

LA QUADRATURE DE L'HYPERBOLE ET LES LOGARITHMES
--

Introduction

Dans le texte suivant je vais exposer la méthode de Grégoire de Saint Vincent pour effectuer la quadrature de l'hyperbole. Dans la première partie on trouve les idées de Grégoire formulées dans un langage moderne. Je n'ai pas donné de citations, parce que le livre de Grégoire est très rare (il existe un exemplaire à Strasbourg) et difficile à comprendre (le livre est écrit en latin et sans usage du symbolisme moderne). J'ai donné quelques indications historiques. Pour le contexte historique on peut consulter des livres sur l'histoire de l'analyse (par exemple EDWARDS 1982, VOLKERT 1988, ou PEIFFER-DAHAN DALMEDICO 1986). J'espère que la méthode de Grégoire est praticable à l'école ayant l'avantage d'être plus intuitive et plus convaincante que les méthodes en usage aujourd'hui. Dans la deuxième partie de mon texte je vais démontrer les propriétés les plus importantes de la fonction logarithme en essayant d'être aussi intuitif que possible.

I. PARTIE

1. En principe, il y a deux possibilités pour l'introduction de la fonction logarithme : on peut commencer par la fonction exponentielle et définir la fonction logarithme comme la fonction inverse de la fonction exponentielle. Je ne parlerai pas ici de cette possibilité.

On peut commencer aussi par la fonction logarithme et définir la fonction exponentielle comme fonction inverse de la fonction logarithme. La fonction logarithme elle-même est obtenue par une intégration : elle est la fonction primitive de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ (géométriquement parlant c'est l'hyperbole). C'est une idée qui est bien située historiquement :

“Le principe fondamental est le suivant : la source adéquate de l'introduction des fonctions nouvelles est la quadrature des courbes connues. Cette manière convient d'une part, comme j'ai démontré, aux faits historiques, d'autre part aux procédés dans les mathématiques supérieures”.

KLEIN, 1924, 168

Je vais citer un livre d'école allemand (classe 12 $\equiv$ classe terminale) pour faire voir la réalité scolaire de cette possibilité (WÖRLE/KRATZ/KEIL, 1981 ; 265-269). On définit la

fonction $L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ et on observe les propriétés suivantes :

1) $L(x)$ est l'aire sous l'hyperbole entre les bornes 1 et x par conséquent on a $L(1) = 0$

2) $L'(x) = \frac{1}{x}$ (Conséquence directe de la définition et du théorème fondamental de l'analyse).

3) $L'(ax) = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$

C'est-à-dire que les fonctions $L(ax)$ et $L(x)$ ont la même fonction dérivée. D'où s'ensuit qu'il existe une constante C avec $L(ax) + C = L(x)$ (c'est une conséquence du théorème des accroissements finis). Pour $x = 1$ on a : $L(a) + C = L(1) = 0$

$$C = -L(a)$$

c'est-à-dire

$$L(ax) - L(a) = L(x)$$

Pour $x = b$ on obtient l'équation caractéristique :

$$L(ab) = L(a) + L(b)$$

- 4) On a $L(a^n) = L(a \cdot \dots \cdot a) = L(a) + \dots + L(a) = n \cdot L(a)$, d'où s'ensuit
 $q \cdot L(a^{p/q}) = L(a^{p/q \cdot q}) = L(a^p) = pL(a)$
 ou $L(a^{p/q}) = \frac{p}{q} L(a)$.

Il faut postuler la dernière égalité pour tout $r \in \mathbb{R}$:

$$L(x^r) = r \cdot L(x)$$

3) et 4) sont les propriétés caractéristiques de la fonction logarithme (je vais les discuter dans la deuxième partie de mon texte). Le miracle est parfait : un jeu avec des symboles mène à un résultat étonnant. Les élèves ne sont pas convaincus par cette démonstration : parce qu'elle ne donne aucune idée intuitive.

2. Je veux esquisser maintenant une alternative. L'idée derrière cette alternative est simple : à un certain moment dans l'histoire des mathématiques, quelqu'un a trouvé le fait que les aires sous l'hyperbole sont données par des logarithmes dans leur définition originelle, celle de Neper, qui a longtemps été la seule utilisée.

Par exemple voici la définition donnée par d'Alembert dans l'Encyclopédie.

“Logarithme : nombre d'une progression arithmétique, lequel répond à un autre nombre dans une progression géométrique.

Pour faire comprendre la nature des logarithmes, d'une manière bien claire et bien distincte, prenons les deux espèces de progression qui ont donné naissance à ces nombres ; savoir, la progression géométrique, et la progression arithmétique ; supposons donc que les termes de l'une soient directement posés sous les termes de l'autre ; comme on le voit dans l'exemple suivant :

1	2	4	8	16	32	64	128
0	1	2	3	4	5	6	7

en ce cas, les nombres de la progression inférieure qui est arithmétique sont ce que l'on

appelle les logarithmes des termes de la progression géométrique qui est au-dessus, c'est-à-dire que 0 est le logarithme de 1, 1 est le logarithme de 2, 2 est le logarithme de 4, et ainsi de suite. Ces logarithmes ont été inventés pour rendre le calcul expéditif, comme on le verra plus bas"

Comment est-on passé de cette idée des logarithmes à celle donnée aujourd'hui sous forme de primitive de $\frac{1}{x}$? Il y a là une hypothèse sous-jacente, à savoir : La situation de ce mathématicien est comparable à la situation où se trouvent nos élèves aujourd'hui. La manière dans laquelle on a attaqué (et résolu) un problème dans l'histoire est souvent la manière la plus intuitive et la plus concrète.

Ce passage a été réalisé par un mathématicien appelé Grégoire de Saint Vincent (ou Gregorius a San Vincento), un jésuite belge qui a vécu de 1584 jusqu'à 1667. (Pour la vie de Grégoire on peut consulter : Dictionary of Scientific Biography, volume XII ; 74-76 par J.E. HOFMANN ou BOSMANS, 1911/13. Pour la bibliographie des écrits sur Grégoire il faut comparer VAN LOOY, 1980).

Grégoire est presque oublié aujourd'hui, mais il était un savant bien connu à son époque. Il a écrit un très grand livre : *l'Opus Geometricum* (paru à Anvers en 1647, mais écrit dans les années 20). Ce livre, qui est composé de 1250 pages contient une méthode d'exhaustion nouvelle et beaucoup de résultats intéressants sur les coniques. (Pour l'*Opus Geometricum* on peut consulter KÄSTNER, 1796-1800 (Bd-III), BOPP, 1907 et HOFMANN, 1941).

La nouvelle méthode était appliquée par Grégoire à des problèmes sur les aires des coniques (on y trouve un livre sur le cercle (Liv III), sur la parabole (IV), sur l'Ellipse (V) et sur l'hyperbole (VI).)

Elle est oubliée maintenant (je suppose qu'il n'y a plus personne aujourd'hui qui connaît le contenu de l'*Opus*. C'est un vrai devoir pour un historien des maths.¹

Mais le livre de Grégoire contient aussi un livre dix : "*De ipsa circuli quadratura*". Dans ce livre, on trouve une quadrature (fausse bien entendu) du cercle seulement à l'aide de la règle et du compas. Cette présentation grégorienne était fortement critiquée (par exemple par Huygens qui a écrit un livre fameux - son chef d'œuvre en maths - sur la quadrature des coniques, par Fermat, Descartes et d'autres). Il y avait aussi une critique de Mersenne

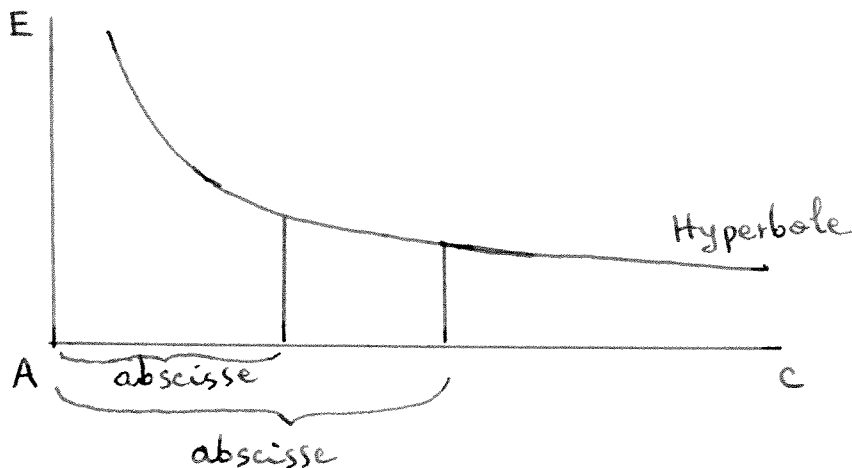
¹ En passant je veux remarquer que Leibniz a étudié les idées de Grégoire. Elles étaient une des sources de son calcul infinitésimal.

dans ses “Réflexions physico-mathématiques” (tome III, 1647). Là Mersenne proposera imprudemment l’idée suivante : pour résoudre la quadrature du cercle il suffit d’achever la construction suivante :

“Connaissant trois grandeurs quelconques, rationnelles ou irrationnelles et le logarithme de deux d’entre elles, en déduire le logarithme de la troisième”.

Ce problème, qui n’est pas du tout équivalent à la quadrature du cercle (construction à la règle et au compas), étaient résolu deux ans après par un ami de Grégoire : Alfons Antoine de Sarasa (1618-1667) dans son “*Solutio. problematis a R.P. Marino Mersenno Minimo Propositi*” (paru à Anvers en 1649.)¹ On n’est pas sûr du rôle de Grégoire à propos de cet ouvrage : Sarasa était un prêtre bien connu (jésuite comme Grégoire et Cavalieri), mais un mathématicien médiocre. On ne peut pas exclure la possibilité que Grégoire lui-même était l’auteur de la réponse à Mersenne. Dans l’ouvrage de Sarasa on trouve une formulation qui constate explicitement un lien entre les aires sous l’hyperbole et les logarithmes. Bien entendu, ce lien se trouve aussi dans l’Opus, mais il n’est pas explicite ; Grégoire ne parle jamais des logarithmes !.

3. Maintenant je veux esquisser la quadrature de l’hyperbole chez Grégoire. L’hyperbole était définie chez les anciens (par exemple chez Apollonius) comme une conique, c’est-à-dire comme intersection d’un plan et d’un cône (double). C’était une définition géométrique et synthétique qui n’était pas du tout commode pour des calculs (souvenez vous de la quadrature de la parabole par Archimède !). Il est très intéressant que Grégoire use d’une sorte de coordonnées (dans les années vingt - “La Géométrie” de Descartes est parue en 1637) : étant donné une hyperbole (équilatère), il considère ses asymptotes. Les abscisses (vient de “*abscindere*” qui signifie “couper”) sont les morceaux d’une de ces asymptotes, qui sont limitées par des parallèles à l’autre asymptote



¹(Pour la personne de Sarasa, on peut consulter la Biographie nationale Belge (article par Bosmans), son ouvrage est décrit dans Kästner, 1796-1800 (Bd.3)).

C'est un système de coordonnées canonique qui dépend de la courbe. Maintenant Grégoire peut caractériser l'hyperbole par une propriété analytique :

Pour tous les points sur l'hyperbole le produit de l'abscisse et de l'ordonnée (il parle de la parallèle) est constant (par exemple égal à 1).

L'inverse est vrai aussi :

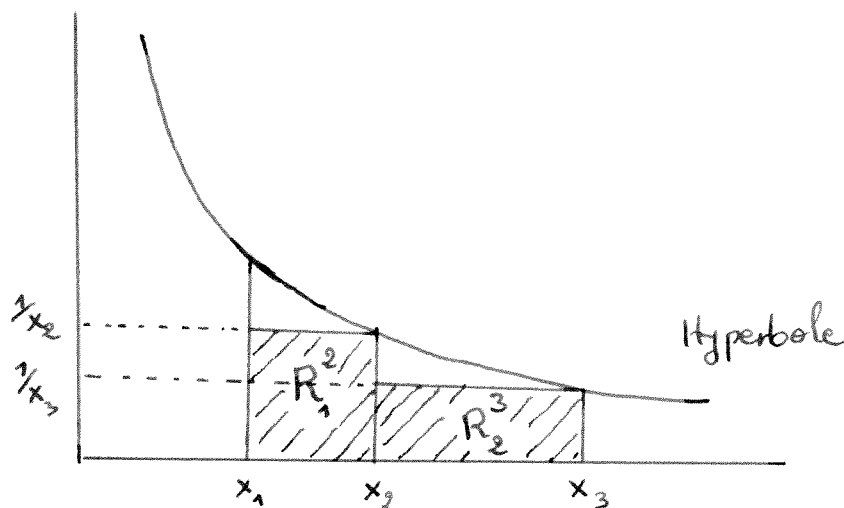
Si deux points sont tels que le produit des abscisses et des ordonnées donne toujours le même nombre, ces deux points se trouvent sur une hyperbole.:

(Grégoire parle des rectangles qui sont formés par les abscisses et les ordonnées).

Intuitivement parlant, Grégoire a trouvé la propriété suivante : si on augmente l'abscisse d'un point sur l'hyperbole, on diminue son ordonnée dans la même mesure ! Dans notre langage moderne, Grégoire a découvert la caractérisation de l'hyperbole $h(x)$ par une équation fonctionnelle. Pour tous les x et y , on a

$$xh(x) = y h(y) (= 1)$$

Une conséquence immédiate de cette idée est la proposition suivante : Soient x_1, x_2 et x_3 trois abscisses et R_1^2, R_2^3 les rectangles qui sont formés par les ordonnées et les abscisses des points sur l'hyperbole correspondants à ces abscisses.



$$\text{On a } R_1^2 = (x_2 - x_1) \cdot \frac{1}{x_2} = 1 - \frac{x_1}{x_2} \quad R_2^3 = (x_3 - x_2) \cdot \frac{1}{x_3} = 1 - \frac{x_2}{x_3}$$

Les aires des rectangles R_1^2 et R_2^3 sont égales, si et seulement si les fractions $\frac{x_1}{x_2}$ et $\frac{x_2}{x_3}$ sont égales, c'est-à-dire si et seulement si les trois abscisses x_1 , x_2 et x_3 forment une progression géométrique.

4. Maintenant nous avons trouvé la clé pour la quadrature de l'hyperbole. C'est l'exhaustion par des suites géométriques. Considérons les rectangles curvilignes

$$A_{x_1}^{x_2} \text{ et } A_{x_2}^{x_3}$$

limités par des abscisses x_1 et x_2 ou x_1 et x_3 , leurs ordonnées et la courbe. Un coup d'œil nous mène à la conjecture suivante. On a

$$A_{x_1}^{x_2} = A_{x_2}^{x_3}$$

si et seulement si x_1 , x_2 et x_3 sont en progression géométrique.

Cette hypothèse est le contenu des propositions 109 et 130 du dixième livre de l'*Opus Geometricum*. Ici nous nous occupons seulement de l'énoncé. "*Quand les abscisses croissent en progression géométrique, les aires croissent en progression arithmétique*" (Prop. 109)

Démonstration :

Il suffit de considérer deux aires. Le reste se fait par induction. Soient x_1 , x_2 et x_3 trois abscisses en progression géométrique, et soient

$$A_{x_1}^{x_2} \text{ et } A_{x_2}^{x_3}$$

les rectangles curvilignes. Nous avons vu plus haut, qu'on a dans cette situation l'égalité $R_1^2 = R_2^2$. Entre x_1 et x_2 nous intercalons la moyenne géométrique $\sqrt{x_1 x_2}$, entre x_2 et x_3

nous intercalerons la moyenne géométrique $\sqrt{x_2 x_3}$. Les quatre rectangles qu'on obtient ainsi sont tous égaux. Maintenant on peut itérer ce processus. Nous construisons ainsi une exhaustion des deux aires cherchées par des rectangles aux contenus égaux. Par conséquent les aires cherchées sont égales.

D'où s'ensuit que l'aire $A_{x_1}^{x_3}$ est égale à $2 A_{x_1}^{x_2}$ C.Q.F.D.

Commentaires :

1° On peut généraliser ce théorème facilement de la manière suivante :

Si on a $\frac{x_1}{x_2} = \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^K$, on a aussi :

$$A_{x_1}^{x_2} = k . A_{x_2}^{x_3}$$

2° D'un point de vue moderne, il faut mentionner qu'on suppose dans la démonstration donnée en haut l'existence des limites. Mais le reste de l'argument donné en haut est très simple ; parce qu'on a deux suites qui sont identiques aussi (une suite convergente ne peut avoir qu'une seule limite).

5. Mais quelque chose qui transforme des suites géométriques dans des suites arithmétiques, est (du point de vue des anciens) un logarithme. Sarasa dit : (dans la proposition 10) : *"Donc ces aires peuvent servir de logarithme"*. Pour comprendre mieux cet argument, il faut se rappeler la définition des logarithmes usitée par les anciens et donnée au début.

L'idée de définir les logarithmes comme des exposants ne se trouve pas avant Euler. C'était lui qui l'a donné dans le paragraphe 102 de son célèbre - *Introductio in analysin infinitorum* - (1748).

D'un point de vue moderne il paraît souhaitable de caractériser les logarithmes par l'équation fonctionnelle

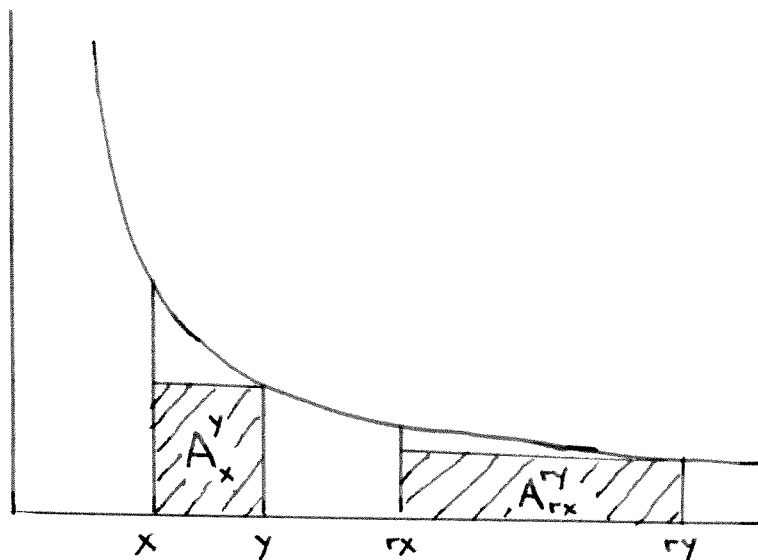
$L(xy) = L(x) + L(y)$

(pour le développement des équations fonctionnelles comparez DHOMBRES, 1986). On ne trouve pas de telles considérations ni chez Grégoire ni chez Sarasa (la présentation de cette histoire qu'on trouve chez EDWARDS, 1982 ; 154-158 et chez VOLKERT, 1988 ; 78-81 est une reconstitution moderne). La raison en est simplement qu'on ne s'intéressait pas à cette équation à l'époque de Grégoire. Mais on peut déduire facilement l'équation désirée à l'aide des outils grégoriens.

6. Il faut établir d'abord un lemme.

Lemme : Soient x, y deux abscisses et x un nombre réel plus grand que ou égal à 1. Alors on a :

$$A_{rx}^{ry} = A_x^y$$



Démonstration :

Nous commençons l'exhaustion de l'aire A_x^y par le rectangle indiqué au-dessus. Son aire est $(y-x) \frac{1}{y} = 1 - \frac{x}{y}$. L'exhaustion de $A_{rx}^{ry} = A_x^y$ est commencée par le rectangle indiqué avec l'aire $(ry-rx) \frac{1}{ry} = 1 - \frac{x}{y}$.

Les aires des deux rectangles sont égales. Maintenant on insère les moyennes géométriques entre x et y et entre rx et ry . Ainsi nous trouvons quatre rectangles égaux. Et ainsi de suite.

7. Maintenant nous pouvons démontrer l'équation caractéristique de la fonction logarithmique. Soit $L(x)$ la fonction A_1^x (c'est-à-dire l'aire sous l'hyperbole entre 1 et x).

Nous calculons $L(xy)$:

$$L(xy) \stackrel{(1)}{=} A_1^{xy} \stackrel{(2)}{=} A_1^x + A_1^{xy} \stackrel{(3)}{=} A_1^x + A_1^y \stackrel{(4)}{=} L(x) + L(y) \quad (1) \text{ par définition, } (2)$$

additivité des aires, (3) par notre lemme).

Indiquons en passant que Jean Dhombres a donné une autre manière d'arriver à l'équation caractéristique (DHOMBRES, 1986, 144/145), qui est plus élégante, mais aussi moins intuitive.

Soient donnés x et y . On a

$$A_x^{\sqrt{xy}} = A_{\sqrt{xy}}^y \quad \text{ou} \quad A_1^{\sqrt{xy}} - A_1^x = A_1^y - A_1^{\sqrt{xy}} \quad \text{d'où s'ensuit} \quad A_1^{\sqrt{xy}} = \frac{1}{2} (A_1^y + A_1^x)$$

En particulier, on obtient pour $x = 1$, $y = x$ l'égalité

$$\boxed{A_1^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} A_1^x}$$

(x) étant un nombre réel quelconque plus grand que ou égal à 1).

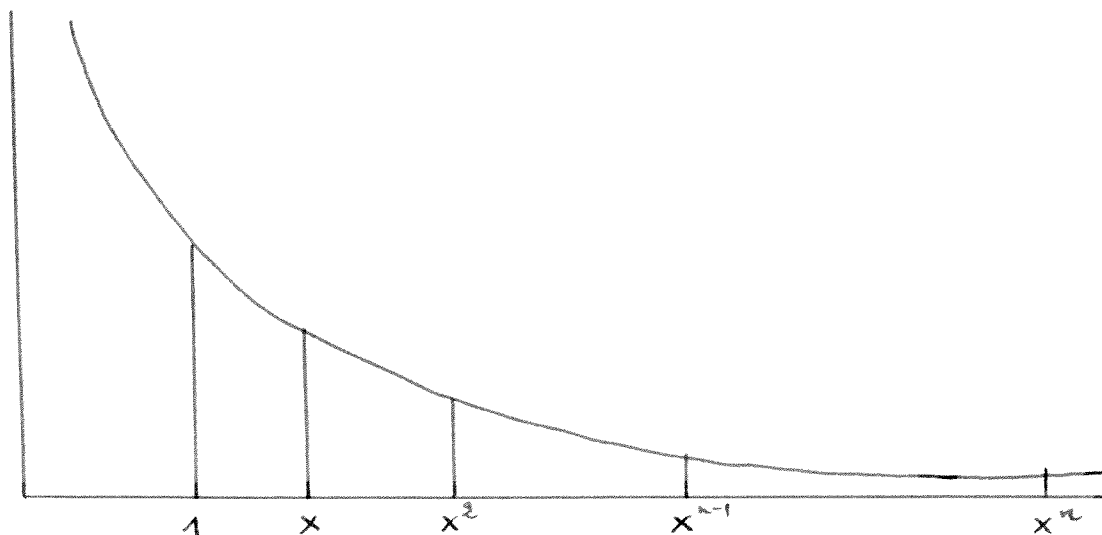
Il suit que $A_1^x + A_1^y = 2 A_1^{\sqrt{xy}} = A_1^{xy}$ C.Q.F.D.

8. Une conséquence immédiate de l'équation caractéristique est la formule

$$L(x^n) = n \cdot L(x) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Si on veut, on peut démontrer cette équation aussi d'une manière plus géométrique.

Comparez la figure suivante :



On a

$$\begin{aligned} L(x^n) &\stackrel{(1)}{=} A_1^{x^n} \stackrel{(2)}{=} A_1^x + A_x^{x^2} + \dots + A_{x^{n-1}}^{x^n} \\ &\stackrel{(3)}{=} A_1^x + A_1^x + \dots + A_1^x = n \cdot A_1^x \stackrel{(4)}{=} n \cdot L(x) \end{aligned}$$

((1) par définition, (2) additivité des aires, (3) par le lemme) C Q.F.D.

Les suites géométriques sont vraiment un outil universel dans le cas de l'hyperbole !
 La généralisation au cas des exposants négatifs n'est pas difficile ; il suffit d'adapter toutes les considérations données à l'intervalle]0,1].

On peut généraliser cette formule au cas des exposants rationnels : soient p et q des nombres entiers. Alors on a :

$$L\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{p}{q} L(x)$$

Démonstration :

$$q \cdot L\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = L\left(x^{q \cdot \frac{p}{q}}\right) = L\left(x^p\right) = p \cdot L(x) \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Maintenant il faut postuler la validité de la formule en haut pour tous les exposants réels.

9. Nous avons vu que la fonction $L(x) = A_1^x$ est caractéristique des propriétés suivantes :

$$L(xy) = L(x) + L(y)$$

$$L(x^\pi) = \pi L(x)$$

Une telle fonction est appelée une fonction logarithme. Si les élèves connaissent les logarithmes comme opération inverse de l'exponentiation, on peut démontrer que la nouvelle fonction logarithme $L(x)$ est en effet une fonction logarithme dans le vieux sens de ce mot (voir n° 2). Dans la deuxième partie de cet exposé je veux étudier quelques propriétés de la fonction $L(x)$.

II PARTIE

10. On peut déduire immédiatement de la définition de la fonction L :

$L(1) = 0$, $L(x) > 0$ si $x > 1$ et L est une fonction strictement monotone croissante.

11. On a $L\left(\frac{x}{y}\right) = L(x) - L(y)$.

C'est un corollaire de l'équation $L(xy) = L(x) + L(y)$:

$$L(x) = A_1^x = A_1^{\frac{x}{y} \cdot y} = A_1^y + A_1^{\frac{x}{y}} = L(y) + L\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{C.Q.F.D.}$$

12. L'équivalence des nouveaux logarithmes et des vieux logarithmes est démontrée de la manière suivante :

Supposition : Soient x et β deux nombres réels et positifs. Alors il existe un nombre réel α avec : $x = \beta^\alpha$

Le nombre α est appelé "logarithme de x dans la base β " et noté $\log_\beta x$. On a l'équation suivante : $x = \beta^{\log_\beta x}$

Nous appliquons la fonction L à cette équation :

$$L(x) = L(\beta^{\log_\beta x}) = (\log_\beta x) \cdot L(\beta)$$

c'est-à-dire que la nouvelle fonction à gauche et la vieille fonction $\log_\beta x$ ne se distinguent que par la valeur constante $L(\beta)$. Il semble très naturel de chercher un nombre β_0 tel qu'on a l'équation simple $L(x) = \log_{\beta_0} x$.

C'est le cas si et seulement si $L(\beta_0) = 1$. On sait qu'un tel nombre β_0 existe, parce que la fonction L prend la valeur 1 (L est continue - nous allons démontrer ça tout de suite ; L croissante strictement monotone et L n'est pas bornée supérieurement). Nous allons calculer le nombre β_0 dans le numéro **15**.

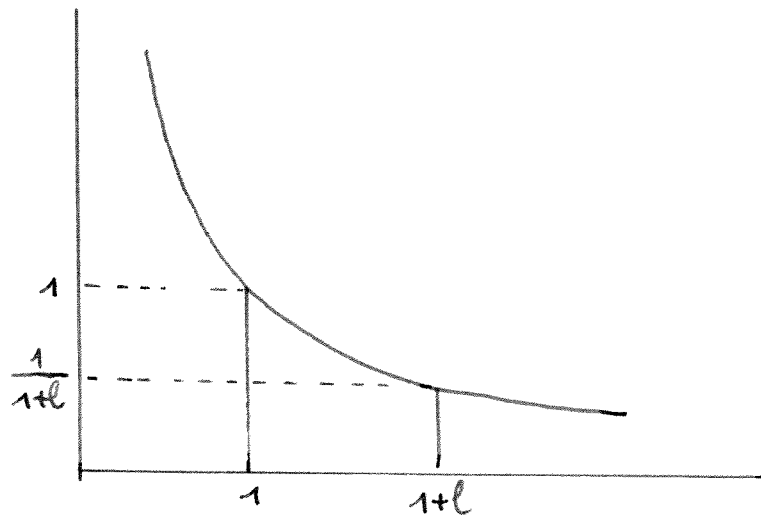
13. La fonction L est différentiable et on a $L'(x) = \frac{1}{x}$. C'est une conséquence immédiate du théorème fondamental de l'analyse, mais on peut démontrer cette proposition aussi d'une manière plus directe).

On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow 0} \frac{L(x + k) - L(x)}{k} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} L\left(1 + \frac{k}{x}\right) \\
&= (1) \lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{x}{k} L\left(1 + \frac{k}{x}\right) \right) \\
&= \left(\frac{1}{x}\right) \lim_{\ell \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ell} L(1 + \ell) \right) \\
&= \left(\frac{1}{x}\right) \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{L(1 + \ell) - L(1)}{\ell} \\
&\quad * \text{ On a posé } \ell = \frac{k}{x}
\end{aligned}$$

On constate : L est différentiable en x si et seulement si L est différentiable en 1.

Pour démontrer la différentiabilité de la fonction L pour x = 1 nous usons de la figure suivante :



D'où s'ensuit :

$$\ell \cdot \frac{1}{1+\ell} \leq A_1^{1+\ell} \leq \ell \quad \text{ou} \quad \frac{1}{1+\ell} \leq \frac{L(1+\ell) - L(1)}{\ell} \leq 1$$

Pour $\ell \rightarrow 0$ on obtient :

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{1}{1+\ell} \leq \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{L(1+\ell) - L(1)}{\ell} \leq 1$$

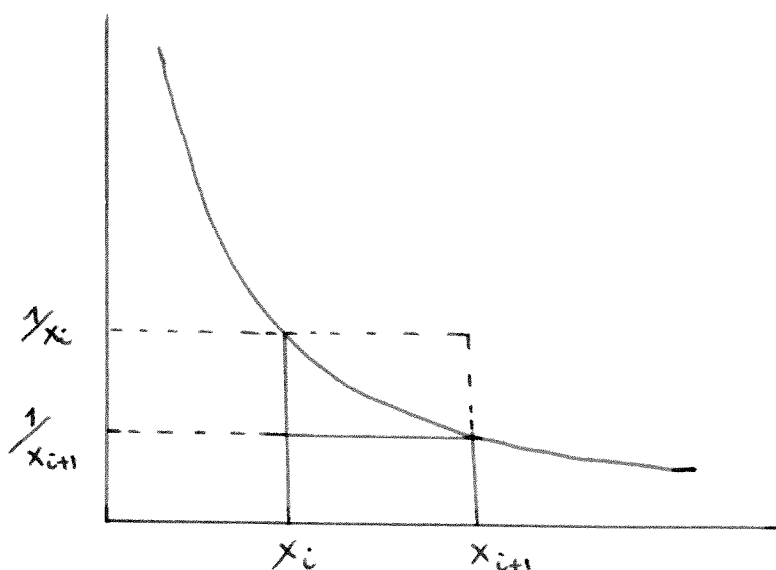
ou

$$1 = \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{L(1+\ell) - L(1)}{\ell} = L'(1)$$

(Il existe ici une petite difficulté, parce que nous n'avons usé que des valeurs plus grandes ou égales à 1 pour les variables x, y etc... C'est-à-dire que nous avons démontré seulement la différentiabilité à la droite en 1. Mais il est assez simple de compléter notre argument.)

Résultat : on a $L'(x) = \frac{1}{x}$

14. Nous voulons déduire maintenant une formule pour le calcul des valeurs de la fonction L . Nous partons de la généralisation suivante de la figure plus haut :



On a :

$$\frac{1}{x_{i+1}} (x_{i+1} - x_i) \leq A_{x_i}^{x_{i+1}} \leq \frac{1}{x_i} (x_{i+1} - x_i)$$

ou

$$1 - \frac{x_i}{x_{i+1}} \leq A_{x_i}^{x_{i+1}} \leq \frac{x_{i+1}}{x_i} - 1$$

Soit x le point dont la valeur est à calculer. Nous usons d'une suite géométrique pour subdiviser l'intervalle $[1, x]$: $x_i = \sqrt[n]{x^i}$ ($i = 1, \dots, n$).

Les x_i forment une suite géométrique parce qu'on a :

$$\frac{x_i}{x_{i+1}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \quad (i = 1, \dots, n - 1)$$

D'autre part on obtient de la définition de la fonction L :

$$A_{x_i}^{x_{i+1}} = L(x_i) \leq \frac{x_{i+1}}{x_i} - 1$$

Nous obtenons ainsi un système d'inégalités :

$$1 - \frac{x_i}{x_{i+1}} \leq L(x_{i+1}) - L(x_i) \leq \frac{x_{i+1}}{x_i} - 1$$

ou

$$1 - \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \leq L(x_{i+1}) - L(x_i) \leq \sqrt[n]{x} - 1 \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

La somme de toutes ces inégalités est :

$$n \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \right) \leq L(x) - L(1) \leq n (\sqrt[n]{x} - 1)$$

Maintenant il faut vérifier trois choses :

- $n \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \right)$ croissante strictement monotone en n ;
- $n (\sqrt[n]{x} - 1)$ décroissante strictement monotone en n et
- leur différence est une suite qui tend vers zéro.

Ce sont des conséquences du fait que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1$$

Remarque pratique :

On choisit pour n une puissance de 2, parce qu'on peut ainsi utiliser la touche " $\sqrt[n]{}$ " sur la calculatrice de poche. Si on prend $n = 2^{10}$ et si x est un nombre de l'intervalle $[1, 10]$, on obtient les valeurs de $L(x)$ avec une erreur plus petite que 0,0052.

15. Pour terminer nous voulons déterminer la valeur de β_0 . Nous partons de l'équation :

$$H'(x) = \frac{1}{x} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{x}{k} L \left(1 + \frac{k}{x} \right)$$

Pour $k \rightarrow 0$ nous choisissons la suite $\frac{x}{n}$ (avec x constant), qui tend vers zéro si n tend vers l'infini. On obtient ainsi :

$$\frac{1}{x} = L'(x) = \frac{1}{x} \lim_{n \rightarrow \infty} L \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)$$

D'où s'ensuit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right) = 1$$

Parce que la fonction L est continue et strictement monotone (et a fortiori injective), on a aussi

$$L\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = 1$$

c'est-à-dire que la valeur cherchée β_0 est la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Nous avons trouvé que β_0 est le fameux nombre d'Euler, qui est symbolisé par e