METHODES DE FAUSSE POSITION

(Aperçu sur quelques exemples)

Marc WOLF

L.E.G.T. Koeberlé - Sélestat

PRINCIPE :

Trouvez la solution comme le hasard vous conduit,
Par bonheur à la vérité vous pouvez accéder,
D'abord procédez à la question,
Bien qu'aucune vérité n'y soit contenue.

Une telle fausseté est une si bonne base,
Que la vérité sera vite trouvée.

De beaucoup, enlevez beaucoup,
De trop peu, prenez aussi trop peu.
A l'excédent, joignez encore le trop peu,
Et à trop peu, ajoutez trop simplement.
En croix, multipliez les types contraires,
Pour que toute le vérité,
A partir de la fausseté, soit trouvée.

RECORDE : Le fondement de l'art (vers 1540)
(Mathématiques au fil des âges/Gauthier-Villars)

Simple : il suffisait d'y penser!

Dans le cas fort improbable où ces explications, aussi lumineuses que poétiques ne suffiraient pas, les exemples qui suivent pourraient apporter quelques précisions.

I LE PAPYRUS DE RHIND (Problème 24)

(Méthode de fausse position simple)

PROBLEME :

En ajoutant une quantité à son septième, on obtient 19.

RESOLUTION :

Prenons le nombre 7.
Ajoutons-lui son septième : on obtient 8
(au lieu de 19 souhaité).
Divisons 19 par 8.
Multiplions le résultat de cette division par 7 :
on obtient le nombre cherché.

FORMALISATION DU PROBLEME :

Il s'agit de résoudre : $x + \frac{1}{7}x = 19$

C'est un problème du type : $ax = b$

La méthode consiste à choisir une valeur $x' = 7$ (pour la facilité du calcul), puis à calculer $b' = ax' = 8$

Le rapport $\frac{b}{b'}$ sera égal à $\frac{ax}{ax'}$ donc à $\frac{x}{x'}$ c'est à dire $\frac{19}{8}$

Le produit de x' par 19/8 sera égal à x.

COMMENTAIRE :

La méthode de résolution fait appel à une suite d'opérations simples ne nécessitant aucun formalisme : le coéfficient "a" par exemple, est complètement occulté, il n'est pas nécessaire de le connaître.

PRECISIONS HISTORIQUES :

Le papyrus de Rhind date de 1700 ou 1550 avant J-C.
Les Egyptiens connaissaient les entiers naturels,
la fraction 2/3
et les quantièmes (fractions de numérateur 1).

Les multiplications et divisions ne se faisaient quasiment que par duplication (multiplication ou division par une puissance de 2).

A la lumière de ces précisions, on réalise que les calculs précédemment décrits nécessitent une surprenante gymnastique :

$x' = 7$
$x' \times 1/7 = 1$ $\qquad 7 + 1 = 8$

$19 = 16 + 2 + 1$ (décomposition en puissances de 2)
$\quad = 8 \times 2 + 8 \times 1/4 + 8 \times 1/8$
$19/8 = 2 + 1/4 + 1/8$

$7 = 4 + 2 + 1$
d'où : $(4 + 2 + 1)(2 + 1/4 + 1/8) = 16 + 1/2 + 1/8.$

II LA METHODE DE DOUBLE FAUSSE POSITION (Interprétation géométrique)

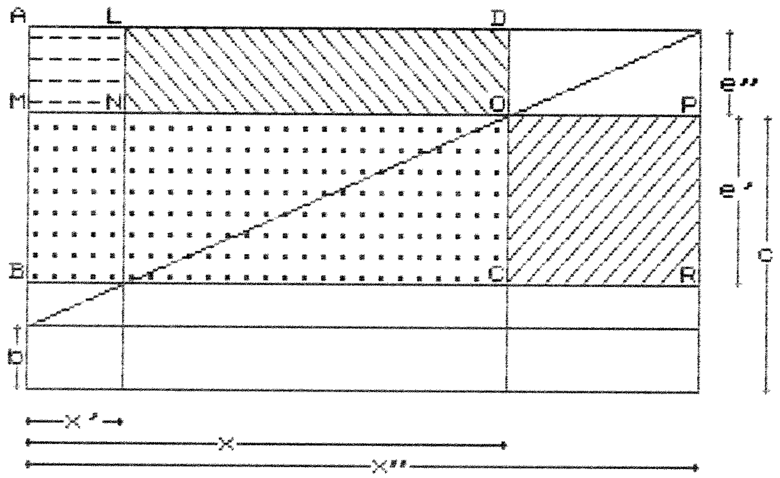
Comme nous le verrons dans l'exemple du paragraphe III, la méthode de fausse position simple précédemment décrite n'est pas toujours valable.

Lorsque le problème est du type : $ax + b = c$, avec $b > c$, il est impossible de réduire les termes constants car les nombres négatifs sont inconnus.

Cette lacune est très certainement une des raisons d'être de la méthode de double fausse position, qui trouve une justification géométrique dans le cas suivant :

Le problème est du type : $ax + b = c$

On choisit deux valeurs x' et x'' respectivement plus petite et plus grande que x pour commettre les erreurs respectives e' et e''.



La proposition XLIII du livre premier des Eléments d'Euclide nous apprend que les rectangles (LNOD) et (OCRP) ont même aire.

Aire (MBRP) = $x''e'$
Aire (AMNL) = $x'e''$
Aire (ABCD) = $x(e' + e'')$
Aire (ABCD) = Aire (AMNL) + Aire (MBCO) + Aire (LNOD)
= Aire (AMNL) + Aire (MBCO) + Aire (OCRP)
= Aire (AMNL) + Aire (MBRP)

d'où : $$\boxed{x = \frac{x'e'' + x''e'}{e'' + e'}}$$

RESOLUTION :

	2050	.... 450	1600	
$x' =$	100	.	200	$= x''$
	48	.	98	
		$\boxed{36}$		
	22	.	47	
$c' =$	9	.	21 1/2	$= c''$
$e' =$	8	.... 12 1/2	20 1/2	$= e''$

La solution est donnée par la formule : $x = \dfrac{x'e'' - x''e'}{e'' - e'}$

On notera l'apparition de signes "-".

Ce changement de signe est justifié par le fait que dans cet exemple, les deux erreurs sont commises en "excédent", contrairement au cas précédent.

FORMALISATION DU PROBLEME :

Le problème est du type : $ax + b = c$

La méthode consiste à choisir deux valeurs x' et x'' : 100 et 200, puis à calculer respectivement c' et c'' : 9 et 21 1/2.
Les erreurs e' et e'' sont respectivement 8 et 20 1/2.

Nous avons : $ax + b = c$, $ax' + b = c'$ et $ax'' + b = c''$

$$\text{d'où : } a = \frac{c' - c}{x' - x} = \frac{c'' - c}{x'' - x} = \frac{e'' - e'}{x'' - x'} = \frac{e'}{x' - x} = \frac{e''}{x'' - x}$$

$$a = \frac{e''}{x'' - x} \qquad \text{d'où : } x'' - x = \frac{e''}{a} \qquad \text{et : } x = x'' - \frac{e''}{a}$$

$$x = x'' - \frac{e''}{\dfrac{e'' - e'}{x'' - x'}} = \frac{x''(e'' - e') - e''(x'' - x')}{e'' - e'}$$

$$\text{et } \boxed{x = \frac{x'e'' - x''e'}{e'' - e'}}$$

COMMENTAIRE :

Selon que les erreurs soient commises en excédent ou non, on s'"arrange" au niveau des signes "+" ou "-" pour éviter les nombres négatifs.

Si la méthode de fausse position simple ne permet pas de résoudre les problèmes du type : $ax + b = c$, par contre la méthode de double fausse position résoud aussi bien les problèmes du type : $ax + b = c$ que les problèmes du type : $ax = b$.

PRECISIONS HISTORIQUES :

La méthode de double fausse position est mentionnée dans les "*Neuf chapitres sur l'art du calcul*", ouvrage chinois du Ier siècle environ.

POUR S'EXERCER :

Comment partager 44 ducats entre trois personnes de telle sorte que :

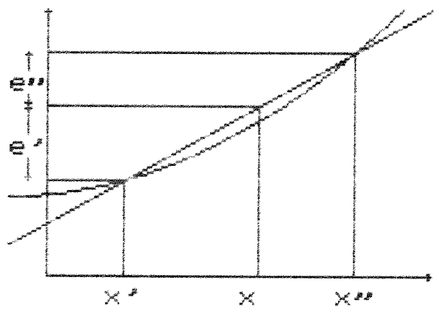
La deuxième ait le double de la première + 4
La troisième ait autant que les deux premières + 6 ?

Si la première en reçoit 8...
Si la première en reçoit 6...

EXTENSION :

La méthode de double fausse position permet également de calculer des valeurs approchées dans les problèmes de degré supérieur à 2.

La méthode revient alors à faire une interpolation linéaire conformément à la figure ci dessous :



ELEMENTS DE BIBLIOGRAPHIE :

MATHEMATIQUES AU FIL DES AGES — GAUTHIER-VILLARS

LES GRANDES INVENTIONS DE L'HUMANITE — BORDAS

EQUATIONS DU PREMIER DEGRE. METHODE DE FAUSSE POSITION — IREM TOULOUSE