LES ROULETTES D'ELLIPSES

Eugène EHRHART

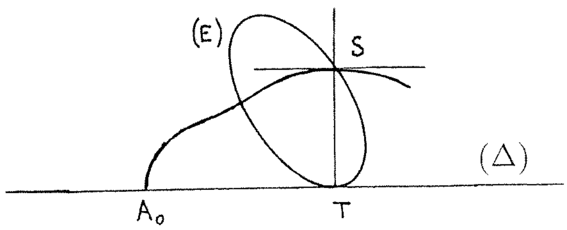
Nous alllons chercher les diverses formes de la trajectoire d'un point du bord d'une ellipse qui roule sans glisser sur une droite. A une similitude près, ces courbes dépendent de deux paramètres, alors qu'est unique la "*roulette*" de PASCAL, la cycloïde, courbe la plus étudiée au 17[e] siècle. On s'appuiera sur deux propositions qui remontent à ce temps-là.

Soit dans un plan une courbe (C) qui roule sans glisser sur une courbe fixe (C') et soit T le point de tangence de (C) et (C') à un moment donné. Alors :

Lemme 1. T est le centre instantané de rotation de (C).

Lemme 2. La trajectoire du point du bord de (C), qui se trouve en T au moment donné, a en T une tangente de rebroussement qui est la normale commune de (C) et (C').

Soit (E) une ellipse d'axes $2a, 2b$ $(a > b)$ et de périmètre p, roulant sans glisser sur une droite (Δ), et soit M un point du bord de (E). Il est évident que la trajectoire de M se compose d'une suite d'arches égales $\overset{\frown}{A_0A_1}$, $\overset{\frown}{A_1A_2}$ ... telles que les points $A_0, A_1, A_2, \ldots$ se trouvent sur (Δ) et que $A_0A_1 = A_1A_2 = \ldots = p$. Il suffit donc détudier l'arche $\overset{\frown}{A_0A_1}$, qui présente en A_0 et A_1 des tangentes de rebroussement perpendiculaires à (Δ) (lemme 2).



Si S est un sommet de l'arche $\overset{\frown}{A_0A_1}$ par rapport à (Δ), le centre instantané de rotation T de (E), point de contact de (E) et de (Δ) (lemme 1), est sur la perpendiculaire en S à (Δ). **Pour un point M donné du bord de (E) le nombre de sommets de l'arche $\overset{\frown}{A_0A_1}$ par rapport à (Δ) est donc égal à celui des normales à (E) passant par M, diminué d'une unité, car la normale en M ne convient pas, et éventuellement d'une autre unité comme on le verra.**

La normale en un point (x, y) de l'ellipse (E), rapportée à ses axes, a pour équation

$$\frac{a^2X}{x} - \frac{b^2Y}{y} = a^2 - b^2.$$

Cette normale passe par un point $M(\alpha, \beta)$ de (E) si

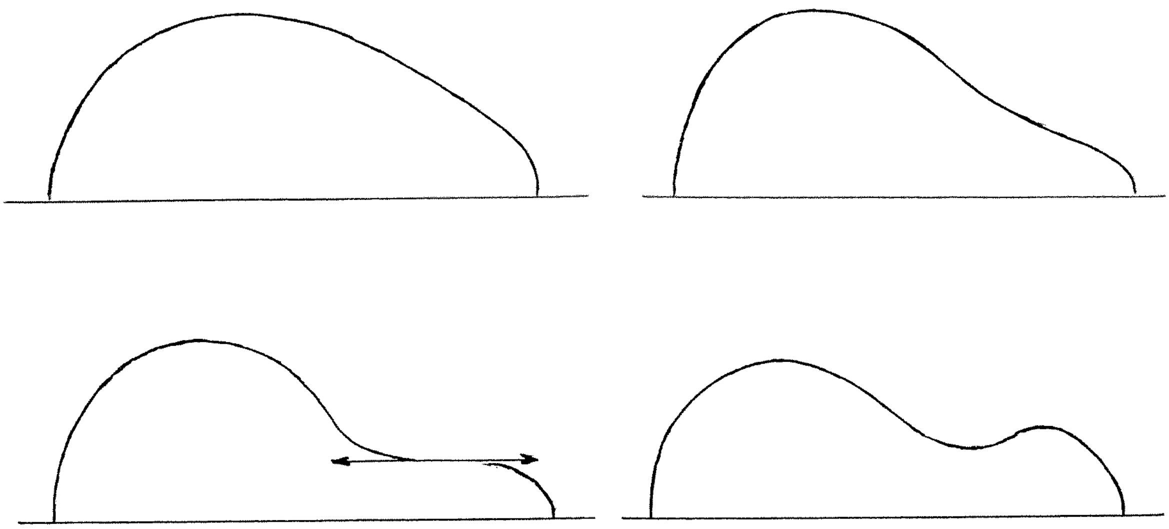
$$(1) \qquad \frac{a^2\alpha}{x} - \frac{b^2\beta}{y} = a^2 - b^2.$$

Le point (x, y) appartenant à (E), on a aussi

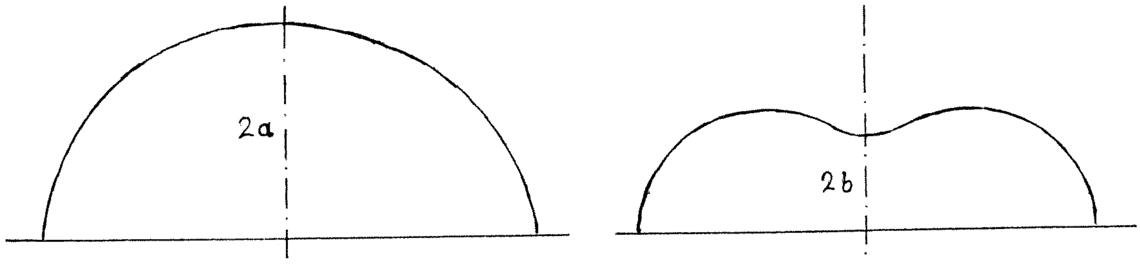
$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Outre le point (α, β), les coniques représentées par les équations (1) et (2) ont en commun soit un ou trois points, soit plus rarement deux, dont un de tangence. L'arche $\widehat{A_0A_1}$ a donc un ou trois sommets, soit plus rarement un sommet et un point d'inflexion à tangente parallèle à (Δ).

Voici donc les quatre types de formes que peut avoir l'arche $\widehat{A_0A_1}$, à une symétrie près par rapport à la médiatrice de A_0A_1 :



Si le point M donné sur le bord de (E) est un de ses sommets, l'arche $\widehat{A_0A_1}$ a un axe de symétrie :



Remarque : Rappelons une prouesse de ROBERVAL : avant l'invention du calcul intégral, il a montré que **l'aire sous l'arche de la cycloïde est trois fois celle du cercle générateur**. Sa démonstration (*) simple et courte est une merveille. On sait aussi que PASCAL montra que **la longueur de l'arche de la roulette de cercle est quatre fois sa hauteur**.

Pour la roulette d'ellipse il semble difficile d'établir l'équation à deux paramètres de son arche. D'ailleurs une équation compliquée, où figurerait nécessairement une intégrale elliptique, se prêterait mal à la construction des courbes A_0A_1. Quant au calcul de l'aire sous l'arche ou de sa longueur, on ne peut sans doute y songer, même s'il y a symétrie.

> Il faut se battre sur tous les fronts de la liberté.
> Quand les nazis s'en sont pris aux communistes, je me suis tu, car je n'étais pas communiste.
> Quand ils ont emprisonné les socio-démocrates, je n'ai rien dit, car je n'étais pas socio-démocrate.
> Quand ce fut le tour des catholiques, je n'ai pas protesté, car je n'étais pas catholique.
> Quand ils ont emmené les juifs, je n'ai pas bougé, car je n'étais pas juif.
> Quand ils sont venus chez moi, il n'y avait plus personne pour protester.
>
> Martin NIEMÖLLER.

(*) Voir DAHAN-DALMEDICO et PFEIFFER, *Routes et dédales*, pp. 168–169. Ed. Blanchard, 1982.