A VOS STYLOS

PROBLÈME 14 (proposé par D. DUMONT)

Enoncé

Démontrer l'égalité suivante pour $|x| < 1$:

$$\frac{x}{1+x} + \frac{2x^2}{1+x^2} + \frac{3x^3}{1+x^3} + \frac{4x^4}{1+x^4} + \cdots = \frac{x}{1-x} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{5x^5}{1-x^5} + \frac{7x^7}{1-x^7} + \cdots$$

Question complémentaire

Comparer à l'aide d'un micro-ordinateur les vitesses de convergence des deux séries. Comment croit la somme $S(x)$ de ces séries quand x tend vers 1^- ? (problème dont le résultat n'est pas connu par l'auteur).

Solution (de '*L'Ouvert*')

Nous allons montrer que chacun des deux membres est développable en série entière de x dans le disque $|x| < 1$, et que les deux séries sont identiques.

Pour le membre de droite, $\frac{px^p}{1-x^p} = p\sum_{k\geq 1} x^{kp}$ est majorée en module terme à terme par $p\sum_{k\geq 1}|x|^{kp}$; sommant en p impair, on obtient $\sum_{n\geq 1} b_n x^n$, avec

$$b_n = \sum_{\substack{p,k:pk=n \\ p \text{ impair}}} p = \sum_{\substack{p|n \\ p \text{ impair}}} p \;;$$

la convergence résulte de $b_n \leq \sum_{p|n} p \leq n^2$ et de la convergence de $\sum n^2 |x|^n$.

De même, à gauche, $\frac{px^p}{1+x^p} = p\sum_{k\geq 1}(-1)^{k+1}x^{kp}$, donc la somme $\sum_{p\geq 1}\frac{px^p}{1+x^p}$ vaut $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ avec

$$a_n = \sum_{p,k:pk=n} (-1)^{k+1} p = -\sum_{p|n} (-1)^{n/p} p;$$

les calculs et la convergence sont justifiés en majorant en module le terme $(-1)^{k+1}px^{kp}$ par $p|x|^{kp}$ et en contrôlant la série de séries, selon la même estimation que ci-dessus, par $\sum n^2|x|^n$.

Il ne reste plus qu'à établir $a_n = b_n$. Mettons n sous la forme $2^q m$, où m est impair. Les diviseurs impairs de n sont exactement les diviseurs de m; les diviseurs de n sont les nombres de la forme $2^r p$, où $0 \leq r \leq q$ et p divise m. Il nous suffit donc de vérifier la relation

$$-\sum_{p|m}\sum_{r=0}^{q}(-1)^{2^{q-r}\frac{m}{p}} 2^r p = \sum_{p|m} p$$

qui, puisque $\frac{m}{p}$ est impair, se ramène à

$$1 + 2 + \cdots + 2^{q-1} - 2^q = -1.$$

Nous laissons ouverte la question complémentaire. Nous publierons tout travail à ce propos, à quelque moment qu'il nous parvienne.

PROBLÈME 15

Enoncé

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $\lim_{n\to\infty} f(x+\sqrt{n}) = 0$ pour tout x. A-t-on $\lim_{n\to\infty} f(x) = 0$?

Indication

Oui ; $\sqrt{n}$ peut être remplacé par toute suite croissante u_n telle que $u_n \longrightarrow +\infty$ et $u_{n+1} - u_n \longrightarrow 0$.

PROBLÈME 16

Enoncé

Les touches $+$, $\times$, $\cdot/\cdot$ de ma calculatrice sont hors d'usage. Comment effectuer les quatre opérations en utilisant seulement des constantes et les touches de soustraction $-$ et d'inversion $1/x$?

Remarque

'*L'Ouvert*' publiera la solution du lecteur proposant une méthode de multiplication qui utilise le plus petit nombre d'opérations (soustractions et inversions).

PROBLÈME 17

Enoncé (proposé par O. ADELMAN)

Trouver tous les couples (a, b) de réels strictement positifs tels que, en posant

$$A = \{[na], n \in \mathbb{N}^*\} \text{ et } B = \{[nb], n \in \mathbb{N}^*\}$$

on ait $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \mathbb{N}^*$. $[x]$ est la partie entière de x.

Même question avec trois réels a, b, c tels que A, B et C forment une partition de $\mathbb{N}^*$.