La méthode de double fausse position

à partir du point de vue de Moritz Cantor sur les travaux de Léonard de Pise,

commentaires et applications

SARROUY - Lycée Franco-Allemand - Fribourg

Dans la première partie, le texte de la colonne de gauche, est extrait du commentaire fait par Moritz Cantor ("Vorlesungen über Geschichte der Mathematik" 1892 - 1908) du Liber Abaci de Léonard de Pise dit Fibonacci (vers 1180 - 1250) qui composa cet ouvrage vers 1202 alors qu'il revenait d'un voyage au Proche Orient, en Grèce et en Sicile. Le texte de la colonne de droite contient, lui, une adaptation de celui de Moritz Cantor ainsi que des commentaires et des compléments.

Der dreizehnte Abschnitt ist der Regel des doppelten falschen Ansatzes gewidmet, welche Leonardo, wie der Name *Regula elchatayn* verräth, von Arabern erlernt hat (...).
Ein Beispiel ist folgendes : 100 Rotuli kosten 13 libras zu 20 solidi zu 12 denarii, was kostet 1 Rotulus?
Eine erste Annahme setzt 3 solidi für den Rotulus, für 100 also 300 solidi = 15 librae oder 2 zu viel.

Eine zweite Annahme setzt 2 solidi für den Rotulus, für 100 also 200 solidi = 10 librae oder 3 zu wenig.

Die Fehler addirt, zeigen durch 2 + 3 = 5 eine Abnahme des Gesamtpreises um 5 librae, während der Preise eines Rotulus um 1 solidus = 12 denarii abnahm. Nun sollte aber der Gesamtpreis nur um 2 librae abnehmen, man muß also 12 mit 2 multipliciren und durch 5 dividiren, um $4\frac{4}{5}$ denarios zu erhalten, welche, von 3 solidis abgezogen, den richtigen Preis 2 solidi $7\frac{1}{5}$ denarii kennen lernen.

Le treizième paragraphe est consacré à la règle de la méthode de double fausse position que Fibonacci a apprise des Arabes comme le nom de *Regula elchatayn* l'indique.
En voici un exemple : 100 rotuli coûtent 13 livres à 20 sous la livre à 12 deniers le sou, combien coûte 1 rotulus?
On suppose en premier lieu qu'un rotulus coûte 3 sous.
Dans ce cas, on en aurait 100 pour 300 sous, soit 15 livres, ce qui représente 2 livres de trop.
Dans un second temps on suppose qu'un rotulus coûte 2 sous.
Les 100 rotulus reviennent à 200 sous, soit 15 livres c'est dire que cette fois, il en manque 3 .
Les deux erreurs ajoutées, 2 + 3 = 5, donnent une diminution du prix total de 5 livres tandis que le prix d'un rotulus a diminué de 1 sou, soit 12 deniers. Pour que le prix total ne diminue que de 2 livres, il faut multiplier 12 par 2 et diviser par 5 ,on obtient 4 deniers et $\frac{4}{5}$ qui, soustraits des 3 sous donnent le prix exact de 2 sous 7 deniers et $\frac{1}{5}$.

Le raisonnement serait plus facile à suivre s'il ne s'y mêlait pas une question d'unités qui ne nous est pas familière.
On pourrait dire que 100 rotuli coûtent 13 x 20 x 12 , soit 3 120 deniers, combien coûte 1 rotulus?
On suppose qu'un rotulus coûte 3 x 12, soit 36 deniers. Les 100 reviendraient alors à 3 600 deniers, donc à 480 deniers de trop.
Si on suppose qu'un rotulus coûte 2 x 12, soit 24 deniers, les 100 reviennent à 2 400 deniers, donc il en manque 720 .
La somme des résultats erronés est de 1 200, elle correspond à une diminution du prix d'un rotulus de 12 deniers.
Pour que le prix total ne diminue que de 480 deniers, il faut faire une règle de trois : multiplier 12 par 480 et diviser par 1 200 . On obtient les 4,8 deniers trouvés précédemment.

Leonardo erläutert die Rechnung an einem Diagramme :

Additum ex multiplicationibus
13

4		9
soldi		soldi
2		3
minus		plus
3		2

5
additum ex erroribus

(...) Liniengrössen (...) dienen zur Erläuterung des Verfahrens.

Sei ab die wahre Länge der unbekannten Zahl. Setzt man irgend ein ag statt ihrer, so kommt eine Zahl als Endergebniss, welche um ez kleiner ist als die, welche herauskommen soll.

Setzt man eine zweite angenommenene Zahl ad statt der Unbekannten, so erscheint wieder ein fehlerhaftes Ergebniss, welches um iz zu klein ist. Nun kennt man sowohl die Differenz gd der beiden Annahmen, als die ei der beiden Fehler und ist im Stande, den Ueberschuss db, um welchen die unbekannte Zahl die zweite Annahme ad übertrifft, aus der Proportion $ei : iz = gb : db$ zu berechnen.
Hat man nämlich $\alpha x = b$ und $\alpha n_1 = b - e_1$, $\alpha n_2 = b - e_2$, so berechnet sich (...) $x = \dfrac{e_1 n_2 - e_2 n_1}{e_1 - e_2}$.
In der Figur entspricht $ag = n_1$, $ad = n_2$, $ez = e_1$, $iz = e_2$, $ci = e_1 - e_2$, $gd = n_1 - n_2$, $db = x - n_2$. Die obige Proportion geht

Correspondance entre les notations

Points :

a	A
g	G
d	D
b	B
e	E
i	I
z	Z

Hypothèses :

n_1	h_1
n_2	h_2

Résultats :

e_1	r_1
e_2	r_2

Fibonacci explique le calcul à l'aide du diagramme :

Somme des produits
13

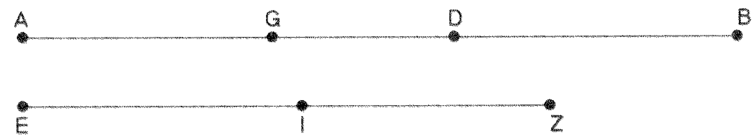
4		9
sous		sous
2		3
moins		plus
3		2

5
somme des erreurs

Les deux hypothèses conduisent à des résultats inexacts par excès :

Les longueurs des segments sont en rapport avec les grandeurs qui entrent en jeu.

Soit AB la valeur exacte cherchée. Prenons à sa place une valeur (connue) AG. Ceci conduit à une valeur du résultat final, mais cette dernière est trop petite. Il lui manque EZ pour être égale à ce qu'on devrait trouver.



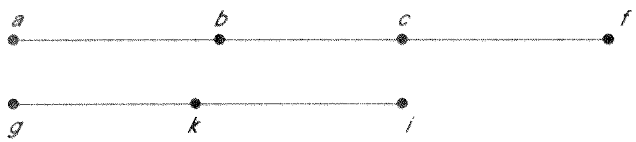
Si l'on remplace l'inconnue par AD, on obtient de nouveau un résultat inexact : il lui manque IZ.
On connaît maintenant non seulement la différence GD des deux hypothèses, mais aussi celle EI des deux résultats erronés et on est en mesure, à l'aide de l'égalité $\dfrac{EI}{IZ} = \dfrac{GD}{DB}$, de calculer DB, c'est-à-dire de calculer de combien l'inconnue dépasse la seconde hypothèse.
En effet si $\alpha x = b$ et $\alpha h_1 = b - r_1$, $\alpha h_2 = b - r_2$, alors $x = \dfrac{r_1 h_2 - r_2 h_1}{r_1 - r_2}$.
Sur le schéma on a $AG = h_1$, $AD = h_2$, $EZ = r_1$, $IZ = r_2$, $CI = r_1 - r_2$, $GD = h_1 - h_2$, $DB = x - h_2$. L'égalité des rapports ci-

also über in $(e_1 - e_2) : e_1 = (n_2 - n_1) : (x - n_2)$, und daraus

$$x = n_2 + \frac{e_2(n_2 - n_1)}{e_1 - e_2} = \frac{e_1 n_2 - e_2 n_1}{e_1 - e_2} .$$

Leonardo führt auch die in lezterer Gleichung sich darstellende Vorschrift ausdrücklich aus : man solle den ersten Fehler mit dem zweiten Ansatze, den zweiten Fehler mit dem ersten Ansatze multipliciren, lezteres Product vom ersteren abziehen und die Differenz durch die Differenz der Fehler dividieren.

Wieder an einer Figur wird der Fall des doppelten falschen Ansatzes erörtert, in welchem beide Annahmen zu gross gewählt wurden, mithin $\alpha n_1 = b + e_1$, $\alpha n_2 = b + e_2$ beide zu gross ausfielen.



Es sei (...) ab die richtige Länge der Unbekannten, af und ac die erste beziehungsweise zweite Annahme, denen gi und gk als erster und zweiter Fehler gegenübersteht, oder es sei $af = n_1$, $ac = n_2$,

Correspondance entre les notations

Hypothèses :

n_1	h_1
n_2	h_2

Résultats :

e_1	r_1
e_2	r_2

Points :

a	A
b	B
c	C
f	F
g	G
k	K
i	I

dessus donne : $\dfrac{r_1 - r_2}{r_2} = \dfrac{h_2 - h_1}{x - h_2}$, d'où l'on tire

$$x = h_2 + \frac{r_2(h_2 - h_1)}{r_1 - r_2} = \frac{r_1 h_2 - r_2 h_1}{r_1 - r_2} .$$

Fibonacci énonce la règle découlant de la dernière égalité : multiplier d'une part le premier résultat (inexact) par la deuxième hypothèse et d'autre part le second résultat par la première hypothèse, retrancher ce dernier produit du premier et diviser par la différence des résultats.

Justification :

De $\alpha h_1 = b - r_1$ et $\alpha h_2 = b - r_2$, on tire $r_1 = b - \alpha h_1$ et $r_2 = b - \alpha h_2$, puis

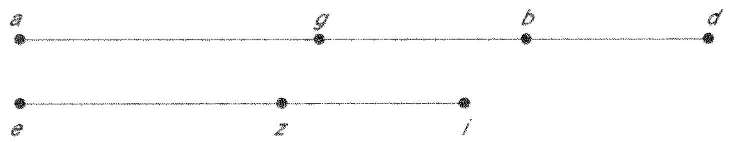
$$\frac{r_1 h_2 - r_2 h_1}{r_1 - r_2} = \frac{(b - \alpha h_1) h_2 - (b - \alpha h_2) h_1}{b - \alpha h_1 - b + \alpha h_2} = \frac{b h_2 - b h_1}{\alpha h_2 - \alpha h_1} = \frac{b}{\alpha} = x .$$

<u>Les deux hypothèses conduisent à des résultats inexacts par défaut</u> :

Ce cas est de nouveau traité à l'aide d'un schéma.
Ici $\alpha h_1 = b + r_1$, $\alpha h_2 = b + r_2$.

Soit AB la valeur exacte cherchée, respectivement AF et AC la première et la seconde hypothèse et GI et GK les résultats respectivement obtenus à partir de celles-ci, ou encore, soit $h_1 = AF$, $h_2 = AC$, $r_1 = GI$,

$gi = e_1$, $gk = e_2$, $ki = e_1 - e_2$, $cf = n_1 - n_2$, $bc = n_2 - x$. Dann soll die Proportion stattfinden $ik : kg = cf : cb$. Anders geschrieben heisst sie $(e_1 - e_2) : e_2 = (n_1 - n_2) : (n_2 - x)$ und aus ihr folgt $x = n_2 - \frac{e_2(n_1 - n_2)}{e_1 - e_2} = \frac{e_1 n_2 - e_2 n_1}{e_1 - e_2}$, welches wiederum vollständig richtig ist und durch die Vorschrift bestätigt wird, man solle von dem Producte des esrten Fehlers in dem zweiten Ansatz das Product des zweiten Fehlers in dem ersten Ansatz abziehen und die Differenz durch denUnterschied der Fehler theilen.



Endlich versinnlicht ein drittes Linienpaar den allein übrigen Fall, dass (...) eine Annahme ag zu gross war, und dass dem entsprechend zuerst ein Mangel ez, dann Ueberschuss zi auftrat. Hier ist die Proportion zu bilden $gd : bg = ci : ez$ oder in den anderen wiederholt von uns benutzen Buchstaben $(n_2 - n_1) : (x - n_1) = (e_1 + e_2) : e_1$, woraus die richtige Folgerung zu ziehen ist $x = n_1 + \frac{e_2(n_2 - n_1)}{e_1 + e_2}$

$$= \frac{e_1 n_2 + e_2 n_1}{e_1 + e_2}.$$

So hat Leonardo die Regel des doppelten falschen Ansatzes genau erörtert und sämmtliche Möglichkeiten derselben erschöpft. Darauf werden mannigfache Aufgaben behandelt, welche bereits im vorhergehenden Abschnitte zur Uebung der dortigen Regeln dienten; nächst diesen aber auch andere neue Aufgaben. Wir wollen nur des ersten Beispieles der letzteren Art gedenken.

Correspondance entre les notations

Hypothèses :

n_1	h_1
n_2	h_2

Résultats :

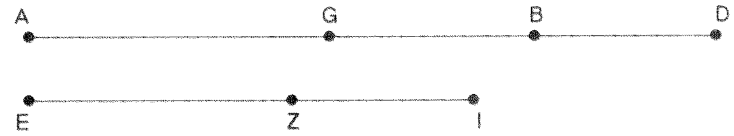
e_1	r_1
e_2	r_2

Points :

a	A
g	G
b	B
d	D
e	E
i	I
z	Z

$r_2 = GK$ et $KI = r_1 - r_2$, $CF = h_1 - h_2$, $BC = h_2 - x$. On doit avoir dans ce cas l'égalité $\frac{IK}{KG} = \frac{CF}{CB}$ en d'autres termes $\frac{r_1 - r_2}{r_2} = \frac{h_1 - h_2}{h_2 - x}$ dont on déduit $x = r_2 - \frac{r_2(h_1 - h_2)}{r_1 - r_2} = \frac{r_1 h_2 - r_2 h_1}{r_1 - r_2}$ qui est de nouveau exact, d'où la règle : retrancher le produit du premier résultat par la deuxième hypothèse du produit du second résultat par la première hypothèse et diviser cette différence par celle des résultats.

<u>Les deux hypothèses conduisent à des résultats inexacts, l'un par défaut, l'autre par excès:</u>



L'hypothèse AG conduit en premier lieu à un résultat auquel il manque EZ tandis que partant de AD, on obtient un résultat excédent de ZI la valeur exacte AB. La proportion à utiliser ici est $\frac{GD}{BG} = \frac{EI}{EZ}$ ou avec les mêmes notations $\frac{h_2 - h_1}{x - h_1} = \frac{r_1 + r_2}{r_1}$, dont on déduit $x = h_1 + \frac{r_1(h_2 - h_1)}{r_1 + r_2}$

$$= \frac{r_1 h_2 + r_2 h_1}{r_1 + r_2}.$$

Fibonacci a ainsi discuté avec précision les règles de la méthode de double fausse position et traité de façon exhaustive tous les cas. Des problèmes variés qui servaient déjà dans le paragraphe mentionné ci-dessus à mettre en pratique les règles énoncées sont ensuite étudiés. Juste après cependant on en trouve de nouveaux. Nous n'en retiendrons que le premier exemple du dernier cas.

A und B bezeichnen uns, wie schon öfter, zwei Personen und zugleich deren Vermögen.

Man besitze darüber die beiden Angaben $A + \frac{1}{3} B = 14$, $B + \frac{1}{4} A = 17$.

Eine erste Annahme $A = n_1 = 4$ giebt $4 + \frac{1}{3} B = 14$, $B = 30$,

$B + \frac{1}{4} A = 30 + 1 = 31$, während 17 kommen sollten, das ist ein Ueberschuss $e_1 = 31 - 17 = 14$.

Die zweite Annahme $A = n_2 = 8$ giebt $8 + \frac{1}{3} B = 14$, $B = 18$,

$B + \frac{1}{4} A = 18 + 2 = 20$, während wieder 17 kommen sollten, das ist abermals ein Ueberschuss $e_2 = 20 - 17 = 3$.

Da Leonardo für den ersten Fall, welcher bei zweimaligen Ueberschuss hier zutritt, die Proportion $(e_1 - e_2) : e_2 = (n_2 - n_1) : (A - n_2)$ angegeben hat, so wäre es vollkommen genügend, wenn er nur die Zahlenwerthe einsetzend $(14 - 3) : 3 = (8 - 4) : (A - 8)$ oder $11 : 3 = 4 : (A - 8)$ hätte rechnen lassen. Aber es ist, als wenn er schon Ueberdruss empfunden hätte, seinen Lesern durch gewohnheitsmässige Uebung eines und desselben Verfahrens das Denken zu ersparen. Nach Angabe der beiden Fehler 14 und 3, welche die Annahme 4 und 8 zur Folge haben, fährt er nämlich das weitere Verfahren begründend, also fort: Für 4 Einheiten, welche wir dem Ersten A mehr geben (8 anstatt 4), näherte sich die zweite Zahl B um 11 der Wahrheit (3 anstatt 14), und es ist nur noch eine Annäherung an dieselbe um 3 erforderlich. Mithin ist 3 mal 4 getheilt durch 11 dem A noch beizufügen, das beträgt $1\frac{1}{11}$. Von $9\frac{1}{11}$ bis zu 14 sind es aber $4\frac{10}{11}$, und das ist ein Drittel des Vermögens des B, welches mithin $14\frac{8}{11}$ beträgt.

Correspondance entre les notations

Hypothèses :

n_1	h_1
n_2	h_2

Résultats :

e_1	r_1
e_2	r_2

Etude d'un exemple :

Désignons par A et B deux personnes ainsi que leurs fortunes respectives.

On suppose que l'on a $A + \frac{1}{3} B = 14$, $B + \frac{1}{4} A = 17$.

Une première hypothèse $A = h_1 = 4$ donne $4 + \frac{1}{3} B = 14$, $B = 30$,

$B + \frac{1}{4} A = 30 + 1 = 31$, alors qu'on devrait trouver 17, c'est donc un excès de $r_1 = 31 - 17 = 14$.

Une seconde hypothèse $A = h_2 = 8$ donne $8 + \frac{1}{3} B = 14$, $B = 18$,

$B + \frac{1}{4} A = 18 + 2 = 20$, au lieu des 17 escomptés, on a donc encore un excès $r_2 = 20 - 17 = 3$.

Fibonacci ayant donné l'égalité $\frac{r_1 - r_2}{r_2} = \frac{h_2 - h_1}{A - h_2}$ pour le premier cas, celui où comme ici, on se trouve en présence de deux hypothèses conduisant à des résultats faux par excès, il aurait été tout à fait suffisant de se contenter de substituer aux lettres les valeurs numériques: $\frac{14 - 3}{3} = \frac{8 - 4}{A - 8}$ ou $\frac{11}{3} = \frac{4}{A - 8}$. Mais il semble qu'il en ait assez d'épargner à ses lecteurs la peine de réfléchir en utilisant toujours la même méthode. Connaissant les deux résultats faux 14 et 3 déduits des hypothèses 4 et 8, il poursuit en établissant la règle suivante : pour 4 unités de trop pour la première valeur de A (8 au lieu de 4), B s'approche de 11 de la valeur exacte (3 au lieu de 14) et seule une augmentation de 3 est nécessaire.

On doit donc encore ajouter à A 3 fois 4 divisé par 1 c'est-à-dire 1 et $\frac{1}{11}$. Mais de 9 et $\frac{1}{11}$ à 14 il y a 4 et $\frac{10}{11}$ et ceci représente le tiers de la fortune de B qui se monte donc à 14 et $\frac{8}{11}$.

Chargement d'une péniche [1]

"Une péniche contient 80 tonnes de blé dans sa cale de gauche et 54 tonnes dans sa cale de droite. Il reste 122 tonnes à charger.
Comment les répartir pour que les charges soient équilibrées?"

Supposons dans un premier temps que l'on mette 60 tonnes de blé dans la cale de gauche.
Elle en contiendrait alors 80 + 60 = 140 tonnes.
Les charges étant équilibrées, la cale de droite en contiendrait autant et comme elle en contenait déjà 54 , elle aurait été chargée de 140 - 54 = 86 tonnes.
La charge qu'il aurait fallu mettre dans la péniche serait donc de 60 + 86 = 146 tonnes, soit 24 de trop.

Supposons maintenant que l'on mette 50 tonnes de blé dans la cale de gauche.
Elle en contiendrait 80 + 50 = 130 tonnes.
Les charges étant équilibrées, la cale de droite en contiendrait aussi 130 tonnes et comme elle en contenait déjà 54 , elle aurait été chargée de 130 - 54 = 76 tonnes.
La charge qu'il aurait fallu mettre dans la péniche serait finalement de 50 + 76 = 126 tonnes, soit 4 de trop.

Différence des produits
960

1 200 tonnes		240 tonnes
50		60
plus		plus
4		24

20
différence des erreurs

960 : 20 = 48 donne la réponse : on doit mettre 48 tonnes de blé dans la cale de gauche et 122 - 48 = 74 tonnes dans celle de droite.
Les charges sont alors de 80 + 48 = 128 tonnes dans la cale de gauche et de 54 + 74 = 128 tonnes dans celle de droite.

[1] L'énoncé de cet exercice est le numéro 73 page 82 de "Mathématiques 4 ème " par P. Terracher, G. Vinrich, R. Delord et B. Privat. Hachette 1988.

Soit x le nombre de tonnes de blé qu'on doit mettre dans la cale de gauche pour que les charges soient équilibrées.

$h_1 = 60$.

$r_1 = 24$.

$h_2 = 50$.

$r_2 = 4$.

On utilise la formule de la page 4 :

$$x = \frac{r_1 h_2 - r_2 h_1}{r_1 - r_2} = \frac{24 \times 50 - 4 \times 60}{24 - 4} = \frac{960}{20} = 48 .$$

Calcul d'une moyenne (2)

Une voiture parcourt 100 km à 120 km . h^{-1} puis 100 km à 80 km . h^{-1}.
A quelle vitesse moyenne a-t-elle parcouru les 200 km?

N.B. Par commodité et sauf indication contraire, les durées seront exprimées en minutes.

Calcul du temps mis pour parcourir les cent premiers kilomètres :

Si la voiture avait mis 60 minutes, elle aurait parcouru 120 km, c'est 20 de plus qu'elle n'a fait.
Si par ailleurs elle avait mis 45 minutes, elle aurait parcouru 90 km, donc 10 de moins.

Somme des produits
1 500

1 200 minutes | 240 minutes
60 | 45
plus | moins
20 | 10

30
somme des erreurs

Ainsi, la voiture a mis 50 minutes pour parcourir les 100 premiers kilomètres.

Soit t ce temps.

$h_1 = 60$ et $r_1 = 20$.
$h_2 = 45$ et $r_2 = 10$.

On utilise la seconde formule de la page 5 :

$$t = \frac{r_1 h_2 + r_2 h_1}{r_1 + r_2} = \frac{20 \times 45 + 10 \times 60}{20 + 10} = \frac{1\,500}{30} = 50.$$

Calcul du temps mis pour parcourir les cent kilomètres suivants :

Si la voiture avait mis 45 minutes, elle aurait parcouru 60 km, c'est 40 de moins qu'elle n'a fait.
Et si elle avait mis 60 minutes, elle aurait parcouru 80 km, soit 20 de moins.

Différence des produits
1 500

2 400 minutes | 900 minutes
60 | 45
moins | moins
20 | 40

20
différence des erreurs

La voiture a donc mis 75 minutes pour parcourir les 100 kilomètres suivants.

Soit t' ce temps.

$h'_1 = 45$ et $r'_1 = 40$.
$h'_2 = 60$ et $r'_2 = 20$.

On utilise la première formule de la page 5 :

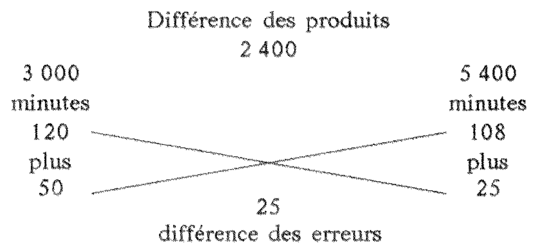
$$t' = \frac{r'_1 h'_2 - r'_2 h'_1}{r'_1 - r'_2} = \frac{40 \times 60 - 20 \times 45}{40 - 20} = \frac{1\,500}{20} = 75.$$

(2) L'idée de cet exercice et ses données numériques sont tirées de l'article "Plusieurs moyens de moyenner" paru dans le numéro 6 de la revue Tangente.

Calcul de la moyenne :

Si la moyenne avait été de 120 km . h^{-1}, en 125 minutes soit 2 heures et 5 minutes, elle aurait fait 250 kilomètres. Elle n'en a fait que 200 , c'est donc 50 de trop.

Si la moyenne avait été de 108 km . h^{-1}, en 125 minutes soit 2 heures et 5 minutes, elle aurait fait 225 kilomètres. Elle n'en a fait que 200 , c'est donc 25 de trop.



La moyenne cherchée est donc 2 400 divisé par 25 soit 96 km . h^{-1} .

Soit m cette moyenne.

$H_1 = 120$.
$R_1 = 50$.

$H_2 = 108$.
$R_2 = 25$.

On utilise la formule de la page 4 :

$$m = \frac{R_1 H_2 - R_2 H_1}{R_1 - R_2} = \frac{50 \times 108 - 25 \times 120}{50 - 25} = \frac{2\,400}{25} = 96 .$$

Tell mother's age. Problem by Sam Loyd (3)

" Quel est l'âge de maman?

Les problèmes d'âge sont souvent intéressants et fascinent toujours les jeunes qui ont quelque talent mathématique. Ils sont généralement très simples mais dans celui-ci les données sont si maigres et la question si inattendue que le problème est assez étonnant.

L'une des trois personnes représentées avait son anniversaire ce jour-là. La curiosité de Tommy en fut éveillée et il voulut savoir les âges de ses parents. Son père lui répondit :

"Voilà : nos trois âges additionnés donnent juste 70 ans. Je suis maintenant six fois plus vieux que toi et quand je ne serai plus que deux fois plus âgé que toi, nos trois âges feront un total double de ce qu'il est à présent. Peux-tu me dire quel est l'âge de maman?"

Tommy qui était fort en arithmétique résolut le problème rapidement, mais il faut dire qu'il connaissait son propre âge et aussi l'âge approximatif de ses parents. Nos chercheurs n'ont, eux, que les maigres données concernant les âges relatifs. Ils doivent cependant pouvoir répondre à la question "Quel est l'âge de maman?" "

Mise en équation :

Soit respectivement p , m , e et x les âges du père, de la mère, de l'enfant et le temps séparant les deux étapes.

(3) Cet exercice est le numéro 79 page 81 du livre "Casse-tête mathématiques de Sam Loyd" par M. Gardner. Dunod

Le jour de l'anniversaire, on a : $m + p + e = 70$
$p = 6e$.
Plus tard, on aura : $(m + x) + (p + x) + (e + x) = 2 \times 70$
$p + x = 2(e + x)$.
On tire d'une part en retranchant la première ligne de la troisième : $3x = 70$ d'où $x = 280$ mois,
et d'autre part en développant la quatrième ligne : $p = 2e + x$.
Ce sont ces deux égalités qui nous serviront à résoudre la question.

Supposons tout d'abord que l'enfant ait 6 ans (ou 72 mois). Le père serait âgé de $6 \times 72 = 432$ mois.
Le temps les séparant de la seconde date envisagée serait dans ce cas de $432 - 2 \times 72 = 288$ mois ou 8 de trop.

Si on suppose que l'enfant a 5 ans (ou 60 mois), le père a $6 \times 60 = 360$ mois.
Le temps x vaudrait ici $360 - 2 \times 60 = 240$ mois, c'est dire qu'il en manque 40.

Somme des produits
3 360

2 880 mois — 480 mois
72 — 60
plus — moins
8 — 40

48
somme des erreurs

L'enfant a donc $3\,360 : 48 = 70$ mois, soit encore 5 ans et 10 mois.

Le père a, lui, 6 fois cet âge, soit exactement 35 ans.
La somme des âges du père et de son fils est de 40 ans et 10 mois, d'où l'âge de la mère : 29 ans et 2 mois.

$h_1 = 72$.
$r_1 = 8$.

$h_2 = 60$.
$r_2 = 40$.

On utilise la deuxième formule de la page 5 :

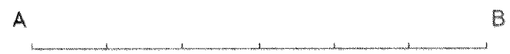
$$e = \frac{r_1 h_2 + r_2 h_1}{r_1 + r_2} = \frac{8 \times 60 + 40 \times 72}{40 + 8} = \frac{3\,360}{48} = 70\,.$$

<u>Détermination du barycentre de deux points</u> :

A et B sont des points distincts. La question est ici de déterminer le barycentre G du système $\{(A, -3), (B, 8)\}$ sachant que AB mesure 6 centimètres.

On sait que G est aussi le barycentre du système $\left\{\left(A, -\frac{3}{5}\right), \left(B, \frac{8}{5}\right)\right\}$.

Supposons en premier lieu que G soit en A. G serait dans ce cas le barycentre de $\{(A, 1), (B, 0)\}$ et il manque-



On s'arrange ainsi pour que la somme des coefficients soit égale à 1.
$h_1 = \overline{AA} = 0$.

rait $\frac{8}{5}$ au coefficient de B.

Si G était en B, il serait le barycentre du système $\{(A, 0), (B, 1)\}$ et il manquerait $\frac{3}{5}$ au coefficient de B.

Différence des produits

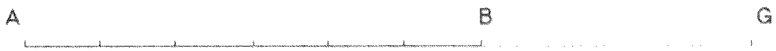
$\frac{8}{5}\ \overline{AB}$

0		$\frac{8}{5}\ \overline{AB}$
0 moins $\frac{8}{5}$		$\overline{AB}$ moins $\frac{3}{5}$

1

différence des erreurs

Le barycentre cherché est le point G tel que $\overline{AG} = \frac{8}{5}\ \overline{AB}$.



On vérifiera facilement qu'on peut tenir le même raisonnement quels que soient les coefficients.

$r_1 = \frac{8}{5}$.

$h_2 = \overline{AB} = 6$ et $r_2 = \frac{3}{5}$.

On utilise la première formule de la page 5 :

$$\overline{AG} = \frac{r_1 h_2 - r_2 h_1}{r_1 - r_2} = \frac{\frac{8}{5} \times \overline{AB} - \frac{3}{5} \times 0}{\frac{8}{5} - \frac{3}{5}}$$

$$= \frac{8}{5}\ \overline{AB} = \frac{8}{5} \times 6 = 9{,}6 \text{ cm}.$$