ÉVOLUTION DE LA NUMÉRATION

50

Suzanne HAEGEL
L.E.T.I. - Haguenau

Dès que l'homme eut conscience des nombres, il lui fallut inventer des symboles pour les exprimer.

Au début il utilisa une numération concrète : "des entailles sur un morceau de bois, des noeuds sur une corde etc..."

Puis naquirent, avec l'écriture et la nécessité d'écrire des nombres de plus en plus grands, différents systèmes de numération.

Nous allons parler, ici, de ces systèmes et de leur évolution qui ont permis, vers le Xe siècle, la naissance de notre système de numération de position.

Qu'est-ce que la numération de position ?

Prenons, par exemple le système romain qui n'est pas un système de position. Le symbole C signifie "cent" et ce quelle que soit la position qu'il occupe dans l'écriture des nombres ainsi dans

MC (1100)   il est en dernière position

CLXX (170)   il est au début.

On rétorquera, avec raison, qu'il peut signifier "moins cent" dans par exemple :

CM (900)

Cette notation est déjà une évolution par rapport à la première écriture de 900 (DCCCC) et c'est un premier pas vers une numération de position.

On voit très bien les inconvénients d'une telle notation :

- répétition fastidieuse d'un même symbole. (On a dû commettre de nombreuses erreurs de transcription).
- les opérations sont difficiles à faire (essayez donc de faire une addition !). Ce n'est pas sans raison que les calculateurs étaient considérés comme investis de pouvoirs surnaturels.

Dans la numération de position, un même symbole prend une valeur différente suivant la position qu'il occupe dans l'écriture des nombres.

Dans 208 le "2" signifie deux cents

Dans 21 il signifie vingt.

Quels étaient les systèmes utilisés ? Comment s'est faite l'évolution ? Comment faisait-on les opérations ?

Nous allons essayer de répondre à ces questions.

L'HISTOIRE DE LA NUMERATION

La numération babylonienne.

Les plus anciens documents ont été découverts à Uruk en Mésopotamie et datent de 3000 ans avant J.C. On peut les voir au Musée du Louvre.
"Pour pallier les difficultés soulevées par leurs civilisations orales et pour satisfaire les multiples besoins crées par leur intense activité économique les Sumériens et les Elamites avaient pris l'habitude d'enregistrer les résultats de leurs dénombrements sur les petites tablettes" (1)

On ne va pas s'appesantir sur l'évolution de ce système de numération. Nous ne parlerons que des chiffres cunéiformes.
Deux symboles étaient utilisés :

𒁹 : 1 et 𒌋 : 10

Les nombres étaient écrits en base soixante, et en base dix dans chaque groupe d'unité, chacun des symboles étant répétés autant de fois que nécessaire.
Par exemple :

$$3824 = 1 \times 3600 + 3 \times 60 + 44$$
$$= 1 \times 60^2 + 3 \times 60 + 44$$

3824 s'écrivait :

𒁹 𒁹𒁹𒁹 𒌋𒌋𒌋𒌋 𒁹𒁹𒁹𒁹

$1 \times 60^2 + 3 \times 60 + 4 \times 10 + 4$

Avec ce principe

600 = 10 × 60 s'écrit 𒁹𒌋 et non 𒁹 (qui se lit 1)

et 70 = 1 × 60 + 10 s'écrit 𒁹 𒌋

Il y a risque de confusion.
De même :

61 = 1 × 60 + 1 s'écrit 𒁹 𒁹

alors que 2 s'écrit 𒁹𒁹

A l'époque de la conquête d'Alexandre le Grand on utilisait le symbole 𒑱 pour remplacer les espaces.

61 s'écrivait alors 𒁹 𒑱 𒁹

La numérotation babylonienne fut donc un système positionnel. Le symbole Y indique 60 aussi bien que 1 dans l'écriture de 61.
Mais il n'utilise que deux symboles (il devrait en comporter 59, ou 60).

Avec ce système 59 s'écrit 

La numération égyptienne.

Les plus anciens spécimens connus concernant l'écriture égyptienne datent de 3000 avant J.C. Ces documents sont gravés sur des pierres, peints sur des vases ou des feuilles de papyrus.
Pour écrire les nombres entiers, ils utilisaient un symbole différent pour chacune des 7 premières puissance de dix :

1
10
100
1000

10 000
100 000
1000 000

Ainsi 3624 s'écrivait : 

Cette écriture utilise donc le principe de l'addition, les nombres étant écrits en base dix.
Ces nombres indiquaient par exemple la quantité de prisonniers ou le nombre des ennemis massacrés.
Ce système était fort simple mais il pouvait être source d'erreurs à cause de la répétition fastidieuse des signes. On imagine aisément le scribe oubliant de noter l'un des symboles ou, pourquoi pas, en écrire un de trop !

Les Egyptiens utilisaient aussi les fractions unitaires (le numérateur est égal à un), elles étaient notées de la manière suivante :

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{100}$ $\frac{1}{23}$

Les fractions $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$ avaient des symboles spéciaux

1/2

2/3

Ce sont les seules fractions qu'ils utilisaient.

Par exemple la fraction 7/10 était décomposée en somme de fractions unitaires.

$\frac{7}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$ s'écrivait 

<u>La numération grecque</u>

Les Athéniens utilisaient au 6e siècle avant J.C. le système suivant :
Ils disposaient des six symboles :

|	Γ	Δ	H	X	M
1	5	10	100	1000	10 000

ainsi 3704 s'écrivait :

XXX HHHHHHH | | | |
3 x 1000 + 7 x 100 + 4

en combinant les symboles Γ et H de la manière suivante 𐅅 qui représente 500, ils ont amélioré leur système en évitant la trop grande répétition des symboles.
3704 s'écrivait

XXX𐅅HH||||

Mais peu à peu le système ionique qui utilisait les lettres de l'alphabet grec a remplacé le système attique.
A l'aide de leurs vingt sept lettres les grecs symbolysaient les neuf unités, les neuf dizaines et les neuf centaines. A l'aide d'apostrophes placées à gauche ou à droite de la lettre ils changeaient la valeur du symbole.

Ainsi 3 s'écrivait γ

3000 s'écrivait ͵γ

1/3 s'écrivait γʹ

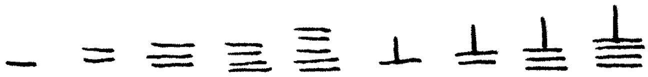
3793 s'écrivait donc :
͵γ ψ ϙ γ

La numération chinoise

Il est très difficile de donner une date plausible aux documents chinois les plus anciens. Toujours est-il que les chinois ont utilisé deux systèmes de numération différents. Je ne parlerai, ici, que de celui utilisé par les mathématiciens et les calculateurs (en 220 avant J.C). Ils utilisaient les deux séries de neuf symboles suivants :

1 2 3 4 5 6 7 8 9

et



1 2 3 4 5 6 7 8 9

Les nombres sont écrits en base dix. On commence à écrire le chiffre des unités tel qu'il est donné dans la première série puis le chiffre des dizaines est pris dans la deuxième série, le chiffre des centaines est pris dans première série etc...

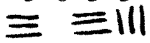
Exemples

3 7 6 4 

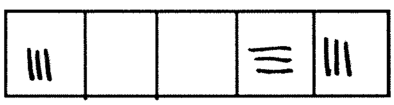
Ce système permet différencier 333 de 3033

3 3 3

3 0 3 3



Pour différencier 333 et 30033 ils écrivaient le nombre dans un quadrillage.



Ce système est donc bien un système positionnel :

 prend des valeurs différentes suivant sa position dans l'écriture du nombre.

L'HISTOIRE DES OPERATIONS

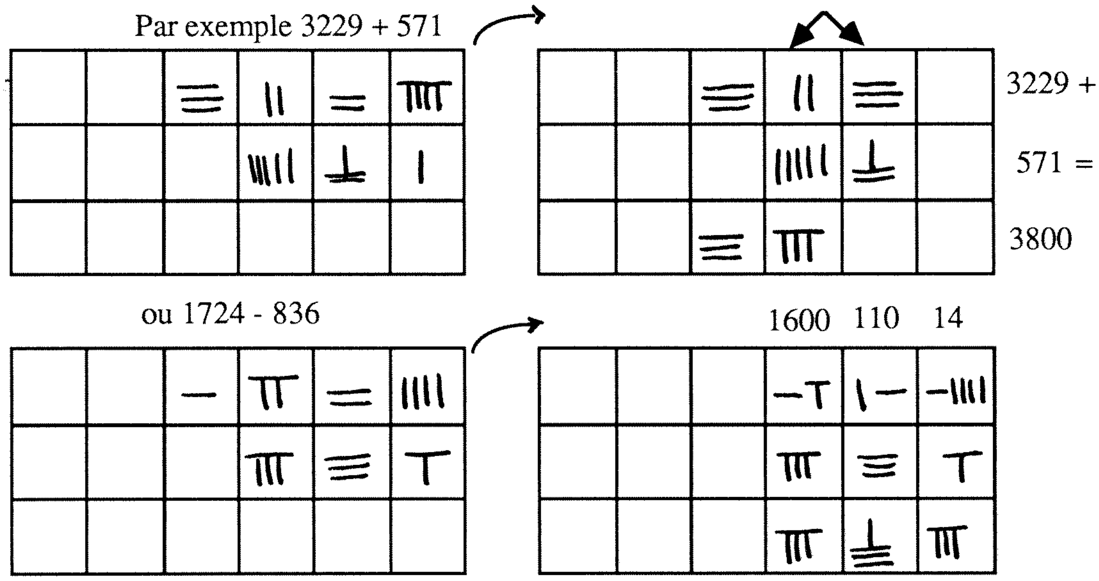
Après avoir vu différents systèmes de numération, on se demande “mais comment faisaient-ils les opérations ?”

Les babyloniens effectuaient leurs multiplications à l'aide de tables qui avaient sans doute été obtenues par duplications successives.

On sait que les égyptiens se servaient de tables pour décomposer les fractions en somme de fractions unitaires.

Les administrateurs chinois transportaient dans leur sac des barres numériques (en ivoire ou en bambou) et lorsqu'ils calculaient, un ensemble de barres était peint en rouge et l'autre en noir pour distinguer les nombres positifs des nombres négatifs.

Pour additionner deux nombres, on les disposait sur un échiquier.

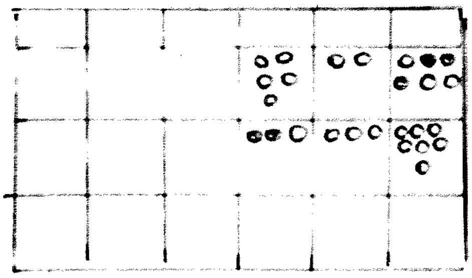


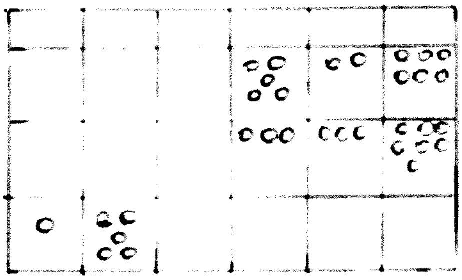
Les abaques grecs et romains

Utilisés sans doute depuis le 6e siècle avant J.C. c'était des tables ou des plaques sur lesquelles étaient dessinées des colonnes. Les abaques servaient à faire les opérations (voir planche), on plaçait les nombres sur l'abaque à l'aide de cailloux (calculus en latin) ou de jetons. On les a utilisés jusqu'à la fin du Moyen-Age en Europe.

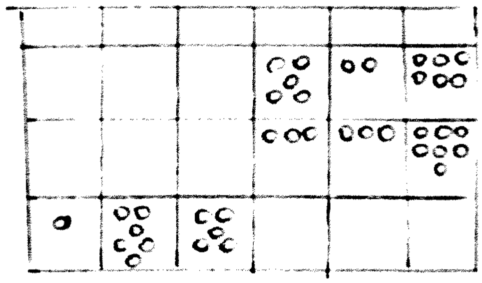
Gerbert (940-993) améliora leur utilisation en substituant les jetons d'une colonne par un seul qui portait le nombre correspondant aux jetons substitués.

DXXVI multiplié par CCCXXXVII

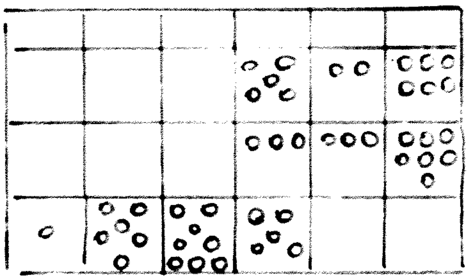




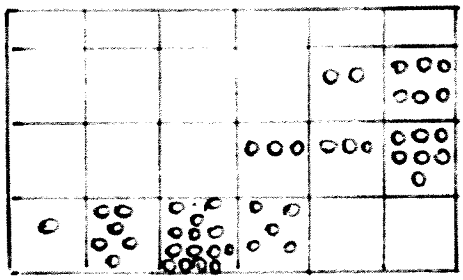
500 x 300 = 150 000



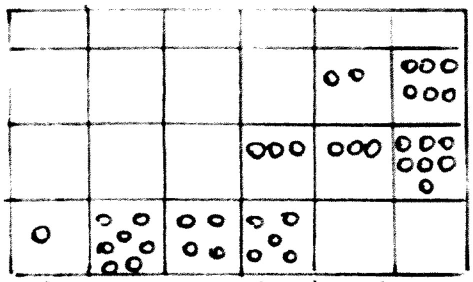
500 x 30 = 15 000



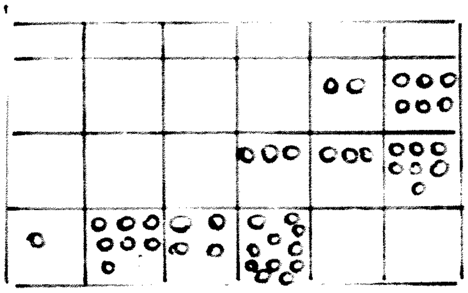
500 x 7 = 3500



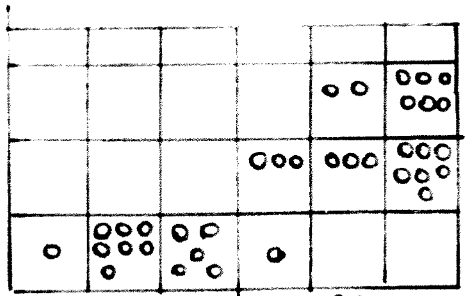
20 x 300 = 6000



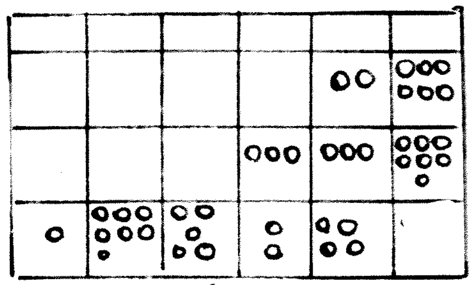
Réécriture de la ligne



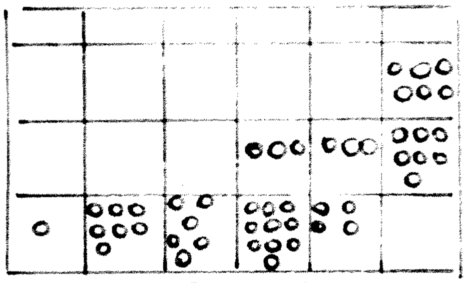
20 x 30 = 600



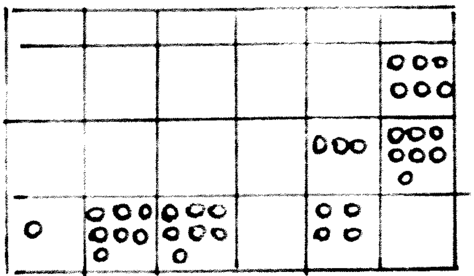
Réécriture de la ligne.



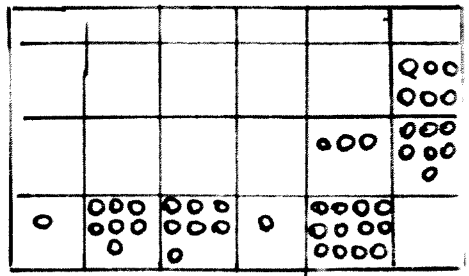
20 x 7 = 140



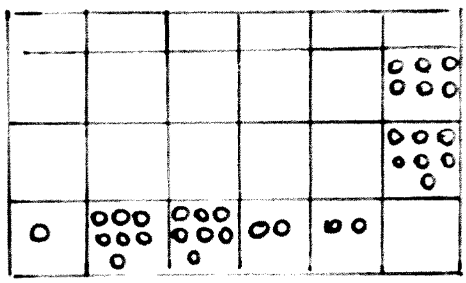
6 x 300 = 1800

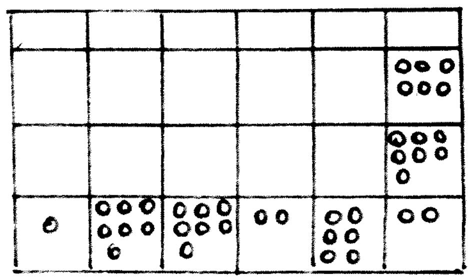


Réécriture de la ligne.



6 x 30 = 180





Réécriture de la ligne.

6 x 7 = 42

Résultat 526 x 337 = 177 262

On peut alors se demander pourquoi nous avons mis si longtemps avant d'écrire les nombres avec notre système actuel c'est-à-dire tel qu'il était écrit sur l'abaque.
Une des raisons est qu'il manquait un symbole pour traduire le fait qu'une colonne de l'abaque était vide, en effet, sans ce symbole 68 4 pourrait représenter 6 804 aussi bien que 68 004.

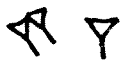
LE ZERO

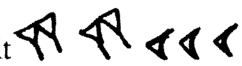
Dans l'antiquité

Nous avons vu (l'évolution de la numération) que les babyloniens avaient un symbole pour séparer les groupes.
Ce symbole : "  " était aussi utilisé par les astronomes pour marquer l'absence des unités du 1er ordre.
Ainsi :

180 est noté  (3 x 60 + 0) sur une tablette conservée au British Museum.

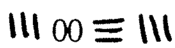
Pour noter les fractions sexagésimales, ils utilisaient un symbole différent pour indiquer l'absence d'unité :

1/60 se notait  (0 unité + 1/60)

$30/60^2$ se notait  (0 unité $+ 0 \times 1/60 + 30 \times 1/60^2$)

Les incas qui utilisaient une numération de position un peu bizarre (histoire universelle des chiffres) utilisaient également un symbole pour traduire l'absence d'unités.

Au Moyen-Age

Ce sont les Hindous et les Arabes qui ont donné naissance à notre système de numération. Les Hindous utilisaient un système de position. Les nombres étaient écrits en base dix, ils utilisaient neuf symboles différents et ceci, sans doute, depuis le 5e siècle avant J.C.
Pour faire leurs opérations ils ont sans doute, au départ, utilisé des abaques mais ils n'avaient pas besoin de jetons, il leur suffisait d'écrire un de leur neuf symboles dans chaque colonne.
Il est donc très tôt paru indispensable d'inventer un symbole pour traduire le fait qu'une colonne était vide. Ce symbole inventé et l'abaque devenait inutile.
C'est sans doute vers le 7e siècle (ou avant) que ce symbole fut inventé. C'était soit un point, soit un cercle.
Les arabes qui ont traduit de nombreux textes hindous, grecs et latins ont très tôt (au Xe siècle) été séduits par le système de numération hindou et l'ont adopté.
Parallèlement les calculateurs chinois, sans doute sous l'influence des bouddhistes d'origine indienne, ont introduit l'usage du zéro dans leur numération ainsi 30033 (voir l'évolution de la numération) s'écrit à présent : 

L'Europe continua à utiliser les chiffres romains. Gerbert qui avait étudié dans les écoles arabes d'Espagne introduisit les chiffres indo-arabes en les écrivant sur les jetons (voir histoire des opérations) servant aux calculs.

Le "Liber abbaci" de Fibonacci (1170-1250) parle des neuf symboles indo-arabes ainsi que du symbole zéro qu'il appelle zéphirum. (Les arabes l'appelaient SIFR, c'est-à-dire vide).

Le Liber abbaci était malheureusement d'un niveau trop élevé pour l'époque. De plus, au Moyen-Age, les méthodes de calcul indo-arabes ainsi que l'usage du zéro furent frappés d'interdit. L'énorme simplification des calculs conféra au zéro un pouvoir quasi magique. Le mot Zéphirum engloba les dix symboles que l'on appela "chiffres".

Pourtant le développement du commerce et du système bancaire nécessita une arithmétique simple. "La summa" de Pacioli (1494) reprend dans l'ensemble en le simplifiant le liber abbaci et le système indo-arabe est peu à peu adopté en Europe.

Mais zéro restait un symbole, il n'avait pas le statut de nombre. Les solutions "zéro" ou "négatives" des équations étaient rejetées.

C"est Alexandre de Villedieu (au 13e siècle) qui, le premier, traita zéro comme un nombre dans le poème "Carmen de algorismo". Ce poème traite des opérations élémentaires sur les entiers.

Chuquet au 15e siècle dit de "zéro" qu'il ne possède pas de valeur.

D'ailleurs, Plonion, en 1924 dans son livre "Arithmétique" destiné à l'école primaire, écrit : "Il y a neuf chiffres 1, 2, ..., 9 et un signe particulier : 0".

Dans le livre du maître de D. André cours moyen paru en 1895, on peut lire :

> "Que représente Zéro ?"
>
> "Rien. Il prend parfois le sens des mots : aucun, nul"
>
> "Comment se nomme zéro ?"
>
> "Chiffre non significatif"

Parallèlement dans l'enseignement supérieur zéro avait statut de nombre.(2)

BIBLIOGRAPHIE

(1) Georges IFRAH "Histoire universelle des chiffres".

(2) Fragments d'Histoire des Mathématiques (APMEP).

(3) Helmuth GERICKE "Geschichte des Zahlbegriffs.

(4) A. DAHAN-DALMEDICO Une histoire des mathématiques
J. PFEIFFER Routes et Dédales

(5) J.Paul COLETTE "Histoire des mathématiques"