de deux figures convexes : les deux rectangles formés chacun par deux triangles. C'est un facteur qui rend difficile la "visibilité" de l'application de l'opération de reconfiguration intermédiaire. En effet, trouver la reconfiguration convenable des 4 triangles, parmi celles qui sont possibles, n'est pas évident compte tenu de la non-convexité et de la non-contiguïté des parties élémentaires.



- Une fois formée la sous-figure qui est à l'origine de la figure **b** il faut des traitements auxiliaires pour avoir les deux carrés complémentaires de cette sous-figure dans le grand carré, on doit effectuer quatre tracés supplémentaires.

- Les caractéristiques du contour aident à l'application de l'opération de reconfiguration intermédiaire. En effet, la sous-figure de la figure **b** étant non-convexe, les caractéristiques de son contour aident à trouver dans le grand carré, les deux carrés complémentaires.

- Il n'y a pas de chevauchement des parties élémentaires.

- Il n'y a pas des substitutions des parties élémentaires auxiliaires à celles auxquelles l'énoncé du problème réfère.

### Commentaire :

Le fait d'avoir six modifications positionnelles, d'avoir quatre tracés supplémentaires à effectuer, d'avoir des sous-figures non-convexes rendent difficiles l'application de l'opération de reconfiguration. Mais le fait d'avoir un contour qui aide pour cette opération et de n'avoir pas l'obstacle du dédoublement augmentent le degré de "visibilité" pour l'application de cette opération.

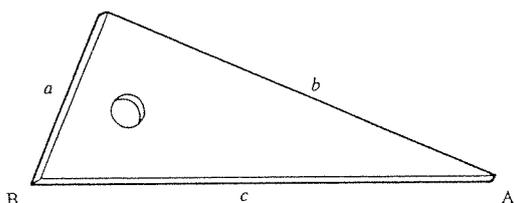
Nous trouvons ce type de démonstration dans presque tous les livres de la classe de 4ème. Voici 3 exemples :

1 - Livre : "Mathématiques 4ème". IREM de Lorraine, 1988. Editions Didier. Page 23.

---

16. Mesure ton équerre et compare  $a^2 + b^2$  avec  $c^2$ .

---



### ▶ LE THÉORÈME DE PYTHAGORE

---

La propriété  $c^2 = a^2 + b^2$  est vraie pour tout triangle rectangle.

---

Considérons en effet une équerre de côtés  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , où  $c$  est l'hypoténuse :

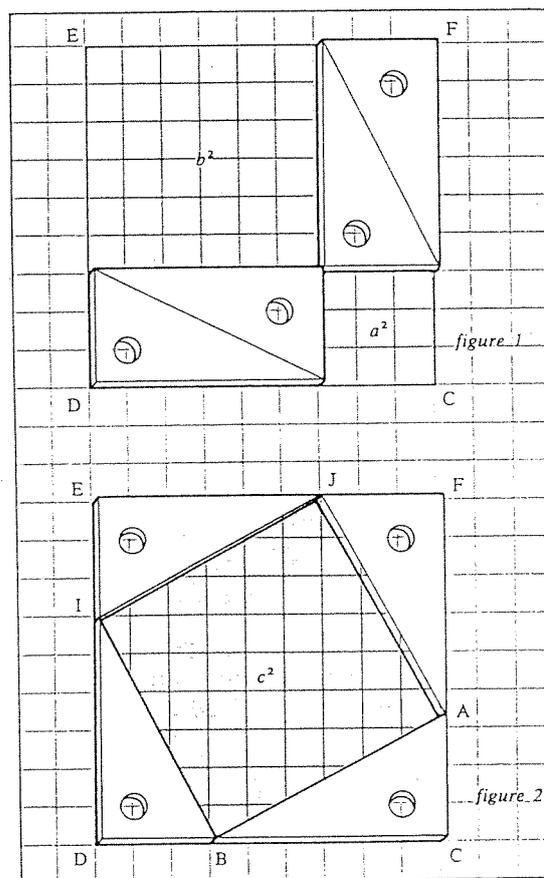
En disposant 4 équerres identiques comme sur les figures 1 et 2, on obtient le même carré CDEF de côté égal à  $a + b$ .

La surface bleue est donc égale à la surface rouge.

- La surface bleue est composée de deux carrés. Elle vaut  $a^2 + b^2$ .
- La surface rouge vaut  $c^2$ , car ABIJ est un carré de côté  $c$  (voir page 28).

On a donc bien l'égalité  $c^2 = a^2 + b^2$ .

Cette propriété s'appelle le théorème de Pythagore.



---

LE THÉORÈME DE PYTHAGORE

23



## LA PROPRIÉTÉ DE PYTHAGORE

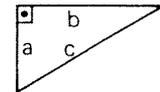
Objectif des activités 2 à 4 :

Découvrir par plusieurs approches la propriété de Pythagore et sa réciproque.

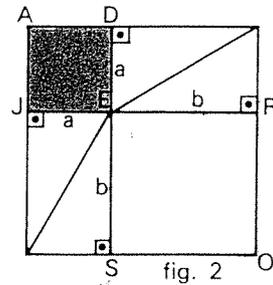
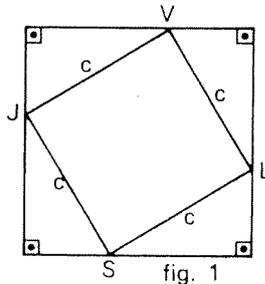
On peut également utiliser 4 équerres isométriques.

### a/ Découpages

1. Découper 4 triangles rectangles dont les côtés perpendiculaires mesurent par exemple  $a = 4 \text{ cm}$  ;  $b = 7,5 \text{ cm}$ .



2. Dessiner ensuite un grand carré de côté  $11,5 \text{ cm}$ . Sur le grand carré, disposer les 4 triangles rectangles comme il est indiqué sur la figure 1, puis comme il est indiqué sur la figure 2.



### b/ Observations et calculs

1. Calculer en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $c$  les aires des carrés JVLS, ROSE, JADE.

2. Compléter les pointillés en utilisant JVLS, JADE, ROSE :

– En observant les figures 1 et 2 on peut écrire :

Aire (grand carré) –  $4 \times$  Aire (triangle) = Aire (...).

Aire (grand carré) –  $4 \times$  Aire (triangle) = Aire (...) + Aire (...).

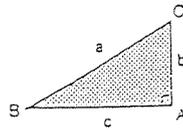
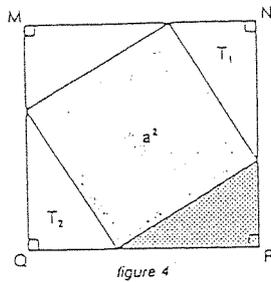
– Donc : Aire (...) = Aire (...) + Aire (...) donc  $c^2 = \dots$

### c/ Conclusion

Si  $c$  est la longueur de l'hypoténuse,  $a$  et  $b$  les longueurs des côtés perpendiculaires, alors  $a^2 + b^2 = c^2$ .

1.2. Propriété de Pythagore

ABC est un triangle rectangle en A.  
 a, b et c sont les mesures des longueurs des côtés respectivement  
 opposés aux sommets A, B et C.

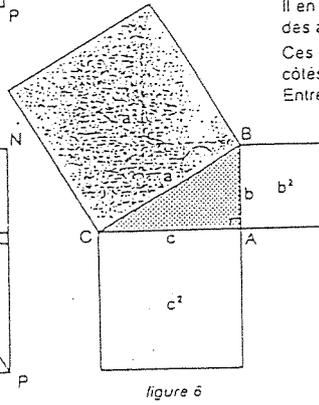
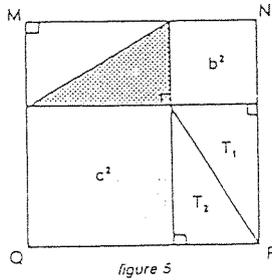


Les figures 4 et 5 nous indiquent deux façons de répartir à l'intérieur du carré MNPQ (mesure de la longueur du côté :  $b + c$ ) quatre triangles superposables au triangle ABC.

Il en résulte que l'aire du carré rose de la figure 4 est égale à la somme des aires des carrés verts de la figure 5.

Ces carrés sont superposables à ceux que l'on peut construire sur les côtés du triangle ABC (figure 6).

Entre les nombres a, b et c existe la relation :  $a^2 = b^2 + c^2$ .



**Exemple n°2 : Figure Liu Hui.**

C'est une démonstration par transposition d'éléments. Avec 4 exemplaires d'un triangle rectangle disposés convenablement on forme un carré (fig1).

On fait une reconfiguration du carré de l'hypoténuse ( $a^2$ ) à partir des carrés des côtés de l'angle droit ( $b^2$  et  $c^2$ ).

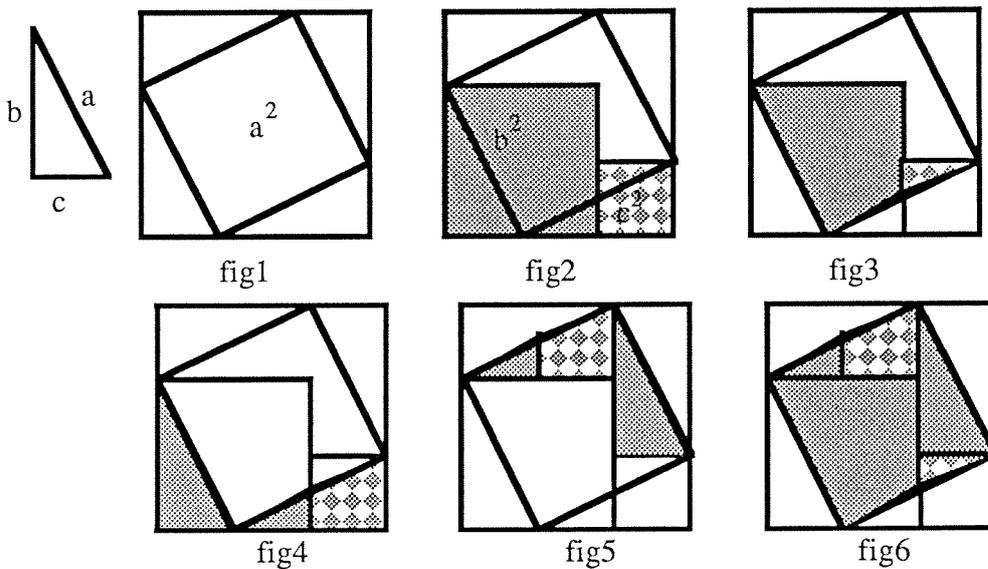


fig. Liu Hui

### **Analyse :**

Nous appellerons ces figures, fig. Liu Hui, car d'après MARTZLOFF (1989, p. 140), c'était le type de figure que Liu Hui (vers 270 après J.C.) utilisait pour démontrer Pythagore.

Dans cette démonstration le carré de l'hypoténuse (fig1) est reconstitué dans la fig6, avec les carrés des côtés de l'angle droit (fig2).

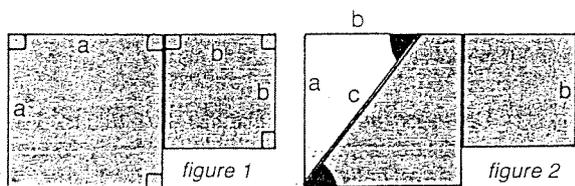
- Le regroupement pertinent des triangles rectangles dans la figure 1 forme une sous-figure non-convexe et ce facteur diminue la "visibilité" de l'application de l'opération de reconfiguration intermédiaire. En effet, trouver la reconfiguration convenable des triangles, parmi celles qui sont possibles, n'est pas évident compte tenu de la non-convexité et de la non-contiguïté des parties élémentaires.
  - Le fractionnement de la figure 1 en parties élémentaires n'est pas donné au départ, il doit être trouvé.
- La figure 1 demande des traitements auxiliaires à effectuer, qui consistent à tracer des segments (ou des droites, éventuellement), pour avoir plus de parties élémentaires qu'il y avait au départ (carrés ou rectangles). En effet, il faut tracés supplémentaires sur la fig.1 pour construire les carrés des côtés de l'angle droit (fig.2).
- La démonstration exige cinq modifications positionnelles. En effet, la reconfiguration des triangles rectangles pour avoir la figure 1 demande modifications positionnelles : une symétrie centrale et deux rotations. Pour reconstituer la partie manquante du carré de l'hypoténuse il faut aussi faire modifications positionnelles, (deux translations) : celles des deux parties restant des carrés des côtés (fig4), qui trouvent leur place dans la fig5.
- Les caractéristiques du contour n'aident pas à l'application de l'opération de reconfiguration intermédiaire.
- Nous avons deux fois le dédoublement d'une partie prise en même temps dans deux regroupements différents à comparer. En effet, dans la fig.3 les deux parties ombrées appartiennent simultanément au carré de l'hypoténuse ainsi qu' aux carrés des côtés.
- Toutes les sous-figures sont déplacées à l'intérieur même de la figure de départ.
- Il n'y a pas de substitutions de parties élémentaires auxiliaires.

### **Commentaire :**

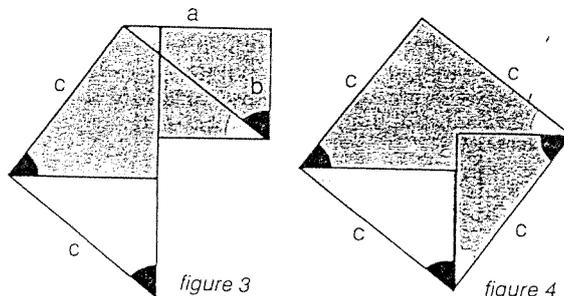
Le fait d'avoir à découvrir le fractionnement de la figure en parties élémentaires, d'avoir trois tracés supplémentaires à effectuer, d'avoir un contour neutre pour cette opération, la multiplicité des modifications positionnelles et l'obstacle du dédoublement deux fois présent, augmentent le degré de "complexité" et diminuent le degré de "visibilité" de l'application de l'opération de reconfiguration intermédiaire.

Nous avons également trouvé dans des manuels de 4ème ce type de démonstration :

1.14 Une autre façon d'établir la propriété de Pythagore.  
Tous les calculs se feront en utilisant uniquement les lettres a, b et c indiquées sur les figures et représentant des mesures de longueur.  
Reproduisez sur du carton les deux carrés de la figure 1 en triplant les dimensions.  
Quelle est la mesure de l'aire de la figure formée de ces deux carrés ?



Découpez le triangle jaune (figure 2) et collez-le avec du « scotch » (figure 3).



Découpez le triangle rouge de la figure 3 et collez-le avec du « scotch » comme l'indique la figure 4.

Le triangle jaune est-il superposable au triangle rouge ?

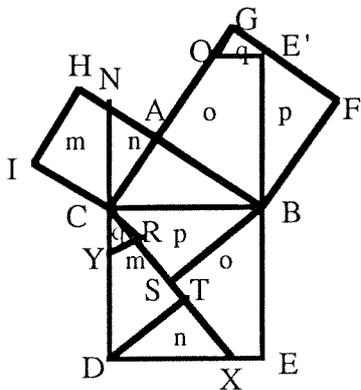
Justifiez les couleurs des angles.

La figure 4 est un carré. Pourquoi ?

Quelle est son aire ? Comparez cette aire à celle de la figure 1. Quelle égalité pouvez-vous écrire ?

### Exemple n°3 : Démonstration d'après OZANAM

Revu par M. de C. G. F. (MONTUCLA). Récréations mathématiques et physiques, tome I. Paris, 1778. Dans Curiosités Géométriques (FOURREY, 1938, p. 87).



Prolongeons [EB] jusqu'à sa rencontre en E' avec [GF], puis [DC] jusqu'à son point de concours N avec [AH] et menons [E'O] parallèle à [BC] : on détermine ainsi 5 éléments m, n, o, p, q, qui, disposés d'une autre façon, forment le carré a

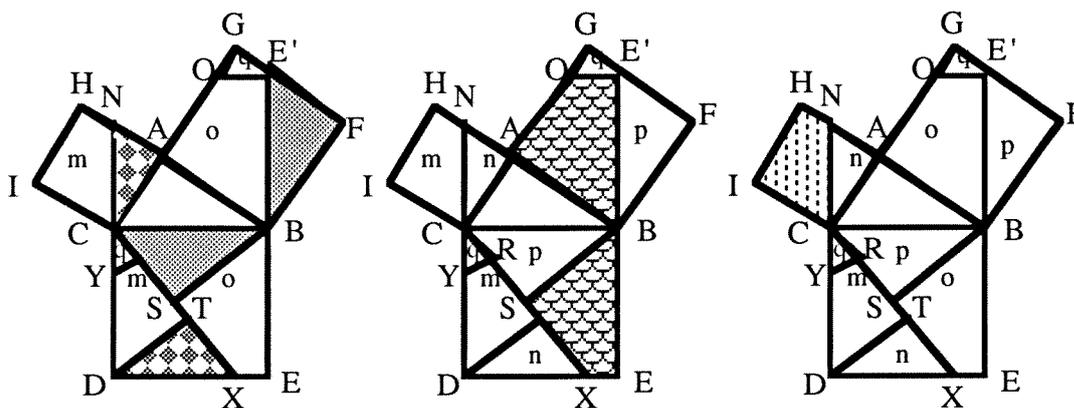
A cet effet, prenons [DX] = [DY] = [CN] ; menons [CX] et de Y, D et B abaissons des perpendiculaires [YR], [DT] et [CX]. Les 5 éléments ainsi constitués sont égaux aux précédents chacun à chacun, ainsi qu'il est facile de le montrer.

#### Analyse :

La reconstitution du carré de l'hypoténuse est faite à partir des cinq pièces obtenues avec les carrés des côtés de l'angle droit du triangle.

- Le fractionnement de la figure en parties élémentaires n'est pas donné au départ, il doit être trouvé.
- La figure de départ demande des traitements auxiliaires à effectuer, qui consistent à tracer des segments (ou des droites, éventuellement), pour avoir plus de parties élémentaires qu'il y avait à l'origine (carrés ou rectangles). En fait, il faut sept tracés

- supplémentaires : trois sur les carrés des côtés de l'angle droit (pour trouver les cinq pièces) et quatre sur le carré de l'hypoténuse (pour retrouver les cinq pièces).
- Les caractéristiques du contour n'aident pas à l'application de l'opération de reconfiguration intermédiaire.
  - Les regroupements pertinents des parties élémentaires forment des sous-figures convexes.
  - Dans cette démonstration toutes les sous-figures sont déplacées à l'extérieur de la figure de départ.
  - Il n'y a pas de dédoublements de parties élémentaires.
  - Il n'y a pas de substitutions des parties élémentaires auxiliaires.
  - Pour reconstituer le carré de l'hypoténuse avec les cinq pièces il faut alors faire neuf modifications positionnelles : trois translations, quatre symétries et deux rotations, que nous avons essayé de filmer ci-après.



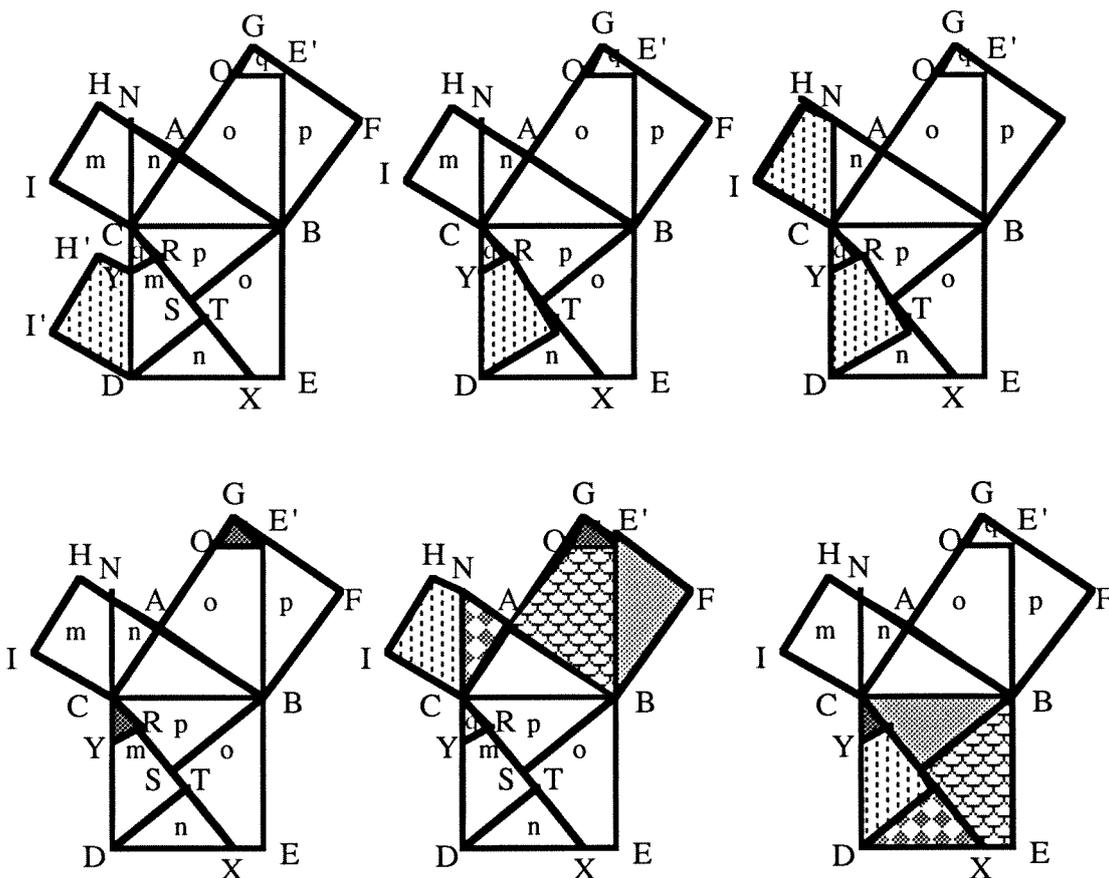
Tri. E'FB = tri. ABC car :  $\sphericalangle CAB = \sphericalangle E'FB$  (1 angle droit),  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle E'BF$  (côtés perpendiculaires) et  $CB = E'B$ .

Tri. NCB = tri. CDX car :  $CN = DX$  (hypothèse),  $\sphericalangle NCB = \sphericalangle CDX$  (1 angle droit) et  $BC = CD$ .

Alors on déduit que tri. CSB = tri. E'FB car :  $\sphericalangle SCB = \sphericalangle BE'F$ ,  $\sphericalangle CBS = \sphericalangle E'BF$ ,  $CB = BF$  et tri. DTX = tri. CNA car :  $\sphericalangle TDX = \sphericalangle NCA$ .

Dans la symétrie d'axe (CB) :  $E' \rightarrow E$  ( $BE' = CB = BE$ ),  $A \rightarrow S$  ( $BA = BS$  et  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CBS$ ) et à cause des angles droits  $O \rightarrow X$  d'où :  $AOE'B = SXEB$ .

Dans la translation de vecteur  $\vec{CD}$  :  $N \rightarrow Y$  (hypothèse  $CN = DY$ ) ; à cause de l'égalité des angles  $H'YDI'$  image de  $HNCI$  est symétrique de  $YRTD$  dans symétrie / (CD), donc  $HNCD = YRTD$ . Conséquence :  $XE = OE' = DE - DX$  et  $YC = DC - DY$  alors  $OE' = YC$ . Compte tenu de l'égalité des angles déjà montrée : tri. YRC = tri. OGE'.



Ansi donc pour réussir à faire cette reconfiguration il nous a fallu réaliser les suivantes modifications positionnelles pour chaque pièce :

- \* Pièce m : - une translation de vecteur  $\overrightarrow{CD}$   
- une symétrie d'axe (CD)
- \* Pièce n : - une translation de vecteur  $\overrightarrow{CD}$   
- une symétrie d'axe (DB)
- \* Pièce p : - une rotation de centre B  
- une symétrie d'axe (BC)
- \* Pièce o : - une symétrie d'axe (BC)
- \* Pièce q : - une translation de vecteur  $\overrightarrow{OA}$   
- une rotation de centre C

**Commentaire :**

La démonstration consiste en une reconfiguration qui est assez “sophistiquée”, comme dirait SCHONPENHAUER trop compliquée et inutile, même s'il n'y a pas d'obstacle apparent à surmonter.

Le fait d'avoir à découvrir le fractionnement de la figure en parties élémentaires, d'avoir sept tracés supplémentaires à effectuer, d'avoir un contour neutre pour cette opération et la multiplicité de modifications positionnelles, augmentent le degré de “complexité” et

diminuent le degré de "visibilité" de l'application de l'opération de reconfiguration intermédiaire.

Nous trouvons ce type de démonstration dans le livre : "Mathématiques 4ème". Collection Pythagore. Edition Hatier, 1988. Page 191.

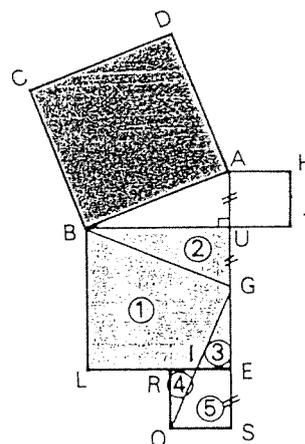
4

### LE PUZZLE DE PYTHAGORE

La reconstitution du carré ABCD à partir des 5 pièces du puzzle nécessite un peu d'attention.

#### a/ Le tracé

1. Tracer sur une feuille cartonnée, le triangle AUB, rectangle en U tel que  $UB = 6$  cm et  $UA = 2,5$  cm.
2. Tracer les carrés HAUT, BLEU et ABCD (voir la figure).
3. Tracer aussi le carré ROSE de mêmes dimensions que le carré HAUT.
4. Construire le point G symétrique de A par rapport à U.
5. Tracer enfin [BG] et [GO].



#### b/ Le puzzle

1. Découper les triangles BUG, ROI, GIE et les quadrilatères SOIE, BLIG.
2. A l'aide des 5 pièces du puzzle, recouvrir (reconstituer) le carré ABCD.

#### c/ L'épilogue

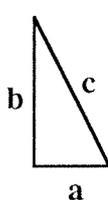
Recopier en complétant :

■ AUB est rectangle en U et aire (HAUT) + aire (...) = aire (...)  
 D'où ... +  $BU^2 = \dots$

### Troisième type : Démonstrations algébriques.

Exemple n°1 : Démonstration d'après GARFIELD (Président des Etats-Unis, assassiné en 1881).

The mathematical Magazine, 1882. Dans FOURREY, 1938, p. 95.



Démonstration à partir de 2 exemplaires d'un triangle rectangle et utilisation de formules.

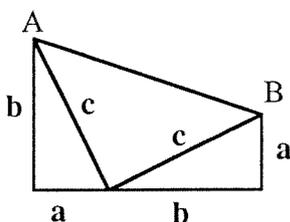


fig. GARFIELD

Aire du trapèze :

$$\frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{ab}{2}$$

( somme des aires des triangles )

$$\text{ou } \frac{a+b}{2} (a+b)$$

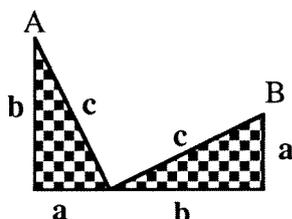
$$\text{D'où } a^2 + b^2 = c^2$$

### Analyse :

Avec deux exemplaires d'un triangle rectangle, disposés convenablement, plus un tracé supplémentaire, on forme la figure GARFIELD.

Cette démonstration est fondée sur deux types différents de reconfigurations de la figure, issues, à la fois, de deux types différents d'appréhension de la figure : l'une **analytique** et l'autre **globale**. L'appréhension analytique privilégie les différentes parties élémentaires, la figure est vue comme l'assemblage des trois triangles rectangles, l'aire de la figure est, alors, égale à la somme des aires des ses composantes (vieux principe chinois). L'appréhension globale privilégie la figure totale, extérieure, la figure est vue comme un trapèze de hauteur  $a + b$  et de bases  $a$  et  $b$ .

- Le regroupement pertinent des 2 triangles rectangles forme une sous-figure non-convexe. En effet, trouver la reconfiguration convenable des deux triangles, parmi celles qui sont possibles, n'est pas évident compte tenu de la non-convexité et de la non-contiguïté des parties élémentaires.



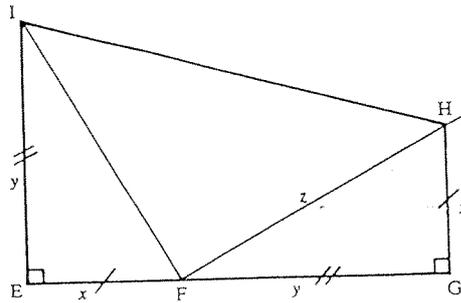
- Pour trouver la reconfiguration convenable, des deux triangles rectangles, il faut effectuer une modification positionnelle de la sous-figure clé : 1 rotation.
- Pour former la figure GARFIELD il faut un traitement auxiliaire sur la figure résultant du regroupement pertinent des deux triangles rectangles : il faut tracer le segment AB.
- Le fractionnement de la figure GARFIELD en parties élémentaires est donné au départ.
- Les caractéristiques du contour aident à l'application de l'opération de reconfiguration intermédiaire. En effet, pour former la figure GARFIELD, un simple regard sur la sous-figure résultante du regroupement pertinent, amène à tracer le segment AB pour fermer cette sous-figure et obtenir ainsi un trapèze.
- Il n'y a pas des dédoublements des parties élémentaires.
- Il n'y a pas des substitutions des parties élémentaires auxiliaires à celles auxquelles l'énoncé du problème réfère.

### Commentaire :

Une fois formée la figure GARFIELD, la démonstration est une reconfiguration assez "visible", sans aucun obstacle apparent. En plus cette démonstration s'appuie sur des formules : cela peut être un argument pédagogique pour qu'elle ne soit pas donnée dans tous les livres de mathématiques pour la classe de 4ème. Nous ne l'avons trouvée que dans le livre : "Mathématiques 4ème". IREM de Lorraine. Edition Didier, 1988. Page 31.

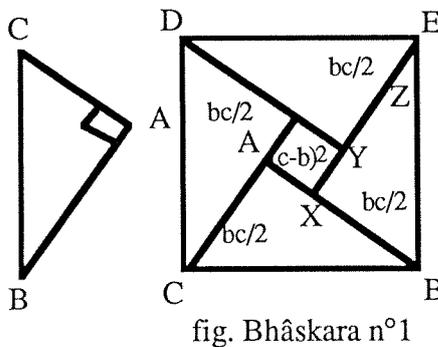
**Une autre démonstration du théorème de Pythagore**

- Montre que le triangle IFH est rectangle isocèle.
- Calcule l'aire du trapèze HGEI :
  - en utilisant la formule;
  - en considérant les aires des 3 triangles qui le composent.
 Quelle égalité en déduis-tu?
- De cette égalité, déduis que :
 
$$z^2 = x^2 + y^2.$$



**Exemple n°2 : Démonstration d'après BHÂSKARA (n°1)**

Vîja Ganita, XII<sup>ème</sup> siècle. Dans FOURREY, 1938, p. 82.



L'auteur Hindou juxtapose 4 triangles égaux à ABC, comme l'indique la figure ; leurs hypoténuses forment ainsi le carré CE de côté a et leurs longs côtés donnent le carré intérieur AY de côté c-b. Bhâskara se contente de dire "Voyez!".

**Analyse :**

Une fois que la figure Bhâskara (n°1) est formée, la démonstration est fondée sur deux types différents d'appréhension de la figure : l'une **analytique** et l'autre **globale**. L'appréhension analytique privilégie les différentes parties élémentaires, la figure est vue comme l'assemblage des 5 pièces : les 4 triangles rectangles et un petit carré de côté (c-b), l'aire de la figure est, alors, égale à la somme des aires de ses composantes. L'appréhension globale privilégie la figure totale, extérieure, la figure est vue comme un carré de côté a, son aire est alors  $a^2$ .

L'auteur admet implicitement la formule  $a^2 = (c-b)^2 + 4 bc / 2 = b^2 + c^2$

- Pour former la figure Bhâskara n°1, il faut effectuer 4 modifications positionnelles de la sous-figure clé : 1 translation et 3 rotations.
- Le fractionnement de la figure BHÂSKARA n°1 en parties élémentaires est donné au départ.
- Il n'y a pas de traitement auxiliaire à effectuer.
- Le regroupement pertinent des quatre triangles rectangles forme une sous-figure non-convexe.

- Les caractéristiques du contour aident à l'application de l'opération de reconfiguration intermédiaire. En effet, en étant non-convexe la sous-figure résultante du regroupement pertinent des quatre triangles rectangles, le regard jeté sur leur contour intérieur amène à y “voir” un petit carré, sous-figure essentielle de la démonstration.
- Pour visualiser la longueur du côté du petit carré  $AXYZ$ , il est nécessaire de surmonter l'obstacle du dédoublement des objets, car les segments qui forment les côtés de ce carré sont parties des segments qui forment les côtés des triangles :  $AX$  est partie de  $AB$ ,  $XY$  est partie de  $XE$ ,  $YZ$  est partie de  $YD$  et  $ZA$  est partie de  $ZC$ , mais comme la figure est un carré, le dédoublement d'un des segments suffit pour faire la démonstration.
- Il n'y a pas de substitutions de parties élémentaires auxiliaires.

**Commentaire :**

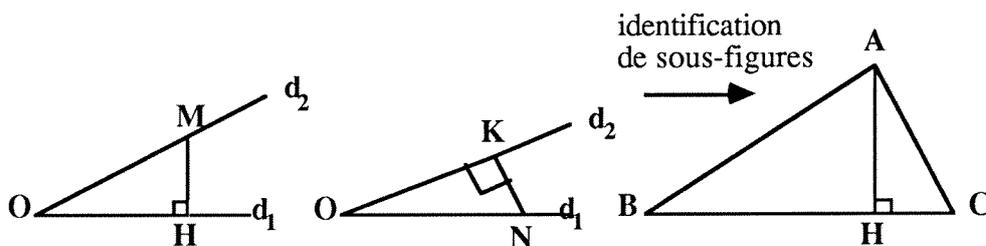
Une fois formé la figure Bhâskara (n°1), la démonstration est une reconfiguration intermédiaire assez “visible” et peu “complexe”.

Cette démonstration n'est pas toujours présente dans les exercices d'approche pour le théorème de Pythagore, dans les classes de 4ème, nous ne l'avons pas trouvé. La raison peut être due au fait que cette démonstration s'appuie sur un calcul.

**Exemple n°3 : Démonstration d'après BHÂSKARA (n°2).**

Vîja Ganita, XIIème siècle. Wallis. A. Treatise of Algebra. Oxford, 1685. Dans FOURREY, 1938, p. 90-91.

Symétrie du rapport de projection orthogonale.



$$\frac{OM}{OH} = \frac{ON}{OK}$$

$$\frac{BC}{BA} = \frac{BA}{BH}$$

d'où  $BA^2 = BH \cdot BC$

De même pour  $CA^2$

D'où  $BA^2 + CA^2 = (BH + CH) BC = BC^2$

### **Analyse :**

Bien que cette démonstration soit de type algébrique et qu'on utilise des longueurs et non des aires, elle demande deux reconfigurations différents de la figure base de la démonstration. Dans la première reconfiguration, les deux regroupements à comparer sont le triangle BAC et le triangle BHA. Dans la deuxième, on compare le triangle CAB et le triangle CHA.

- Chacune des reconfigurations exige le dédoublement de deux parties prises en même temps dans les deux regroupements à comparer. En effet, le triangle BHA est inclus dans le triangle BAC et le triangle CHA est inclus dans le triangle CAB. Ce facteur est un obstacle qui rend difficile l'opération de reconfiguration.

- Le fractionnement de la figure BHÂSKARA n°2 en parties élémentaires est donné au départ.

La figure ne demande pas de traitements auxiliaires à effectuer.

- Il n'y a pas de modifications positionnelles.

- Il n'y a pas de substitutions de parties élémentaires.

### **Commentaire :**

La démonstration n'est pas très "complexe", mais le fait d'avoir 2 fois le dédoublement d'une partie prise en même temps dans deux regroupements différents à comparer, diminue le degré de "visibilité" de l'application de l'opération de reconfiguration intermédiaire.

Cette démonstration n'est pas toujours présente dans les exercices d'approche pour le théorème de Pythagore, dans les classes de 4ème, nous ne l'avons pas trouvée.

### **Conclusion :**

Le problème d'une classification dépend du poids respectif accordé à chaque facteur.

Si on estime, par exemple, que l'introduction de tracés supplémentaires et leur nombre constituent un traitement figural plus complexe que le nombre de modifications positionnelles, alors la démonstration hindoue est plus complexe que celle de Liu Hui.

Si l'on estime que le dédoublement d'une sous-figure relève d'un traitement plus complexe que celui du contour de la figure, alors la démonstration d'Euclide est plus complexe que celle de Nassir-ed-Din et que celle de l'IREM de Strasbourg.

Si l'on estime que les modifications positionnelles des sous-figures et leur nombre constituent un traitement figural plus complexe que le nombre de tracés supplémentaires, alors la démonstration de Bhâskara 1 est plus complexe que celle de Garfield.

On peut donc faire différentes classifications des démonstrations du théorème de Pythagore en fonction des facteurs pris en compte. Ces classifications dépendent, d'une part, du coût du traitement associé aux variations de chaque facteur et, d'autre part, des objectifs de l'enseignement.

Des recherches expérimentales sur le coût cognitif propre à chacun de ces facteurs s'avèrent donc nécessaires pour une classification "cognitive" de ces différentes démonstrations.

Mais, indépendamment d'une évaluation "cognitive" du coût de traitement, la prise en compte de ces facteurs offre un outil d'analyse didactique précieux, car elle permet de préciser quel type d'apprentissage peut être fait pour l'apprentissage des traitements figuraux en mathématiques. Et elle permet de définir les variations de figures à introduire pour un tel apprentissage.

## BIBLIOGRAPHIE

- BARBIN E. ( 1989 ) Trois démonstrations pour un théorème élémentaire de géométrie. Sens de la démonstration et objet de la géométrie. Dans La Démonstration Mathématique dans l'Histoire, pp. 57-79. Commission Inter-IREM.
- BKOUICHE R. ( 1989 ) Quelques remarques sur la démonstration. (Autour de la philosophie de GONSETH). Dans La Démonstration Mathématique dans l'Histoire, pp. 115-127. Commission Inter-IREM.
- BONNEFOND G., DAVIAUD D., REVRANCHE B. (1988 ) Mathématiques 4ème. Collection Pythagore. Ed. Hatier.
- DUVAL R. ( 1983 ) L'obstacle du dédoublement des objets mathématiques. Educational Studies in Mathematics 4, pp. 385-414
- DUVAL R. ( 1988 a ) Ecart sémantiques et cohérence mathématique. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, I, pp, 7-25. IREM de Strasbourg.
- DUVAL R. (1988 b ) Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, I, pp, 57-74. IREM de Strasbourg.
- EUCLIDE Oeuvres complètes. Paris, Blanchard 1966
- FAUVERGUE I. ( 1988 ) Mathématique 4ème. Collection Mistral. Ed. Casteilla. Paris
- FOURREY E. ( 1938 ) Curiosités Géométriques. Paris, Librairie Vuibert
- FRIEDELMEYER J. P. ( 1990 ) Quadratures sans Intégrales ni Calculs. L'Ouvert. Journal de l'APMEP d'Alsace et de l'IREM de Strasbourg, pp. 1-9
- GERMAIN P. ( 1948 ) Les Grandes Lignes De L'Evolution Des Mathématiques. Dans Les Grands Courants De La Pensée Mathématique, pp. 226-241. Cahiers Du Sud
- GLAESER G. ( 1990 ) Analyse et Synthèse. Publication de l'A.P.M.E.P., N° 76
- GRENIER D. ( 1988 ) Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième. Thèse de Doctorat. Université Joseph Fourier, Grenoble.
- IREM de Strasbourg ( 1988 ) Mathématiques 4ème. Ed. Casteilla. Paris.
- IREM de Lorraine ( 1988 ) Mathématiques 4ème. Ed. Didier.
- KUCHEMANN D. ( 1981 ) Reflections and rotations. In K. M. HART (éd.) Children's understanding of mathematics : 11-16, pp. 137-157.
- LELOUARD M., MIRA C., NICOLLE J. M. ( 1989 ) Différentes formes de démonstrations dans les mathématiques grecques. Dans La Démonstration Mathématique dans l'Histoire, pp. 155-180. Commission Inter-IREM.
- MARTZLOFF J. C. ( 1978 ) La Chine. Dans Le Matin des Mathématiciens, pp. 107-122. Ed. Belin

- MARTZLOFF J. C. ( 1989 ) Quelques exemples de démonstrations en mathématiques chinoises. Dans La Démonstration Mathématique dans l'Histoire, pp. 131-153 .  
Commission Inter-IREM.
- MESQUITA A. ( 1989 ) Sur une situation d'éveil à la déduction en géométrie.  
Educational Studies in Mathematics 20, pp. 55-77
- MESQUITA A. ( 1989 ) L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie. Thèse de Doctorat. Université Louis Pasteur. Strasbourg
- PADILLA V. ( 1990 ) Les figures aident-elles à voir en géométrie ? Annales de Didactique et des Sciences Cognitives 3, pp. 223-252

**Auteur :**  
Virginia Padilla

**Titre :**  
Analyse cognitive de quelques démonstrations du théorème de Pythagore

**Editeur :**  
I.R.E.M. de Strasbourg (S.149)

**Mots clés :**  
Reconfiguration - Appréhension opératoire - Facteur de visibilité -  
Traitement auxiliaire - Figure de départ - Figure résultant d'un  
traitement figurale - Obstacle du dédoublement

**Résumé :**  
Le rôle intuitif d'une figure géométrique dépend de plusieurs facteurs. Ces facteurs peuvent jouer un rôle pour faciliter ou, au contraire, pour occulter l'appréhension opératoire conduisant à la solution du problème posé. Le fait que les élèves "voient" rapidement ou "ne voient pas" l'opération figurale suggérant un traitement mathématique pertinent, dépend de ces facteurs.

Dans le cas de la reconfiguration nous distinguerons sept facteurs qui jouent sur la "visibilité" et sur la "complexité" de cette appréhension opératoire.

La plupart de démonstrations du théorème de Pythagore correspondent à des mises en œuvre différentes de la reconfiguration. Car même celles qui sont considérées comme algébriques sont fondées sur l'application de l'opération de reconfiguration .

Les facteurs de visibilité et de complexité permettent donc d'analyser ces démonstrations, dans la mesure où elles traduisent une manière spécifique de mettre en œuvre la reconfiguration. L'intérêt d'une telle analyse est qu'elle permet de classer les démonstrations selon leur coût de traitement figural, et, donc, selon leurs difficultés éventuelles de "compréhension".