I.R.E.M. DE STRASBOURG-1991

LOGIQUE

ET

ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUE

DOCUMENT A L'ATTENTION

DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUE

PAR

EL FAQIH EL Mekki

"La logique n'est pas plus la mathématique que les accélérateurs atomiques ne sont la physique nucléaire ; si vous êtes suffisamment inventif pour imaginer une démonstration, elle vous aidera à l'élaborer, tout comme le physicien nucléaire a besoin d'appareils complexes et coûteux pour montrer que ses idées sur la nature des forces atomiques sont correctes. Dans les deux cas, l'imagination est toujours l'irremplaçable étincelle de départ."

Jean A. DIEUDONNE

SOMMAIRE

NOTES :

1) Pour plus de détails sur les différentes rubriques de ce fascicule, on consultera la référence [3], à savoir :

EL FAQIH EL Mekki - *Place de la logique dans l'activité mathématique des étudiants scientifiques*. Thèse de Doctorat. Strasbourg. 1991.

2) Une deuxième brochure (S142) est destinée aux élèves et étudiants scientifiques, sous le titre :

LOGIQUE ET RAISONNEMENT MATHEMATIQUE

Elle comporte le cours de logique accompagné d'un guide de lecture.

INTRODUCTION

La question de l'apport de la logique à l'enseignement des mathématiques reste jusqu'à présent sans réponse satisfaisante. L'enseignement des mathématiques n'a toujours pas su échapper à l'alternative : enseignement de la logique en soi ou absence totale d'enseignement de la logique. C'est le second terme de l'alternative qui s'applique actuellement : depuis la fin de la période dite des mathématiques modernes, la logique n'a plus de place dans les programmes scolaires français ; et à l'Université, jusqu'au niveau du second cycle, l'enseignement de la logique est exceptionnel.

Or, s'il est vrai qu'un enseignement de la logique tel qu'il a été conçu pendant la période des "mathématiques modernes" a conduit à un échec incontestable, il n'est pas du tout évident qu'une absence complète d'un minimum de logique ne soit pas un handicap. Et la question de l'enseignement de la logique reste donc ouverte, sinon d'actualité.

Dans le présent fascicule, nous voudrions faire part aux professeurs de mathématiques, d'une part, du compte rendu d'une enquête menée au près d'étudiants de première année DEUG-A et, d'autre part, des propositions faites à la lumière des résultats de ladite enquête.

Le document comporte deux parties :

- dans la première partie, nous ferons le point sur les manques en logique, observés chez les étudiants et sur les incidences de ces manques sur l'activité mathématique courante en DEUG-A.

- dans la seconde partie, nous indiquerons les grandes lignes et l'esprit général de nos propositions et nous reproduirons un projet d'un cours de logique destiné aux élèves et étudiants scientiques, et plus particulièrement à ceux du DEUG-A.

N.B: Nous serons très fier de connaître la réaction des enseignants à nos propositions, et nous leur serons très reconnaissant pour leurs éventuelles remarques et suggestions.

PREMIERE PARTIE

LES MANQUES EN LOGIQUE

COMPTE RENDU D'UN CONSTAT

PREMIERE PARTIE

LES MANQUES EN LOGIQUE, COMPTE RENDU D'UN CONSTAT

I.1. Nature des manques en logique

Dans le cadre de notre travail de recherche sur la logique, nous avons élaboré un questionnaire sur la logique, avec comme objectif principal le repérage des éventuels manques en logique.

Regardant la logique comme outil, nous avons retenu l'option d'un questionnaire(1) dont la plupart des questions correspondent à des situations mathématiques que l'on rencontre couramment.

L'analyse des résultats dudit questionnaire met en évidence la présence, chez notre population, d'un certain nombre de lacunes en logique et qui risqueraient de devenir source d'incompréhension ou d'erreurs. Et il se trouve que ces lacunes sont de deux ordres :

- *des défauts d'interprétation :* et qui sont donc en rapport avec le vocabulaire logico-mathématique et qui correspondent à un dysfonctionnement de celui-ci (emploi du "ou", "si, alors",...etc) ;

- *des lacunes d'ordre opératoire :* liées, elles, à une méconnaissance, parfois totale, des propriétés et lois logiques les plus élémentaires (distributivité de la disjonction sur la conjonction et vice- versa, calcul sur la négation,...).

Pour donner une idée de l'ampleur de ces lacunes, voici, à titre d'exemples, certaines denos questions, suivies, chacune, du taux de réussite coreespondants :

Question

Dites si la proposition suivante est vraie ou fausse :

"Il existe un entier naturel m tel que pour tout entier naturel n, on ait $n \leq m$*"*

Taux de réussite : 21 %.

Ici, la plupart des étudiants confondent cette proposition avec la proposition obtenu en intervertissant les quantificateurs.

---

(1) La passation du questionnaire a eu lieu en octobre 1989, avec la promotion des étudiants de DEUG-A, 1ère année (toutes filières confondues). L'effectif retenu dans l'analyse des résultats est de 499 individus.

Question

Formulez la négation de la phrase suivante :

"Pour tout entier naturel n, il existe un entier naturel m tel que : $m \geq n$"

Taux de réussite : 16 %.

Question

Déterminez tous les couples $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ solutions du système :

$$(S) \quad \begin{cases} (x-1)(y-2) = 0 \\ (x-3)(y-1) = 0 \end{cases}$$

et explicitez tous les détails de votre raisonnement.

Résultats correct : 47 %.

N.B : Très peu d'individus arrivent à expliciter assez leur démarche et prtesque aucun ne fait allusion à la distributivité du **ou** par rapport à **et** .

Nous nous contentons de ces exemples. L'existence des manques en logique étant un constat, il est naturel de se demander dans quelle mesure ces manques auraient-ils des impacts sur l'activité mathématique courante. C'est là l'objet du paragraphe suivant.

I.2. Logique et activité mathématique courante en DEUG-A

Nous avons estimé utile d'examiner de plus près des exemples de productions en mathématiques (copies d'examens) de différentes promotions d'étudiants. Nous pensions que cela pourrait, non seulement nous éclairer sur les éventuelles incidences des manques en logique sur l'activité mathématique des étudiants, mais nous nous attendions aussi à une mise en évidence d'aspects que le questionnaire ne pouvait révéler.

En effet, il s'est avéré, suite à cette étude, que les observations faites à l'aide du questionnaire se sont enrichies d'un certain nombre d'éléments :

–difficulté des étudiants à lire convenablement un énoncé mathématique (l'explicitation des quantificateurs, par exemple, occasionne d'énormes difficultés),
–incapacité à expliciter la structure logique d'un énoncé mathématique,
–incapacité à expliciter, dans une rédaction, la structure de son propre discours.

Un examen attentif permet de se rendre compte que dans beaucoup de cas, la quasi-totalité des erreurs commises sont de type logique. *Les lacunes en logique apparaissent alors* *comme un véritable handicap, leurs effets négatifs dépassent parfois toute prévision, au point que le savoir mathématique des étudiants s'en trouve complètement dénaturé.* En outre, la nature des traitements des étudiants permet de saisir les apports à attendre d'un minimum de connaissances en logique :

–moyen de contrôle du raisonnement et du sens,
–outil de calcul logique,
–moyen facilitant l'expression (dans une rédaction mathématique),
–moyen d'économie (coût d'une démarche de raisonnement, par exemple).

Et s'il est clair que l'activité mathématique, de nature multidimentionnelle, ne saurait se réduire à un maniement de la logique, il semble vraisemblable que, d'une manière générale, les manques en logique pourraient fort bien constituer un handicap dans le déroulement de l'activité mathématique courante des étudiants.

Dans ce qui suit, nous rapportons quelques extraits assez révélateurs.

Exercice (extrait du partiel d'algèbre linéaire A, Novembre 90) :

Voici, tout d'abord, l'énoncé de l'exercice en question :

"Question de cours. *Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel. Démontrer que, si F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{E}$, tout élément de $\mathbb{E}$ se décompose d'une manière et d'une seule en somme d'un élément de F et d'un élément de G."*

Et avant de rendre compte de certains types de traitements auxquels cet énoncé a donné lieu chez les étudiants, commençons par en (= l'énoncé) analyser et expliciter la structure logique.

Cet énoncé exprime une implication formelle et qui est en plus une relation d'implication ([3]) ; nous en donnons les termes (hypothèse et conclusion) :
Hypothèse : *E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{E}$*
Conclusion : *tout élément de $\mathbb{E}$ se décompose d'une manière et d'une seule en somme d'un élément de F et d'un élément de G*

Intéressons-nous maintenant à la Conclusion : celle-ci se présente sous forme d'une conjonction de deux propositions, à savoir :

$\mathbf{P_1}$: *tout élément de $\mathbb{E}$ se décompose en somme d'un élément de F et d'un élément de G*
$\mathbf{P_2}$: *la décomposition est unique (son existence étant admise)*

Explicitons $\mathbf{P_1}$ et $\mathbf{P_2}$ en utilisant les symboles logiques de manière à faciliter ensuite l'analyse des productions des étudiants.

$\mathbf{P_1}$: $(\forall x \in \mathbb{E})\ (\exists\, u \in F)\ (\exists\, v \in G)\ \ x = u + v$

$\mathbf{P_2}$: $(\forall x \in \mathbb{E})\ (\forall (u,u') \in F \times F)\ (\forall (v,v') \in G \times G)\ \ [(x = u + v \text{ et } x = u' + v') \Rightarrow (u = u' \text{ et } v = v')]$

Important !

– Soulignons que les extraits choisis sont bien représentatifs des échantillons examinés

– nous ne attirerons l'attention du lecteur que sur les erreurs de type logique. D'ailleurs, le lecteur se rendra compte que dans la plupart des cas, la quasi-totalité des erreurs commises sont de type logique, y compris celles apparemment liées aux notions ensemblistes ou à l'algèbre linéaire.

Copie DF228 :

Question de cours :

F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{E}$ ($\mathbb{E} = F \oplus G$) donc :

$E = F + G$ (1) et $F \cap G = \{0\}$ (2)

Selon (1), $\forall w \in \mathbb{E}, \forall u \in F, \forall v \in G, w = u + v$.

Or, $u \neq v$ car $F \wedge G = \{0\}$ selon (2)

Donc $\forall w \in \mathbb{E}, \forall u \in F, \forall v \in G, w = u + v$ avec $u \neq v$

Tout élement de $\mathbb{E}$ se décompose donc d'une manière et d'une seule en somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Commentaire sur l'utilisation de la logique :

Aspects syntaxiques et questions d'écriture

– utilisation du symbole $\forall$
– absence d'erreurs syntaxiques

Questions de sens et opérations logiques

– absence d'erreurs sémantiques
– explicitation erronée de la quantification dans l'ecriture de $\mathbf{P}_1$
– l'explicitation de $\mathbf{P}_2$ réduite à l'adjonction de la condition $u \neq v$ à $\mathbf{P}_1$.

N.B. *Nous entendons par*

– erreur sémantique, la présence d'un énoncé qui, mathématiquement, est dépourvu de sens. Voici des exemples :
"x est un nombre réel non vide",
"Soit z un nombre complexe négatif",
"Soit E un ensemble. E $\Leftrightarrow$ ..." (ici, il y a une incorrection à la fois sémantique et syntaxique).

– erreur mathématique, un résultat mathématiquement faux.

Copie ZC212 :

Question de cours :

Soit E un espace vectoriel, F et G sont deux sous-espaces vectoriels dans E, ils vérifient donc $F+G=E$ et $F\cap G=\{0\}$. Ceci implique que : $\dim(F+G)=\dim E$

De plus, si x_F et x_G sont différents de 0 (avec $x_F\in F$ et $x_G\in G$) on a $x_F\neq x_G$.

F et G sous-espaces vectoriels implique que ces deux familles sont non vide. On suppose $\dim F=q$ et $\dim G=p$, de plus $\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G)=\dim E$;

or $\dim(F\cap G)=0$, et l'on choisit $\dim E=n$, d'où :

$\dim(F+G)=p+q=n \Rightarrow x_F+x_G=x$ avec $x\in E-\{0\}$

Si ~~$x_F \neq x$~~ $x_F=x_G=0$, on aura $0+0=0$ or $0\in E$,

donc $\forall x_F\in F, \forall x_G\in G$, F et G supplémentaires $\Rightarrow x_F+x_G=x$ avec $x\in E$.

Réciproquement :

$\forall x_F\in F, \forall x_G\in G$ et $\forall x\in E$, on a $x_F+x_G=x$ (F et G étant deux sous-espaces vectoriels de E) ;

alors $\dim(F+G)=\dim(E)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G)$

de plus $\dim F+\dim G<\dim E$ donc $\dim(F\cap G)$ est nécessairement égal à 0 d'où $F\cap G=\{0\}$.

Donc F et G sont sous-espaces vectoriels dans E.

$\forall x_F\in F, \forall x_G\in G, \forall x\in E$ $x_F+x_G=x \Rightarrow F$ et G supplémentaires dans E.

Conclusion :

Soit E, un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E :

F et G supplémentaires $\Leftrightarrow x_F+x_G=x$ $\forall x_F\in F, \forall x_G\in G, \forall x\in E$.

Commentaire sur l'utilisation de la logique :

Aspects syntaxiques et questions d'écriture

- utilisation des symboles logiques $\forall$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$
- transgression des conventions d'écriture mathématique (donc $\forall x_F\in F, \forall x_G\in G$, F et G supplémentaires $\Rightarrow x_F+x_G=x$ avec $x\in \mathbb{E}$)

Questions de sens et opérations logiques

- absence d'erreurs sémantiques
- l'étudiant cherche à établir une équivalence au lieu d'une implication
- explicitation erronée de la quantification dans l'écriture de $\mathbf{P_1}$ ($\mathbf{P_2}$ étant omise).

Copie ZM200 :

question du cours :

F, G 2 s.e.v de E

F et G sont supplementaire

$$\Rightarrow \begin{cases} F + G = E \\ F \cap G = \{0\} \end{cases}$$

M.q, tout elt de E se decompose d'une manière unique

on va proceder comme suit :

Suppo que l'elt z de E s'ecrit de 2 manières differents.

$z = x + y \quad x \in F, y \in G$

$z' = x' + y' \quad x' \in F, y' \in G$. z' elt de E

$z' - z = x' + y' - x - y$

$x' - x + y' - y = 0$ (car $\in F \cap G = \{0\}$).

$$\begin{cases} x' - x = 0 \\ y' - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x' = x \\ y' = y \end{array}$$

donc l'elt de E s'ecrit d'une seule manière.

Commentaire sur l'utilisation de la logique :

Aspects syntaxiques et questions d'écriture

- utilisation du symbole logique $\Rightarrow$
- erreur syntaxique dans " car $\in F \cap G = \{0\}$"

Questions de sens et opérations logiques

– absence d'erreurs sémantiques
– la quantification est incomplète
– omission de $\mathbf{P_1}$
– explicitation erronée de $\mathbf{P_2}$ (traduction faite de la phrase "Supposons que l'élément z de $\mathbb{E}$ s'écrit de deux manières différentes", l'étudiant prend la peine de justifier que $z' - z = 0$")

Copie **WJ147** :

Soit A et B deux sous espace supplémentaires de ~~dans~~ E

Alors : $A + B = E$ et $A \cap B = \{0\}$

1) Comme $A + B = E$ il existe a élément de A et b element de B tel que tout vecteur x de E s'ecrit $x = a + b$

Donc tout vecteur x de E peut s'ecrire sous la forme : $x = a + b$ avec $a \in A$
$b \in B$.

2) Montrons que pour tout vecteur x de E il existe un vecteur a de A et b de B tel que a et b soient uniques et la somme de a et b égale à x.

Supposons qu'il existe 2 solutions distinctes ; telles que :

$\begin{cases} x = a + b & \text{avec } a, a' \in A \text{ et } a \neq a' \\ x = a' + b' & b, b' \in B \text{ et } b \neq b' \end{cases}$

Donc $a - a' = b' - b$

avec $\begin{cases} a - a' \text{ un vecteur de } A \text{ (supposé non nul)} \\ b' - b \text{ un vecteur de } B \text{ (supposé non nul)} \end{cases}$

Ceci impliquerai que $A \cap B = \{a - a'\}$
Ce qui est contraire à l'hypothèse de depart ($A \cap B = \{0\}$)
Donc x s'ecrit comme une somme de vecteurs $a \in A'$ $b \in B$ uniques.

C Q F D

Commentaire sur l'utilisation de la logique :

Aspects syntaxiques et questions d'écriture

- recours à des équivalents dans la langue naturelle des symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$
- absence d'erreurs syntaxiques

Questions de sens et opérations logiques

- abcence d'erreurs sémantiques
- $\mathbf{P_1}$ est d'abord exprimée par

"$(\exists\ a\in A)\ (\exists\ b\in B)\ (\forall\ x\in \mathbb{E})\ x = a + b$"

puis par

"$(\forall\ x\in \mathbb{E})\ x = a + b$, avec $a \in A$, $b \in B$"

avant qu'apparaisse une écriture condensée de $\mathbf{P_1}$ et $\mathbf{P_2}$ équivalente à

"$(\forall\ x\in \mathbb{E})\ (\exists!\ a\in A)\ (\exists!\ b\in B)\ \ x = a + b$"

- erreur liée aux lois de De Morgan
- erreur mathématique (résultat faux) dans " Ceci implique que $A\cap B = \{a - a'\}$" en plus d'une incohérence mathématique (présence de deux éléments incompatbles), l'étudiant ayant, par ailleurs, écrit "$A\cap B = \{0\}$".

Ces observations nous amènent à faire quelques commentaires d'ordre didactique.

1°) Nous avons relevé, à chaque fois, le rappel correct des relations du cours. Mais ce qui, apparemment, pose problème c'est **la compréhension** qu'ont les étudiants de ces relations et **la lecture** qu'ils en font. Prenons, pour fixer les idées, le cas de l'égalité ensembliste

$$\mathbb{E} = F + G$$

Il semble qu'à défaut d'en *connaître* la traduction mathématique explicitée en termes d'éléments (qui est la seule en mesure d'en fixer la signification), les étudiants en donnent leurs traductions qui, et c'est le moins que l'on puisse en dire, comportent des défauts par rapport à la lecture mathématique. Et comme il s'agit, en plus, dans l'exercice ci-dessus, d'une question de cours, on ne peut que s'interroger sur la nature du savoir mathématique de nos étudiants comparée à celle du savoir enseigné qui, apparemment, subit au moins une déformation due à une non maîtrise du langage logico-mathématique. Et il serait une erreur pédagogique de faire comme si les étudiants entendaient le discours mathématique de l'enseignant comme lui-même l'entend.

Or, il se trouve que dans cette exemple précis, l'explicitation des quantificateurs (phénomène longuement analysée par Josette ADDA dans [1] se trouve bien au cœur du problème. Et il serait, à notre avis, pédagogiquement intéressant de ne pas se limiter à écrire

$$A + B = \{\ a + b\ ;\ a\in A,\ b\in B\}$$

Cette écriture est mathématiquement incontestable mais elle cache trop, pour un apprenant non assez familiarisé avec le langage mathématique, la structure logique et donc le sens même de la définition mathématique en question. L'écriture

$$A + B = \{x\in E\ ;\ (\exists\ a\in A)\ (\exists\ b\in B)\ x = a + b\}$$

est beaucoup plus parlante. Toutefois, il faudrait attirer l'attention des étudiants sur l'intérêt pratique de disposer de l'une et l'autre des deux formulations.

Un autre exemple remarquable à ce sujet est celui de la définition de la surjectivité d'une application : dire pour $f\in \mathfrak{F}(A,B)$ qu'elle est surjective si $f(A) = B$ risque de laisser dans l'ombre l'essentiel de cette définition d'autant plus que cette formulation est, parfois, loin d'être opérationnelle. Et il serait alors utile d'en expliciter pleinement (au moins une fois !) toute sa teneur, à savoir :

$$f(A) = \{f(x) \,;\, x \in A\} \text{ (pas encore assez explicite)}$$
$$= \{y \in B \,;\, (\exists\, x \in A)\ y = f(x)\}$$

Et on arrive, ainsi, en explicitant l'inclusion $B \subset f(A)$, à la caractérisation (fort utile) :

$$f \text{ est surjective} \Leftrightarrow (\forall\, y \in B)\ (\exists\, x \in A)\ y = f(x)$$

De même, quel sens pourraient avoir, en dehors de toute quantification, des relations telles que : $f = g$, $f \neq g$, $f \geq g$ (quand cela a un sens),...où f et g désignent deux applications ? D'ailleurs, il est courant, lorsqu'on demande aux étudiants, de nier l'inégalité $f \geq g$ (par exemple), d'obtenir comme réponse, l'inégalité $f \leq g$ (les étudiants ne font que transférer les propriétés des réels, elles-mêmes mal maîtrisées, sur les applications).

2°) Nous avons noté, chez les étudiants, l'utilisation de l'écriture symbolique. Il s'agit là d'un besoin auquel l'enseignement n'a pas apporté de réponse. Faut-il interdire l'usage de tels symboles ? Peut-on vraiment s'en passer dans la pratique mathématique ? Ne serait-il pas plus raisonnable d'en fixer les règles d'emploi ?

Ces symboles semblent utilisés par les étudiants comme de simples abréviations et d'une manière souvent abusive, alors que dans certains cas, l'écriture symbolique permettrait d'abord ce que D. LACOMBE appelle la "lisibilité" fonctionnelle et heuristique (cf. [4] , p. 348).

3°) Soulignons que si l'exercice en question relève du cadre de l'algèbre linéaire, les difficultés qu'il occasionne ne sont pas, pour la plupart, inhérentes à l'algèbre linéaire et relèvent , plutôt d'autres cadres (celui de la logique, de l'algèbre en général,...). *Et il serait intéressant, d'un point de vue didactique, lorsqu'on cherche à dépasser une difficulté mathématique quelconque, de commencer par préciser le(s) cadre(s) mathématique(s) dont ladite difficulté relève.* Le choix du (des) cadre(s) approprié(s) où s'opérera le dépassement dépend, quant à lui, de la nature de la situation (c'est, avant tout, une question de pertinence). D'ailleurs, il est, parfois, utile d'articuler des cadres différents ([2]).

En guise de conclusion, nous dirions que s'il est clair que l'activité mathématique, de nature multidimentionnelle, ne saurait se réduire à un maniement de la logique, il semble vraisemblable que, d'une manière générale, les manques en logique pourraient fort bien constituer un véritable handicap dans le déroulement de l'activité mathématique courante des étudiants.

Face à ce double constat (existence de manques en logique et de leurs effets négatifs), une réponse du côté de l'enseignement semble s'imposer. A cet effet, certaines propositions feront l'objet de la 2ème partie de ce fascicule.

N.B : *Ces défauts d'emploi, comme ceux de type opératoire, ne disparaissent pas spontanément et se retrouvent au-delà de la première année DEUG (cf.* [3])

DEUXIEME PARTIE

PROPOSITIONS POUR L'ENSEIGNEMENT

DEUXIEME PARTIE

PROPOSITIONS POUR L'ENSEIGNEMENT

II.1. Vers un nouveau regard sur l'enseignement de la logique

Dans toute proposition au sujet de l'enseignement de la logique (comme dans tout autre esnseignement, d'ailleurs), la recherche de l'efficacité doit être un objectif principal.

Suite à notre étude (cf. [3]), nous sommes tenté d'émettre une hypothèse selon laquelle *un enseignement qui se contenterait de présenter aux apprenants une série de définitions et de lois logiques ne saurait que rester lettre morte. En effet, si l'acquisition de connaissances en logique s'avère nécessaire, il semble que leur efficacité est subordonnée, elle, à leur mise en œuvre systématique dans l'activité mathématique courante des étudiants : l'importance que revêt l'analyse de la structure logique des énoncés mathématiques (définitions, théorèmes, démonstrations, exercices, ...) paraît incontestable. En outre, la précision du mode de fonctionnement des connaissances en logique est, du moins, aussi important que ces connaissances elles-mêmes.*

Autrement dit, il semble que pratiquement, un enseignement de logique, quelle que l'en soit la forme, devrait tendre beaucoup plus vers l'acquisition d'un certain savoir-faire logique que vers un savoir logique en soi.

Partant de cette vision des choses, nous avons formulé certaines propositions précises concernant l'introduction de la logique aussi bien au niveau universitaire qu'à des niveaux antérieurs. Nous avons en particulier suggéré un certain nombre de volets, à savoir :

Premier volet : *il comporte les éléments de logique dont l'introduction semble ne pas être problématique. Il s'agit notamment de : la disjonction- la conjonction- la négation- les lois de De Morgan- les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ (il existe...**tel que**) - l'interversion des quantificateurs- la négation de propositions quantifiées non implicatives (dans un premier temps !).*

Deuxième volet : *il aborde le problème de l'implication (et de l'équivalence) ;*

N.B : Nous avons proposé un mode d'introduction de l'implication (cf.[3]).

Troisième volet : *initiation aux différentes méthodes usuelles de raisonnement mathématique (règle de la contraposition, du contre-exemple, le raisonnement par récurrence, la réduction à l'absurde, ...)*

Quatrième volet : *il consiste à mener un travail spécifique d'une part sur la négation (et surtout sur sa formulation sous forme positive) et d'autre part sur le contrôle des équivalences* *(concernant le contrôle des équivalences, le traitement des systèmes d'équations semble pouvoir être un bon support, parmi d'autres).*

Enfin, un projet d'un cours de logique à l'attention des étudiants de DEUG-A a été proposé. Mais la question de l'apport effectif d'un enseignement de la logique ainsi que ce que seraient les moyens didactiques permettant d'en assurer ou d'en améliorer l'efficacité reste à tester. Cela dépasse le cadre de la présente étude et constitue une de nos perspectives.

II.2. Projet d'un cours de logique pour le DEUG-A (pp.16-29)

Nous avons insisté au chapitre V sur l'importance primordiale que nous accordons, dans un enseignement de logique, à l'acquisition d'un savoir-faire logique. Nous avons en particulier mis l'accent sur la nécessité de mener, avec la participation des apprenants et sur des activités convenablement choisies, un travail spécifique sur un certain nombre de questions([3]). Cependant, l'acquisition de ce savoir-faire logique ne saurait se mettre en place sans un minimum de connaissances de base en logique.

Nous proposons ici un projet d'un cours correspondant à ce que nous considérons être ce minimum de connaissances en logique. Nous y développons certains des volets déjà mentionnés ci-dessus.

Cela dit, ce document présente un produit à usage direct, destiné à des étudiants des filières scientifiques à l'université. Il peut être considéré comme une réponse urgente au manque actuel dans l'attente que d'autres travaux sur le sujet soient menés en vue d'apporter davantage de renseignements en mesure de permettre un réajustement du présent projet.

Rmarque : Ce document ne saurait en aucun cas, à lui seul, fournir à l'étudiant le savoir-faire en logique qui soit assez efficace. L'apport de l'enseignant, moyennant une méthode active où le feed-back jouerait son plein rôle reste irremplaçable. La mise , à la disposition des étudiants, du présent document, pourrait alors leur servir de référence (en y recourant à chaque fois que besoin est) et aider ainsi l'enseignant dans son activité.

ELEMENTS DE LOGIQUE

A- CALCUL DES PROPOSITIONS.

1- Qu'est-ce qu'une proposition mathématique ?

En mathématique, on appelle *proposition* toute expression correctement formée, ayant un sens et à laquelle on peut, sans ambiguïté, attribuer la "valeur" *vrai* ou la "valeur" *faux*.

Exemples : a) "L'entier 3 est un nombre impair " est une proposition (vraie) ;
b) "Le nombre 5 divise 8" est une proposition (fausse) ;
c) "L'entier 5 est dérivable par 8" n'est pas une proposition (pas de sens).

N.B : Nous représentons souvent une proposition par une seule lettre : p, q, r ...

2- Négation d'une proposition.

*La **négation** d'une proposition p est une proposition qui est **vraie** si p est **fausse**, **fausse** si p est **vraie**.*

Notation : On désignera par "non p" la négation de p.

Exemples : a) p : "L'entier 5 divise 6"(fausse) non p : "L'entier 5 ne divise pas 6"(vraie) ;
b) q : "L'entier 2 est pair" (vraie) non q : "L'entier 2 est impair" (fausse).

Remarques : i) Ainsi, pour montrer que p est vraie (resp. fausse), il suffit de montrer que sa négation (non p) est fausse (resp. vraie).
ii) Notez que dans l'exemple b) ci-dessus, nous avons traduit la négation "L'entier 2 n'est pas pair" sous une forme positive "L'entier 2 est impair". Dans la pratique mathématique, vous aurez souvent intérêt à exprimer une négation sous forme entièrement positive.

3- Conjonction de deux propositions.

Définition : *Soient p, q deux propositions. La **conjonction** de p et de q est la proposition vraie dans le seul cas où p et q sont toutes deux vraies, fausse dans tous les autres cas.*

Notation : On désignera par "p et q" (ou par "$p\wedge q$") la conjonction de p et de q.

Exemples : a) p : "Le nombre 9 est premier " (fausse) q : "L'entier 2 est pair " (vraie)
p et q : "Le nombre 9 est premier et l'entier 2 est pair" (fausse).

b) (exemple tiré de l'algèbre linéaire)

Soit une famille $\mathfrak{F}$ d'éléments d'un espace vectoriel E.

p : "La famille $\mathfrak{F}$ est libre" q : "La famille $\mathfrak{F}$ est génératrice"

p et q : "La famille $\mathfrak{F}$ est une base"

N.B : Soient E un ensemble, A et B deux parties de E. L'intersection de A et B est l'ensemble

$$A \cap B = \{x \in E \; ; \; x \in A \text{ et } x \in B\}$$

4- Disjonction de deux propositions.

Définition : *Soient p, q deux propositions. La **disjonction** de p et de q est la proposition vraie si **l'une au moins** des propositions p, q est vraie, fausse si p et q sont toutes deux fausses.*

Notation : On désignera par "p ou q" (ou par "$p \vee q$") la disjonction de p et de q.

Exemples : a) p : "L'entier 7 est divisible par 2"(fausse) q : "L'entier 4 est pair"(vraie)

p ou q : "L'entier 7 est divisible par 2 ou l'entier 4 est pair" (vraie)

b) Soient A et B deux parties d'un ensemble E et $x \in E$.

p : "$x \in A$" q : "$x \in B$"

p ou q : "$x \in A \cup B$"

N.B : Soient A et B deux parties d'un ensemble E. La réunion de A et B est l'ensemble

$$A \cup B = \{x \in E \; ; \; x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

5- Quelques règles de "calcul".

Les propriétés ci-après sont très utiles pour "calculer" sur des propositions.

Soient p, q, r trois propositions. On a :

* non (p et q) $\vdash\!\dashv$ non p ou non q * non (p ou q) $\vdash\!\dashv$ (non p) et (non q)

($\vdash\!\dashv$ se lit :"est synonyme de")

* non(non p) $\vdash\!\dashv$ p

* p ou q $\vdash\!\dashv$ q ou p * p et q $\vdash\!\dashv$ q et p

* (p ou q) et r $\vdash\!\dashv$ (p et r) ou (q et r) * (p et q) ou r $\vdash\!\dashv$ (p ou r) et (q ou r)

B- LES QUANTIFICATEURS.

Soient E un ensemble et p(x) une propriété dépendant de x, $x \in E$ (on dit aussi un prédicat dans E à une variable x). Considérons le sous-ensemble suivant :

$$E_p = \{x \in E \; ; \; p(x)\}$$

(lire : «E_p est l'ensemble des éléments $x \in E$ vérifiant p(x)»).

1- Quantificateur universel

Si $E_p = E$, c'est à dire si tous les éléments de E vérifient p(x), on écrira :

$$(\forall\ x \in E)\ p(x) \quad \text{ou encore : } \forall\ x \in E,\ p(x)$$

(lire : «quel que soit $x \in E$, on a p(x)» ou : «pour tout $x \in E$, on a p(x)»)

Exemple : $(\forall\ x \in \mathbb{R})\ x^2 + x + 1 > 0$.

2- Quantificateur existentiel.

Si $E_p \neq \varnothing$, c'est-à-dire s'il existe au moins un élément $x \in E$ qui vérifie p(x) , on écrira :

$$(\exists\ x \in E)\ p(x)$$

(lire : «il existe au moins un $x \in E$ tel que p(x)» ou : «pour au moins un $x \in E$, x vérifie p(x)»).

Exemple : $(\exists\ n \in \mathbb{N})\ 2^n < n^2$ ($n = 3$, par exemple).

NOTE : Dans un texte mathématique, "**il existe un...**" signifie "**il existe au moins un ...**"

3- Interversion de quantificateurs.

On ne change pas le sens d'une expression en intervertissant deux quantificateurs de *même nature consécutifs*.

En général, si on intervertit deux quantificateurs de *natures différentes*, le sens de l'expression change.

Exemples : Echange de quantificateurs de même nature :

$$((\forall\ x \in \mathbb{R})(\forall\ y \in \mathbb{R})\ x + y = y + x) \longleftrightarrow ((\forall\ y \in \mathbb{R})(\forall\ x \in \mathbb{R})\ x + y = y + x)$$

$$((\exists\ n \in \mathbb{N})(\exists\ m \in \mathbb{N})\ n + m = 1) \longleftrightarrow ((\exists\ m \in \mathbb{N})(\exists\ n \in \mathbb{N})\ n + m = 1)$$

Echange de quantificateurs de natures différentes :

$(\forall\ x \in \mathbb{R})(\exists\ y \in \mathbb{R})\ x + y = 0$ est vraie, alors que $(\exists\ y \in \mathbb{R})(\forall\ x \in \mathbb{R})\ x + y = 0$ est fausse.

Dans la première proposition, y dépend de x, mais dans la seconde, y doit être **indépendant** de x.

4- Négation et quantificateurs.

La négation de :	$(\forall\ x \in E)\ p(x)$	est :	$(\exists\ x \in E)$ (non p(x)),
la négation de :	$(\exists\ x \in E)\ p(x)$	est :	$(\forall\ x \in E)$ (non p(x)).

Exemple. Soient E et F deux ensembles, f et g deux applications de E dans F. On sait que

$$f = g \longleftrightarrow (\forall\ x \in E)\ f(x) = g(x).$$

On en déduit que

$$f \neq g \longleftrightarrow (\exists\ x \in E)\ f(x) \neq g(x).$$

C- IMPLICATION LOGIQUE - EQUIVALENCE LOGIQUE

1- Implication logique.

Définition : *Soient p, q deux propositions quelconques. L'implication "$p \Rightarrow q$" est, par définition, la proposition "(non p) ou q".*

La table suivante (dite table de vérité de l'implication $p \Rightarrow q$) vous permettra de voir dans quels cas la proposition "$p \Rightarrow q$" est vraie et dans quels cas elle est fausse :

p	q	non p	$p \Rightarrow q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

(V = Vraie, F = Fausse)

Ainsi, on constate que "$p \Rightarrow q$" est fausse dans le seul cas où p est vraie et q est fausse, et qu'elle est vraie dans tous les autres cas (**en particulier si p est fausse**).

Remarques : i) $p \Rightarrow q$ se lit «p implication q» ou encore « si p, alors q»

ii) La négation de " **$p \Rightarrow q$** " est la proposition " **p et (non q)** ". En effet :

$p \Rightarrow q \longmapsto\!\!\!\!\longleftarrow$ (non p) ou q

d'où : non ($p \Rightarrow q$) $\longmapsto\!\!\!\!\longleftarrow$ p et (non q) (appliquez les règles de calcul)

Exemple en algèbre linéaire. : Soit E un espace vectoriel et $u_1, u_2, ..., u_s$ des vecteurs de E. On dit que les vecteurs $u_1, u_2, ..., u_s$ sont linéairement indépendants si :

$(\forall(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s)\in\mathbb{R}^s)\ (\alpha_1u_1 + \alpha_2 u_2 +.. + \alpha_su_s = 0_E \Rightarrow (\alpha_1 = 0)\wedge(\alpha_2 = 0)\wedge...\wedge(\alpha_s = 0))$

Il s'en suit que $u_1, u_2, ..., u_s$ seront linéairement dépendants si :

$(\exists(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s)\in\mathbb{R}^s)\ (\alpha_1u_1 + \alpha_2 u_2 +.. + \alpha_su_s = 0_E$ et $(\alpha_1\neq 0)\vee(\alpha_2 \neq 0) \vee...\vee(\alpha_s\neq 0))$

iii) **Dans la pratique, pour démontrer qu'une implication "$p \Rightarrow q$" est vraie, il suffit de supposer que p est vraie et de démontrer alors que q est vraie aussi (l'écriture sous la forme «(non p) ou q » est souvent inutile dès lors que l'on sait nier "$p \Rightarrow q$")**

iv) En mathématiques, les expressions "**Pour que p, il faut q**" et "**pour que q, il suffit que p**" expriment toutes deux la même implication "**$p \Rightarrow q$**" (notez l'ordre des propositions p et q).

v) A partir d'une implication "$p \Rightarrow q$" on peut construire :

- sa réciproque "$q \Rightarrow p$" (à ne pas confondre avec"$p \Rightarrow q$")
- sa contraposée: "non $q \Rightarrow$ non p"

Et on démontre que : $q \Rightarrow p \longmapsto\!\!\!\!\longleftarrow$ non $q \Rightarrow$ non p

Ainsi, il revient au même de démontrer une implication ou sa contraposée (voir : méthodes de démonstration)

vi) Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Démontrer que $A \subset B$ revient à établir la proposition : $(\forall\ x\in E)\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$

2- Equivalence logique.

Définition : *Soient p, q deux propositions.On définit l'équivalence logique de p et de q comme étant la conjonction de "$p \Rightarrow q$" et de sa réciproque "$q \Rightarrow p$".*

Notation : On notera $p \Leftrightarrow q$ l'équivalence de p et q.

La table de vérité de "$p \Leftrightarrow q$" montre qu'elle est vraie si p et q sont toutes deux vraies ou si p et q sont toutes deux fausses, et qu'elle est fausse dans les autres cas.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

(table de vérité de : $p \Leftrightarrow q$)

Remarques : i) Souvent, dans les textes mathématiques, on exprime l'équivalence "$p \Leftrightarrow q$" par : "p si et seulement si q" ou encore par "pour que p, il faut et il suffit que q".
(Voir aussi le paragraphe sur les conditions nécessaires et suffisantes dans "Méthodes de démonstration")

ii) Soient p, q deux propositions, on a : $p \Leftrightarrow q \longmapsto q \Leftrightarrow p$

iii) Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Par définition

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ et } B \subset A$$

Ainsi, démontrer que A = B revient à établir les deux propositions :

$$(\forall x \in E)\ (x \in A \Rightarrow x \in B), \quad (\forall x \in E)\ (x \in B \Rightarrow x \in A)$$

IMPORTANT !

L'emploi des symboles logiques ($\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$) est soumis à des règles. Ainsi, il faut éviter de mélanger, n'importe comment, texte en langue courante et symboles.

Par exemple, une écriture du type :

« $\exists$ un entier naturel n tel que $\forall$ l'entier naturel m, on ait : $n \leq m$.»

est à proscrire. Une écriture correcte serait :

"Il existe un entier naturel n tel que pour tout entier naturel m on ait : $n \leq m$."

Ou bien : "$(\exists\, n \in \mathbb{N})\ (\forall\, m \in \mathbb{N})\ n \leq m$"

En revanche, on peut écrire des phrases telles que :

- On sait que: $(\exists\, n \in \mathbb{N})\ (\forall\, m \in \mathbb{N})\ n \leq m$.
- Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que : $(\forall\, x \in \mathbb{R})\ f^3(x) = 1$.

METHODES DE DEMONSTRATION

En mathématiques, déduire (ou démontrer) un certain résultat C (habituellement appelé conclusion) à partir d'un certain autre résultat H (habituellement appelé hypothèse) revient à montrer que C est vrai dès que H est vrai (on dira alors que «C se déduit de H» ou que «C résulte de H» ou encore que «C est une conséquence de H»...etc).
Or, la déduction mathématique s'effectue conformément à des règles de logique et on dispose d'un certain nombre de méthodes de démonstration qui permettent de maîtriser le raisonnement mathématique.

A- Méthodes usuelles de démonstration :

- *Règle du détachement ;*
- *Règle du syllogisme ;*
- *Implication directe ;*
- *Règle de la contraposition ;*
- *Méthode du contre-exemple ;*
- *Règle de la disjonction des cas ;*
- *Raisonnement par l'absurde ;*
- *Raisonnement par récurrence.*

Nous allons, dans ce qui suit, vous indiquer le principe de chacune de ces méthodes suivi, à chaque fois, d'exemples d'illustration.

1- Règle du détachement.

Principe : *Soient p, q deux propositions telles que $(p \Rightarrow q)$ soit vraie. Si de plus p est vraie, alors q est vraie (vérifiez le sur la table de vérité de $(p \Rightarrow q)$).*

Exemple : Admettez que vous travaillez dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de *dimension n* et que vous ayez à démontrer qu'une certaine famille $\mathfrak{F}$, à *n éléments*, est une base de E.
Sachant, d'après un théorème du cours (dont les hypothèses sont, ici, satisfaites), que :

"$\mathfrak{F}$ *est libre* $\Rightarrow$ $\mathfrak{F}$ *est une base*"

il vous suffirait de démontrer que la famille $\mathfrak{F}$ en question est libre, et vous en déduirez, en vertu de la règle du détachement, que $\mathfrak{F}$ est une base de E.

Application : Soit $E = \mathbb{R}^3$, $\mathfrak{F} = \{ u = (1, 1, 0) ; v = (0, 1, 1) ; w = (1, 0, 1) \}$
Montrez que $\mathfrak{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (il vous suffit de montrer que les vecteurs u, v, w sont linéairement indépendants car $\mathrm{Card}(\mathfrak{F}) = \dim\mathbb{R}^3$).

Note : Dans un exercice, avant d'appliquer un théorème, on commence par s'assurer– à l'aide d'un examen des données de l'exercice– que les conditions de son application sont toutes remplies.

2- Règle du syllogisme.

Principe : *Soient H_1, H_2, H_3 trois propositions quelconques. Si "$H_1 \Rightarrow H_2$" et "$H_2 \Rightarrow H_3$" sont vraies, alors "$H_1 \Rightarrow H_3$" est vraie (résultat démontrable à l'aide des tables de vérité).*

Exemple : Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et f une application de $I = [a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On sait que :
"f est dérivable sur I $\Rightarrow$ f est continue sur I" et "f est continue sur I $\Rightarrow$ f est intégrable sur I"
On en déduit alors que : *"f est dérivable sur I $\Rightarrow$ f est intégrable sur I"*

Note : De même, on démontre que si $p \Leftrightarrow q$ et $q \Leftrightarrow r$, alors $p \Leftrightarrow r$.
En outre, pour démontrer que $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r$ (qui veut dire $p \Leftrightarrow q$ et $q \Leftrightarrow r$), il suffit d'établir les trois implications : $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$, $r \Rightarrow p$.

Plus généralement, Soient $p_1, p_2, ..., p_n$ n propositions ; $n \in \mathbb{N}$. Pour démontrer la chaîne d'équivalences : $p_1 \Leftrightarrow p_2 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow p_n$
il suffit d'établir, par exemple, la chaîne d'implications : $\mathbf{p_1} \Rightarrow p_2 \Rightarrow ... \Rightarrow p_n \Rightarrow \mathbf{p_1}$
où $\mathbf{p_1} \Rightarrow p_2 \Rightarrow ... \Rightarrow p_n \Rightarrow \mathbf{p_1}$ signifie $\mathbf{p_1} \Rightarrow p_2$, $p_2 \Rightarrow p_3$, ... et $p_n \Rightarrow \mathbf{p_1}$.

3- Méthode de l'implication directe.

Principe : *Nous avons déjà remarqué (dans "Eléments de Logique") que pour démontrer qu'une implication "$H \Rightarrow C$" est vraie, il suffit de supposer que H est vraie et de démontrer alors que C est vraie aussi.*
Cette méthode consiste à déduire C (la conclusion) de H (l'hypothèse) moyennant une suite d'implications :

$$H \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow ... \Rightarrow C_n \Rightarrow C$$

où $C_1, C_2, ..., C_n$ sont des conclusions intermédiaires (ce schéma se trouve justifié grâce à la règle du syllogisme appliquée de proche en proche à (H, C_1, C_2), (H, C_2, C_3),..., (H, C_n, C)).

Exemple : Admettez que vous ayez à démontrer le résultat suivant :

"Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n est pair, alors n^2 est pair."

(qui peut aussi s'écrire : $(\forall n \in \mathbb{N})$ (n pair $\Rightarrow n^2$ pair))

N.B : Vous pouvez très bien vérifier que cette propriété est vraie pour des valeurs particulières de n, mais il est clair qu'il vous est impossible de la vérifier pour tous les entiers un à un.D'où la nécessité et l'importance de disposer de méthodes de démonstration !

Il s'agit, ici, de partir de l'hypothèse "n est pair", et d'arriver, au bout d'un certain nombre d'étapes, à la conclusion "n^2 est pair".

Etapes de la démonstration :

1) Traduire le fait que n est pair (n est pair signifie qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$) ;

2) Exprimer n^2 (en fonction de p) et remarquer qu'il est bien pair.

Rédaction de la démonstration :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que n est pair. Il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$.

On aura alors : $n^2 = 4p^2$, ou encore : $n^2 = 2(2p^2)$. Ce qui prouve que n^2 est pair.

Et la démonstration est, ainsi, achevée.

4- Règle de la contraposition.

Principe : *Soient H et C deux propositions. Il est alors aisé de démontrer que :*

$$(H \Rightarrow C) \vdash\!\dashv (\text{non } C \Rightarrow \text{non } H)$$

Par conséquent, $(H \Rightarrow C)$ et $(\text{non } C \Rightarrow \text{non } H)$ sont ou bien toutes deux vraies, ou bien toutes deux fausses. Mais parfois, il est plus facile de démontrer l'une plutôt que l'autre !

Exemple : *Démontrez que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\ (n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair})$.

D'après la règle de la contraposition, cela revient à démontrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (n \text{ impair} \Rightarrow n^2 \text{ impair}).$$

ce qui se fait sans aucune difficulté (écrire $n = 2k + 1$, puis...).

N.B : Pour mieux vous rendre compte de l'utilité de la contraposition dans certains cas, essayez de refaire cette démonstration sans passage à la contraposition.

5- Méthode du contre-exemple.

Principe : *Soit p(x) une propriété définie sur un ensemble E.*

On sait que la négation de : $(\forall x \in E)\ p(x)$ *est :* $(\exists x \in E)\ (\text{non } p(x))$.

Il s'en suit que pour démontrer qu'une propriété n'est pas toujours vraie, il suffit d'exhiber au moins un cas où elle est fausse, c'est à dire où sa négation est vraie (on dit alors qu'on donne un contre-exemple).

Exemple 1 : *A-t-on :* $(\forall n \in \mathbb{N})\ 2^n > n^2$?

La réponse est non, et voici un contre-exemple : pour $n = 3$, on a : $2^3 \leq 3^2$ (remarquez que, dans $\mathbb{R}$, la négation de "$a > b$" est "$a \leq b$").

Exemple 2 : *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. La réunion de deux sous-espaces de E est-elle (toujours) un sous-espace vectoriel de E ?*

Ici, donner un contre-exemple consiste à trouver un espace vectoriel E (bien précis) puis à en exhiber deux sous-espaces vectoriels A et B(tous deux bien déterminés) tels que leur réunion $A \cup B$ ne soit pas un sous-espace vectoriel de E.

Voici un tel contre-exemple :
Soient $E = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x, 0) ; x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{(0,y) ; y \in \mathbb{R}\}$.
- Vérifiez que A et B sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.
- Pour prouver que $A \cup B$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, il suffit de remarquer que $A \cup B$ n'est pas stable pour l'addition.
En effet, on a : $u = (1,0) \in A \cup B$ et $v = (0,1) \in A \cup B$ mais $u + v = (1, 1) \notin A \cup B$ (car $(1,1) \notin A$ et $(1,1) \notin B$. D'ailleurs, il est facile de voir que : $A \cup B = \{(x, y) ; xy = 0\}$

6- Règle de la disjonction des cas.

Principe : *Soient p, q deux propositions. Si "$p \Rightarrow q$" et "$(\text{non}p) \Rightarrow q$" sont vraies, alors q est vraie.*

Exemple 1 : *Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $n^2 + n$ est pair.*

Remarquons, tout, d'abord que : $n^2 + n = n(n + 1)$, puis distinguons deux cas :
- Si n est pair, alors $n(n + 1)$ est pair (un produit d'entiers est pair dès qu'un des facteurs l'est) ;
- Si n est impair, alors $n + 1$ est pair et par conséquent $n(n + 1)$ est pair.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + n$ est pair.

Exemple 2 : *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Montrons que :*

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R})\ (\forall u \in E)\ (\lambda.u = 0_E \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ou } u = 0_E)$$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in E$ tels que : $\lambda.u = 0_E$
- si $\lambda = 0$, alors l'implication ci-dessus est vérifiée ;
- si $\lambda \neq 0$, alors λ sera inversible et soit λ^{-1} son inverse.
On aura : $\lambda^{-1}.(\lambda.u) = \lambda^{-1}.0_E = 0_E$ c'est à dire : $(\lambda^{-1}\lambda).u = 0_E$ et donc : $u = 0_E$ (du fait que E est un espace vectoriel et que $\lambda^{-1}\lambda = 1$).
Conclusion : *Dans tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel E on a la propriété :*

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R})\ (\forall u \in E)\ (\lambda.u = 0_E \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ou } u = 0_E)$$

Exemple 3 : voir exercice n° 10.

7- *Démonstration par l'absurde.*

Principe : *Soit à démontrer qu'une certaine proposition p est vraie. Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer que p est fausse et de montrer que cela conduit à une certaine contradiction (on ne sait pas, a priori, ce que pourrait être une telle contradiction), ce qui nous autorise à conclure que p est vraie.*

Exemple 1 : *Soit à démontrer que* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, on peut alors écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ et a, b premiers entre eux(c'est à dire que 1 est leur unique diviseur commun).

Il s'en suit que : $2b^2 = a^2$, ce qui signifie que a^2 est pair, et donc a est pair(déjà vu).

Soit alors $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $a = 2k$, on aura : $2b^2 = 4k^2$ puis $b^2 = 2k^2$, par conséquent b est pair.

Mais alors a et b sont tous deux divisibles par 2, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que a et b sont premiers entre eux.

Conclusion : $\sqrt{2}$ *n'est pas rationnel.*

Exemple 2 : *Soit* $x \in \mathbb{R}$ *tel que :* $(\forall\ \alpha > 0)\ |x| \leq \alpha$. *Démontrez que* $x = 0$.

Procédons par l'absurde et supposons que $x \neq 0$.

Soit alors $\alpha = \frac{|x|}{2}$ (par exemple). On aura $|x| \leq \frac{|x|}{2}$ (car par hypothèse : $(\forall\ \alpha > 0)\ |x| \leq \alpha$).

Par suite $1 \leq \frac{1}{2}$ (car $x \neq 0$), ce qui est évidemment faux.

D'où : $x = 0$ (l'hypothèse $x \neq 0$ étant à rejeter).

N.B : Ce résultat intervient dans la démonstration de l'unicité de la limite, en un point, d'une fonction numérique.

8- *Démonstration par récurrence.*

Principe : *Soit* $p(n)$; $n \in \mathbb{N}$, *une propriété dépendant de n. Soit* $n_0 \in \mathbb{N}$.

Si

1°) $p(n_0)$ *est vraie*

2°) pour tout $n \geq n_0$ *l'implication* $(p(n) \Rightarrow p(n+1))$ *est vraie,*

alors

pour tout $n \geq n_0$, $p(n)$ *est vraie.*

Ce qui peut aussi s'énoncer

$$[p(n_0)\ \textbf{et}\ (\forall\ n \geq n_0)\ (p(n) \Rightarrow p(n+1))] \Rightarrow (\forall\ n \geq n_0)\ p(n)$$

Pratiquement, un raisonnement par récurrence comporte deux étapes principales :

1ère étape : on vérifie que $p(n_0)$ est vraie ;

$2^{ème}$ étape : Soit $n \geq n_0$, on suppose que p(n) est vraie, et on montre alors que p(n + 1) est vraie aussi (autrement dit, on montre que si la propriété en question est vraie à l'ordre n, alors elle est nécessairement vraie à l'ordre (n + 1) aussi).

Cela fait, on conclut alors que pour n'importe quel $n \geq n_0$, la propriété p(n) est vraie.

Exemple : *Soit à établir que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Considérons pour $n \geq 1$, la propriété p(n) : $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, puis raisonnons par récurrence (sur n).

- Pour n = 1, on a : $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$. Donc p(1) est bien vraie.
- Soit maintenant $n \geq 1$ tel que p(n) soit vraie, c'est à dire tel que : $1 + 2 \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

On aura : $1 + 2 + \ldots + n + (n + 1) = (1 + 2 + \ldots + n) + (n + 1)$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \text{ (d'après l'hypothèse de récurrence)}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

ce qui signifie que p(n + 1) est vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Remarques :

1) Au niveau de la $2^{ème}$ étape du raisonnement par récurrence, on est amené, dans certaines situations, à supposer que la propriété dont il s'agit est vraie jusqu'à l'ordre n (et non seulement à l'ordre n comme nous l'avons fait dans l'exemple ci-dessus car cela nous suffisait), puis on démontre qu'elle est, alors, vraie à l'ordre (n + 1).

2) Lors d'un raisonnement par récurrence, tâchez :

- de préciser la propriété p(n), objet de la démonstration,
- de préciser le rang de départ n_0 ,
- de formuler avec précision l'hypothèse de récurrence,
- d'indiquer, le moment venu, l'endroit d'utilisation de l'hypothèse de récurrence.

B- Conditions nécessaires- Conditions suffisantes (étude d'exemples).

Exemple 1 : Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On sait que :

"si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0"

Cela signifie : pour que f soit continue en x_0, il *suffit* que f soit dérivable en x_0,

ou encore : pour que f soit dérivable en x_0, il *faut* que f soit continue en x_0.

Ainsi, on dira, indifféremment, que la dérivabilité de f en x_0 est une *condition suffisante* pour la continuité de f en x_0, ou que la continuité de f en x_0 est une *condition nécessaire* pour la dérivabilité de f en x_0 (dans le sens : f ne peut être dérivable en x_0 sans être continue en x_0).

Intérêt pratique : La connaissance du théorème ci-dessus est d'un double intérêt :

- d'une part, il nous autorise à déduire "gratuitement" la continuité de f en x_0 si on sait, par ailleurs, que f est dérivable en x_0 (grâce à la règle du détachement).

- d'autre part, et en passant à la contraposée :

"si f n'est pas continue en x_0, alors f n'est pas dérivable en x_0"

il nous permet d'affirmer que f n'est pas dérivable en x_0 dès lors que l'on sait que f n'est pas continue en x_0 (en appliquant la règle du détachement à la contraposée).

Remarque : La continuité de f en x_0 est une condition nécessaire mais non suffisante pour la dérivabilité de f en x_0 (soit f : $f(x) = |x|$; f est continue en 0 mais elle n'est pas dérivable en 0). **Ainsi, et d'une manière générale, une condition nécessaire peut ne pas être suffisante et il convient donc de ne pas confondre ces deux notions (ce qui revient à ne pas confondre une implication et sa réciproque).**

Exemple 2 : Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. On sait que :

A est un sous-espace vectoriel de E $\Rightarrow 0_E \in A$

Par contraposition, on obtient : $0_E \notin A \Rightarrow$ *A n'est pas un sous-espace vectoriel de E*

Sous cette forme, ce résultat est très commode dans certains cas (voir TD).

Attention ! La condition $0_E \in A$ est nécessaire pour que A soit un sous espace vectoriel de E mais elle n'est pas suffisante (le seul fait que $0_E \in A$ ne permet pas de conclure).

Exemple 3 : Soient a, b deux nombres réels. On sait que : $(ab = 0) \Leftrightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$.
Ici, la condition "$a = 0$ ou $b = 0$" est nécessaire (et suffisante) pour que $ab = 0$. Mais ni "$a = 0$", ni "$b = 0$" ne sont nécessaires pour que $ab = 0$ (l'implication "$ab = 0 \Rightarrow a = 0$" est fausse ainsi que "$ab = 0 \Rightarrow b = 0$"). En revanche, chacune des conditions "$a = 0$", "$b = 0$" est suffisante pour que $ab = 0$ (chacune des implications "$a = 0 \Rightarrow ab = 0$", "$b = 0 \Rightarrow ab = 0$" étant vraie).

IMPORTANT !

- Pour établir une équivalence "$p \Leftrightarrow q$", il est souvent plus facile et plus prudent d'établir les deux implications "$p \Rightarrow q$" et "$q \Rightarrow p$" séparément (dans l'ordre de votre choix).
- Dans des questions du type "Déterminez une condition nécessaire et suffisante pour que..." il est souvent commode de commencer par chercher une condition nécessaire puis d'examiner si la condition ainsi obtenue est suffisante.

EXERCICES

(Logique et démonstration)

Pour répondre à une question mathématique, il est toujours recommandé de lire attentivement l'énoncé et de le comprendre(bien saisir l'objet de la question, distinguer les hypothèses et la conclusion, situer la question par rapport à vos connaissances mathématiques antérieures) puis de réfléchir la démarche de résolution et la(les) méthode(s) de démonstration adéquates(il ya parfois des indices orientant vers le choix de telle ou telle méthode, sinon ce choix pourrait être le fruit d'un tâtonnement !)

1- Pour chacune des propositions suivantes,

1°) dire si elle est vraie ou si elle est fausse 2°) exprimez sa négation

a) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ (x^2 = y^2 \Rightarrow x = y)$.

b) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ (x < y \Rightarrow x \leq y)$.

c) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists\, y \in \mathbb{R})\ (|x| = |y| \text{ et } x \neq y)$.

d) $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\exists\, m \in \mathbb{N})\ n \leq m$.

e) $(\exists\, m \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ n \leq m$.

f) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ ((x < y \text{ et } y < x) \Rightarrow x = y)$.

2- Quelle est la négation de chacun des énoncés suivants :

a) Tous les étudiants du groupe sont présents ?

b) Aucun bureau n'est ouvert ?

c) Chaque université a au moins une filière où tous les étudiants étudient l'anglais ?

3- Soit E l'ensemble des élèves de Lycée, S l'ensemble des élèves de Seconde de Lycée, L l'ensemble des langues prévues au Lycée. On notera $x \in \ell$ le fait que l'élève x étudie la langue ℓ .

1°) Exprimez, en langage symbolique, les propositions suivantes :

a) Chaque élève du Lycée étudie au moins une langue.

b) Toute langue prévue est effectivement étudiée.

c) Tous les élèves de Seconde suivent l'enseignement d'une même langue.

d) Tout élève de Seconde suit l'enseignement d'une seule langue.

2°) Exprimez la négation de chacune de ces propositions.

4- Soit E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F. On vous rappelle les définitions suivantes :

f est *surjective* de E sur F $\longleftrightarrow$ $(\forall y \in F)\ (\exists\, x \in E)\ y = f(x)$.

f est *injective* de E dans F $\longleftrightarrow$ $(\forall x_1 \in E)\ (\forall x_2 \in E)\ (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$.

f est *bijective* de E sur F $\longleftrightarrow$ f est surjective et injective.

Que signifie : *f n'est pas surjective ? f n'est pas injective ? f n'est pas bijective ?*

(Notez que : f est *injective* de E dans F $\longleftrightarrow$ $(\forall x_1 \in E)\ (\forall x_2 \in E)\ (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$

5- On considère la proposition (P) : $(\forall x \in [1, 2])\ (\exists\ y \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}])\ xy - x + 2y = 1$.

Montrez que P est fausse(on exprimera la négation de (P)).

6- Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. On vous rappelle que :
$A \subset B$(lire : A est inclus dans B) $\longmapsto$ $(\forall x \in E)\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$; $A = B \longmapsto A \subset B$ et $B \subset A$
Que signifie : $A \not\subset B$? $A \neq B$? $A \subset B$ et $A \neq B$?

7- Soient a, b des réels. Démontrez que : $(a \neq -1$ et $b \neq -1) \Rightarrow (a + ab + b \neq -1)$.

8- Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . Démontrez chacune des propriétés suivantes :

a) Pour tout $u \in E$, la famille $\{u\}$ est libre *si et seulement si* $u \neq 0_E$

b)Toute famille contenant une famille liée est elle-même liée.

c) Toute famille contenue dans une famille libre est elle-même libre.

9- Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel , A et B deux sous-espaces vectoriels de E.
Démontrez que pour que $A \subset B$, il suffit que B contienne une partie génératrice de A.

10- Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrez que $n^3 - n$ est un est multiple de 3 (on distinguera le cas où n est un multiple de 3 et le cas contraire).

11- Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f^3(x) = 1$(avec $f^3(x) = f(f(f(x)))$).
Déterminez f(1).

12- Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, croissante et telle que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f^3(x) = x$.
Démontrez que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) = x$ (on pourra raisonner par l'absurde).

13- 1°) Démontrez que : $(\forall\ n \in \mathbb{N})$ (9 divise $10^n + 1 \Rightarrow$ 9 divise $10^{n+1} + 1$)

2°) Déterminez l'ensemble $K = \{n \in \mathbb{N}\ ;\ 9 \text{ divise } 10^n + 1\}$

14- Démontrez (par récurrence sur n) que : $(\forall\ n \in \mathbb{N})\ (\forall a \in \mathbb{N})\ (1 + a)^n \geq 1 + na$.

15- On considère la relation de récurrence : $f(n) = af(n-1) + bf(n-2)$ (*) où a,b sont deux réels *donnés* et f une fonction *inconnue* de l'entier n.
1°) Montrez que l'ensemble des solutions de (*) constitue un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .
2°) Montrez que f est entièrement déterminée par la donnée de f(0) et f(1).
3°) En déduire que toute solution f de (*) est définie par $f(n) = \alpha f_1(n) + \lambda f_2(n)$ où f_1 et f_2 sont deux solutions particulières de (*) linéairement indépendantes et α, λ deux réels.

16-Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E.
Démontrez que si $A \subset B$, alors $A \cap \complement_E^B = \varnothing$ où $\complement_E^A = \{x \in E\ ;\ x \notin A\}$ (lire : *complémentaire* de A dans E. A ne pas confondre avec *supplémentaire* d'un sous-espace vectoriel).

REFERENCES

[1] ADDA J. *L'importance des quantificateurs dans la compréhension des mathématiques*. NICO. n°19 (p. 107– 125). 1975.

[2] DOUADY R. *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*. Thèse d'Etat, Université Paris VII 1984.

[3] EL FAQIH EL Mekki - *Place de la logique dans l'activité mathématique des étudiants scientifiques*. Thèse de Doctorat. Strasbourg. 1991.

[4] LACOMBE D. *Sur les mots et les symboles*. Bulletin APMEP. n° 239 (p. 343–355). 1964.

LOGIQUE ET ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUE

Ce document cherche à attirer l'attention des professeurs de mathématique sur les effets négatifs que pourrait avoir un manque de connaissances en logique. Nous leur y faisons part des résultats d'une enquête sur la logique, que nous avons menée auprès d'étudiants de DEUG-A. De ces résultats ressort un double constat : les manques en logique existent bel et bien et semblent constituer un véritable handicap. Une réponse du côté de l'enseignement à la situation actuelle semble s'imposer.

Ainsi, des propositions pour une mise en place d'un enseignement de la logique-outil occupe une bonne partie du présent document, avec un nouveau regard sur le mode d'introduction des connaissances de base en logique mais aussi, et d'abord, sur la place qui reviendrait à la logique dans l'enseignement des mathématiques.

Mots clés : Activité mathématique- Logique-outil- Structure logique- Lois logiques- Méthodes de démonstration.

PUBLIC CONCERNE : Professeurs de mathématiques (du Lycée et de l'Université).

EDITEUR : I.R.E.M. de Strasbourg (Brochure S 141)