GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE ÉLÉMENTAIRE DES COURBES PLANES (*)

Jean-Yves MÉRINDOL

Introduction

Les courbes planes sont des objets mathématiques tout à fait naturels. A un niveau élémentaire, on rencontre les droites puis les coniques. Dans ce qui suit, on s'intéresse aux courbes algébriques de tout degré.

On verra que l'on peut obtenir des résultats valables pour ces courbes en n'utilisant que deux outils.

Le premier est le maniement des positions générales : "*en général*" deux droites se coupent en un seul point; "*en général*" par cinq points, il passe une conique et une seule. Dans les deux cas, avec un peu de travail, on peut explicitement préciser les situations où l'énoncé est faux. Mais l'idée qui sera utilisée dans la suite, de façon purement heuristique, est que des calculs corrects faits sans trop de précaution (par exemple en utilisant sans le vérifier que n équations linéaires sont indépendantes) sont "*en général*" vrais. On pourrait effectivement démontrer ces énoncés mais ceci demande un travail technique important qui cache les idées essentielles des démonstrations. On a donc délibérément sacrifié la rigueur au profit de la géométrie.

Le deuxième outil est plus technique. Il s'agit du théorème de BÉZOUT : en général une courbe de degré n coupe une courbe de degré m en $m \times n$ points.

En fait ces deux outils : position générale et théorie de l'intersection sont les deux outils fondamentaux d'étude du chapitre de la géométrie projective enumératique.

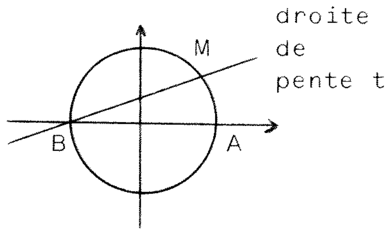
1) Courbes et intégrales

Quand on veut calculer des primitives d'une fonction F, on a souvent bien du mal à trouver le bon changement de variable. Mais on comprend mieux les choses en introduisant un peu de géométrie. Prenons un exemple simple : $\int \sqrt{1-x^2}dx$. On pose $y = \sqrt{1-x^2}$ d'où $x^2 + y^2 = 1$ qui est l'équation d'une courbe (ici un cercle) que l'on va paramétriser. Dans le cas présent du cercle, il y a deux possibilités :

— Soit une paramétrisation transcendante avec les fonctions sinus et cosinus.
— Soit une paramétrisation algébrique en posant $t = \tan(u/2)$ où t est la pente d'une droite variable passant par B (voir dessin) qui recoupe le cercle en M dont

(*) Conférence donnée le 21 février 1990 à Strasbourg.

les coordonnées sont $\big((2t/1+t^2);\ (1-t^2/1+t^2)\big)$.

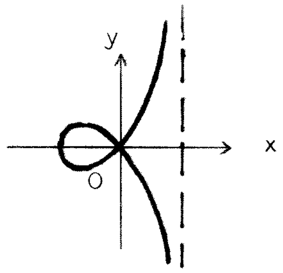


Dans le cas présent, le remplacement, dans le calcul de la primitive, de x par $(2t/1+t^2)$ permet de se ramener à une fraction rationnelle.

Un autre exemple, plus compliqué, est donné par les fonctions elliptiques, appelées ainsi car elles permettent le calcul de la longueur d'un arc d'ellipse. Considérons l'ellipse d'équation $x^2+(y^2/a^2)=1$ $(a>1)$ (ou $y=\pm a\sqrt{1-x^2}$). Pour calculer la longueur de l'arc d'une telle ellipse, on considère l'élément différentiel ds avec $ds^2=dx^2+dy^2=dx^2(1+k^2x^2)/(1-x^2)$ où l'on a posé $k^2=a^2-1$. On est ainsi amené à calculer $\int\sqrt{(1+k^2x^2)/(1-x^2)}dx$. Comme dans le cas du cercle, on pose $y=\sqrt{(1+k^2x^2)/(1-x^2)}$ et on voudrait pouvoir paramétrer la courbe $y^2(1-x^2)-(1+k^2x^2)=0$. Or on peut prouver (et on le fera plus loin) que ceci est impossible par les fractions rationnelles, d'où la nécessité de recourir à des fonctions spéciales, transcendantes, qui sont les fonctions elliptiques. On verra qu'en général les courbes de degré supérieur ou égal à 3 ne peuvent pas être paramétrées par des fonctions rationnelles. Il y a cependant quelques contre-exemples :

— La strophoïde d'équation $x(x^2+y^2)=x^2-y^2$ soit $y^2=(x^2-x^3/1+x)$ peut être paramètrée par :

$$\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{t(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases}$$

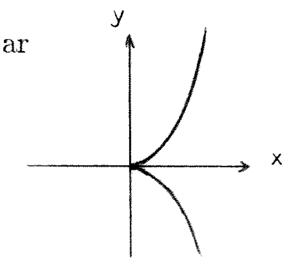


ce qui permet le calcul de

$$\int\sqrt{\frac{x^2-x^3}{1+x}}dx.$$

— La cissoïde d'équation $x(x^2+y^2)=y^2$ paramétrée par

$$\begin{cases} x=\dfrac{t^2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{t^3}{1+t^2}. \end{cases}$$



Dans ces deux cas, ce qui permet la paramétrisation, c'est l'existence d'un point double par lequel on fait passer une droite de pente t qui recoupe la courbe en un unique point M dont les coordonnées s'expriment justement à l'aide des fractions rationnelles en t indiquées ci-dessus.

2) Le bon cadre d'étude :

Il y a essentiellement deux façons de définir une courbe algébrique plane (C). A l'aide d'une équation cartésienne :

$$(C) = \{(x; y)/P(x, y) = 0\}$$

où P est un polynôme de degré d et par définition d est le degré de la courbe. Mais deux polynômes distincts peuvent donner la même courbe (vue comme sous-ensemble du plan) : $x^2 + y^2 - 1 = 0$ est équivalent à $(x^2 + y^2 - 1)^2 = 0$ et dans le cas des réels à $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 + 1) = 0$.

La deuxième méthode consiste en une représentation paramétrique :

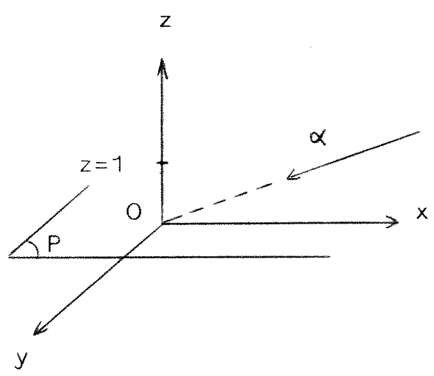
$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (f(t); g(t)) \end{aligned}$$

où f et g sont deux fractions rationnelles.

La question qui se pose est le passage d'une forme à l'autre. Si le passage d'une représentation paramétrique à une équation cartésienne ne pose pas de grandes difficultés théoriques (on élimine t entre $x = f(t)$ et $y = g(t)$), il n'en est pas de même en sens inverse. En fait *en général* une courbe définie par une équation algébrique ne peut être paramétrée par des fractions rationnelles.

Pour comprendre cela plus facilement, il faut se placer non pas dans $\mathbb{R}^2$ où les calculs sont beaucoup trop compliqués, mais dans $\mathbb{C}^2$ et même plutôt $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, plan projectif complexe.

Définition heuristique : On appelle **plan projectif sur** $\mathbb{C}$ le plan habituel $\mathbb{C}^2$ auquel on adjoint une **droite à l'infini** de telle sorte que deux droites se coupent toujours (éventuellement à l'*infini* lorsqu'elles sont parallèles dans $\mathbb{C}^2$).



On comprend mieux cette notion si on se place dans $\mathbb{C}^2$ rapporté à un repère $(0, x, y, z)$ dans lequel on considère le plan (P) d'équation $z = 1$. Tout point α de (P) s'identifie avec une droite vectorielle de $\mathbb{C}^3$ (la droite engendrée par α : $\mathbb{C}\ .\ \alpha$), mais il existe des droites vectorielles (celles contenues dans $(x0y)$) qui ne coupent pas (P). Ce seront elles qui seront associées aux points de la droite à l'infini de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Ceci permet de donner une définition plus rigoureuse :

Définition :

a) Un point de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ est une droite vectorielle de $\mathbb{C}^3$.

b) Une droite de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ est l'ensemble des droites vectorielles contenues dans un plan vectoriel de $\mathbb{C}^3$.

La droite à l'infini de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ est associée au plan $(x0y)$. Grâce à cette définition, deux droites distinctes ont toujours un point commun et un seul (car deux plans vectoriels distincts se coupent en une droite). En géométrie projective la notion de parallèle n'existe pas.

Une courbe algébrique de (P) va être associée à un cône algébrique de sommet 0. Dans $\mathbb{C}^3$ un tel cône a pour équation un polynôme homogène à trois variable (X, Y et Z). La recherche de l'intersection de ce cône avec $Z = 0$ revient à chercher les points à l'infini de la courbe algébrique ou, ce qui revient au même, l'intersection de la courbe avec la droite à l'infini.

Il est trés facile d'obtenir l'équation du cône à partir de l'équation d'une courbe algébrique; il suffit d'homogénéiser le polynôme, c'est-à-dire de multiplier chaque monône par Z^m où m est à chaque fois le plus petit entier possible tel que tous les monômes résultant aient le même degré : celui de la courbe. En sens inverse, pour déshomogénéiser, on remplacera partout Z par 1. C'est l'opération algébrique correspondant à celle, géométrique, décrite ci-dessus.

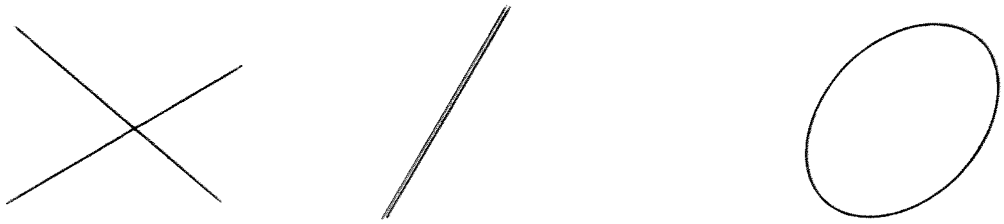
Exemples :

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \text{ donne } X^2 + Y^2 - Z^2 = 0.$$
$$X^3 + Y^3 + ZY^2 + Z^3 = 0 \text{ donne } x^3 + y^3 + y^2 + 1 = 0.$$

(X, Y, Z) seront les coordonnées homogènes d'un point de la courbe, coordonnées définies à un facteur multiplicatif non nul près, ce qui correspond au fait qu'un point de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ est une droite vectorielle de $\mathbb{C}^3$. Dans ce cadre, un cercle a toujours deux points d'intersection, éventuellement confondus, avec une droite. En particulier tous les cercles coupent la droite à l'infini ($Z = 0$) en les points $(1, i, 0)$ et $(1, -i, 0)$ appelé pour cela les points cycliques du plan. De même, deux cercles se coupent toujours en 4 points : les points cycliques et deux autres points distincts ou non.

Une parabole se distinguera par le fait qu'elle est tangente à la droite à l'infini. On le voit sur $y = x^2$ qui s'homogénéise en $YZ = X^2$ dont l'intersection avec $Z = 0$ conduit à la solution double $X^2 = 0$.

D'une façon plus générale, une conique, c'est-à-dire par définition une courbe de degré deux, ne peut présenter que l'une des feux formes suivantes :
— soit elle est dégénérée en deux droites distinctes ou non,
— soit elle n'est pas dégénérée, et à un changement de coordonnées près, son équation est $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$. Ainsi il n'y a qu'"une seule" conique non dégénérée dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, à un changement de coordonnées près.

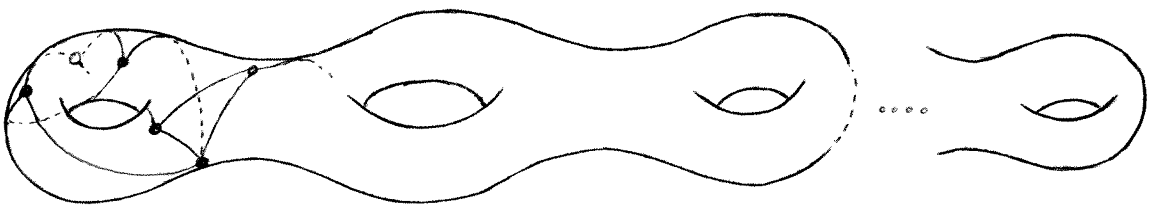


Coniques dégénérées Conique propre

Mais cette simplicité disparaît dès que le degré des courbes est strictement supérieur à 2.

3) Degré et genre d'une courbe

Un des invariants (par changement de coordonnées projective) d'une courbe algébrique est le degré. Un autre invariant est le **genre**. On sait ce qu'est le genre d'une surface topologique compacte et orientable : la sphère est de genre 0, le tore de genre 1 (il a 1 trou), ...le tore à g trous est de genre g.



Mais une courbe algébrique plane dans le plan projectif complexe est une surface topologique réelle. Localement dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, on peut utiliser les coordonnées inhomogènes, par exemple x et y. L'équation de la courbe algèbrique est alors $P(x,y) = 0$. Mais tout, ici, est dans $\mathbb{C}$. Décomposons x et y en parties réelles et parties imaginaires : $x = a + ib$, $y = c + id$ (et $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$). Alors $P(x,y) = 0$ s'écrit $Re\ P(a+ib, c+id) = Im\ P(a+ib, c+id) = 0$. Ces deux équations (réelles) déterminent dans $\mathbb{R}^4$ une surface réelle. Cet énoncé heuristique peut se justifier assez facilement. On peut même montrer que si P, $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ n'ont jamais de zéros communs (on dit, si cette condition est vérifiée partout, y compris à l'infini, que la courbe est non singulière) que la surface ainsi définie est une variété différentielle réelle de classe C^∞. Il est facile ensuite de vérifier que ces courbes algébriques non singulières sont compactes (car $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ l'est) et orientables (car les polynômes respectent l'orientation canonique de $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ déduite de celle usuelle de $\mathbb{C}$). Toute la question est alors de calculer le genre de cette surface (qui est une surface de RIEMANN).

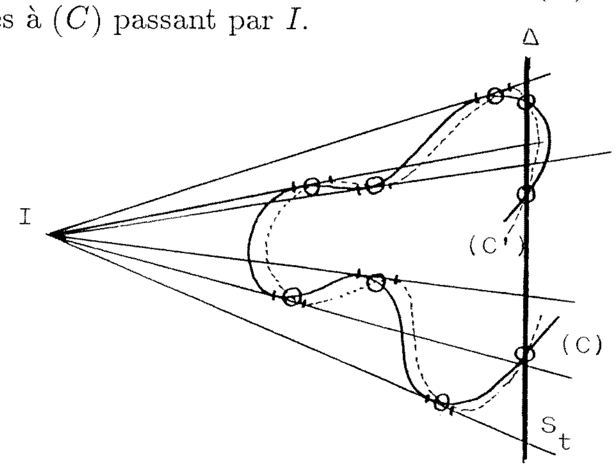
Pour cela nous admettrons **le théorème de BÉZOUT** : deux courbes algébriques (A) et (B) de degré respectif m et n ont $m \times n$ points d'intersection (si on les compte avec leur multiplicité et s'il n'y a pas de courbes algébriques dans $(A) \cap (B)$, autrement dit si $(A) \cap (B)$ est fini).

Remarque : Cet énoncé n'est valable que sur $\mathbb{C}$ (ou sur un corps algébriquement clos). On retrouve ainsi que deux coniques se coupent toujours en quatre points, ce qui n'est bien sûr pas vrai en réel : pensez aux cercles.

C'est ici que la grande simplicité du plan projectif apparaît puisque les intersections à "*l'infini*" permettent d'éviter de nombreux cas particuliers typiques du cas classique (droites parallèles, ...).

Enfin il faut savoir définir les multiplicités d'intersection. Ceci demande un peu d'algèbre linéaire mais n'est pas indispensable pour la suite. On peut se contenter de savoir qu'on peut retrouver rigoureusement les notions intuitives.

Calcul du genre : Soit (C) une courbe algébrique non singulière de degré d. Prenons un point I n'appartenant pas à $(C) \cup \Delta$. Une homothétie de centre I transforme (C) en (C') et laisse invariante la droite à l'infini Δ. Or sur Δ il y a d points de (C) donc de (C'); comme (C) et (C') sont toutes les deux de degré d (pour le voir il suffit d'écrire l'équation donnant (C') en fonction de celle de (C) et du rapport d'homothétie), ils ont d points d'intersection dont $d^2 - d$ en dehors de Δ. Or si le rapport d'homothétie est proche de 1, ces $d^2 - d$ points d'intersections seront proches des points de contact des tangentes à (C) issues de I. Il y a donc $d^2 - d$ tangentes à (C) passant par I.



Nous allons maintenant calculer le genre de (C) par triangulation : on sait que si dans une telle triangulation il y a S sommets, A arêtes et F faces alors le genre g est donné par $S - A + F = 2 - 2g$. Effectuons une triangulation sur la droite à l'infini Δ. Choisissons cette triangulation assez fine pour que les points p de Δ tels que IP soit tangent à (C) soient des sommets de la triangulation. On voit facilement que topologiquement cette droite est l'union d'un plan réel $(\mathbb{C})$ et d'un point à l'infini. Il s'agit donc de la sphère topologique (S^2). Soient s, a, f les données correspondant à cette triangulation. On a $s - a + f = 2$. Relevons cette triangulation sur (C) en prenant I comme centre de projection. A tout sommet de Δ correspondent d sommets sur (C) sauf pour les sommets de type S_t où (IS_t) est tangente à (C). On peut prouver que les droites bitangentes, c'est-à-dire tangentes à C en plusieurs points, sont en nombre fini. Quitte à déplacer I, on peut supposer que ce point n'appartient à aucune de ces droites bitangentes, Alors pour de tels sommets S_t il y a $d-1$ sommets de la triangulation sur (C). Mais les sommets du type S_t sont au nombre de d^2-d. Finalement si S est le nombre de sommets de la triangulation relevées sur (C) alors $S = ds - d(d-1)$. Les arêtes et les faces de la triangulation de Δ se relèvent en arêtes et faces de la triangulation sur (C). Mais à chaque fois, il y en a exactement d sur (C) pour une sur Δ de telle sorte que $A = da$ et $F = df$. D'où : $S - A + F = ds - da + df - d(d-1) = -d^2 + 3d = 2 - 2g$. D'où $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$.

Le raisonnement que nous venons de faire peut être techniquement rendu parfaitement correct. Reste le cas où il existe des points singuliers sur la courbe (C). Les plus simples de ces points sont les points doubles :  ou les points de rebroussement :  . La courbe n'est plus alors une variété topologique mais on peut s'intéresser à ce qu'on appelle la résolution de (C). Dans le premier cas, ceci revient à séparer les branches singulières :  , dans le second, on ne change rien ensemblistement mais on remplace "brutalement" le point de rebroussement par un point non singulier.

On peut alors adapter le raisonnement et on voit que le genre de la résolution de (C) s'abaisse : $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta$ où δ est le nombre de point double ou de "cusps".

Exemples :

degré $d = 1$: genre 0.
$d = 2$: genre 0. On savait déjà qu'une conique ressemblait algébriquement (donc topologiquement) à une droite : voir la paramétrisation donnée dans le §1.
$d = 3$: genre 1 si la courbe est lisse;
genre 0 pour la strophoïde ou la cissoïde.

4) Genre et paramétrisation :

En adaptant l'argument donné ci-dessus pour les triangulations, on peut facilement montrer le résultat suivant :

Proposition : Soient X et Y deux surfaces topologiques compactes orientables de genre $g(X)$ et $g(Y)$. S'il existe une application continue et non constante $f : X \longrightarrow Y$ respectant l'orientation de X et de Y, alors $g(X) \geq g(Y)$.

Remarque : La contrainte de respecter l'orientation est forte : ceci entraîne que f est presque partout un isomorphisme local et que les points d'exception (points de ramification) sont **isolés** et en nombre fini. Cette proposition entraîne que si on veut paramétriser une courbe (C) par des fonctions rationnelles (donc par $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$) le genre de (C) est nul. (En effet, on voit facilement que les polynômes respectent l'orientation.)

Corollaire : Une courbe de genre $g > 0$ ne peut être paramétrée par des fonctions rationnelles.

C'est ce qui ruine tout espoir de trouver un changement de variable pour le calcul de la longueur d'une ellipse qui ramène ces calculs à des calculs de primitives de fractions rationnelles.

5) Famille de courbes de même degré :

L'ensemble des équations de toutes les courbes de degré d peut être assimilé à l'ensemble formé des coefficients des monômes de leurs équations. Les monômes sont de la forme $x^\alpha y^\beta$ avec $0 \leq \alpha + \beta \leq d$. Il y a donc $\frac{(d+1)(d+2)}{2}$ monômes distincts ce qui montre que l'ensemble des équations des courbes de degré d forme un espace vectoriel de dimension $\frac{(d+1)(d+2)}{2}$. Puisqu'une même courbe est définie à une constante multiplicative près, on voit que la famille de toutes les courbes de degré d s'identifie à l'espace projectif $\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ où $N = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 1 = \frac{d(d+3)}{2}$.

Maintenant si on oblige la courbe à passer par un point P, c'est fixer une condition linéaire; il suffit pour s'en convaincre de choisir des coordonnées projectives (α, β, γ) de P et d'écrire que $P \in (C)$, d'équation $\sum_{\substack{i+j+k=d \\ i,j,k \geq 0}} a_{i,j,k} X^i Y^j Z^k$ si et seulement si la condition linéaire entre les $a_{i,j,k}$: $\sum a_{i,j,k} \alpha^i \beta^j \gamma^k$ est satisfaite. Par suite, si on impose le passage par $\frac{(d+1)(d+2)}{2} - 2$ points il restera un espace de dimension au moins 2. Si ces points sont en position assez générale, il est raisonnable de croire que les conditions linéaires imposées sont indépendantes et alors l'espace (E) des équations des courbes passant par tous ces points sera exactement de dimension 2. On vient d'obtenir ce qu'on appelle un **pinceau** de courbes. Cet espoir peut être justifié rigoureusement. Choisissons une base de cet espace de dimension 2 : $\{P_1, P_2\}$. Les équations dans (E) s'écriront toutes sous la forme $\lambda P_1 + \mu P_2$.

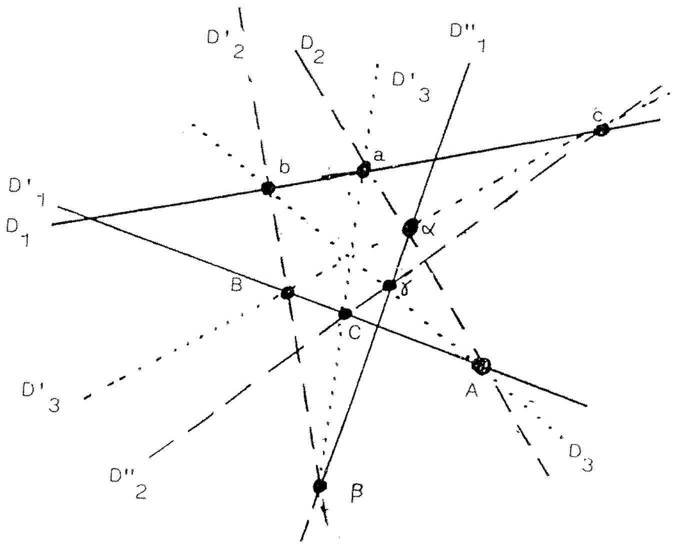
Puisque les courbes d'équation P_1 et P_2 se coupent en d^2 points, toutes les autres courbes de la famille (E) repasseront en ces d^2 points. On vient de prouver le résultat suivant :

Théorème : Choisissons $\frac{(d+1)(d+2)}{2} - 2$ points en "position générale". Toutes les courbes de degré d qui passent par ces points repassent aussi par $d - \left[\frac{(d+1)(d+2)}{2} - 2\right]$ $= \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ autres points.

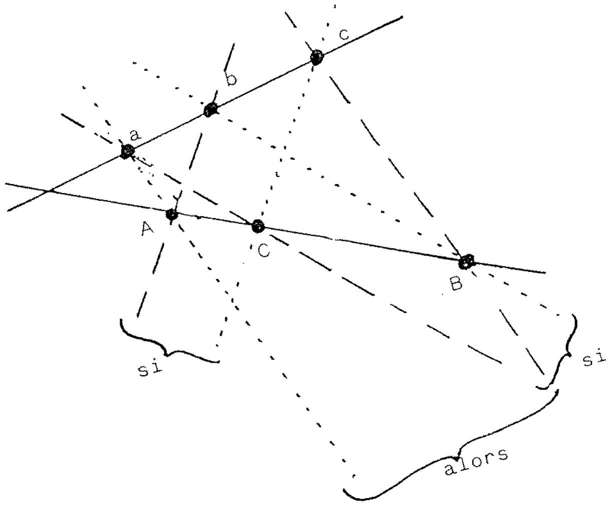
Application 1: Pour $d = 3$ on peut fixer 8 des 9 points d'intersection des deux cubiques et toutes les cubiques passant par ces 8 points repassent par un 9ᵉ point.

Si les cubiques sont dégénérées en trois droites (dont l'une est la droite à l'infini) on obtient le théorème de PAPPUS que l'on peut écrire soit sous forme projective (sans tenir compte de la droite à l'infini) soit sous forme affine (les droites se coupant à l'infini sont alors parallèles).

Forme projective : Si (D_2, D'_2, D''_2) et (D_3, D'_3, D''_3) sont deux cubiques dégénérées en trois droites, cubiques se coupant en les 9 points $A, B, C, a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ et si A, B, C d'une part et a, b, c d'autre part sont alignés, il en est de même de α, β, γ.



Forme projective du théorème de Pappus

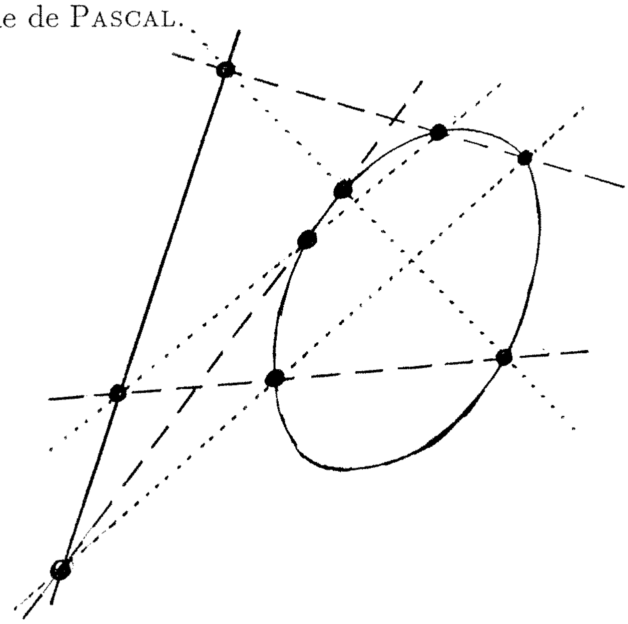


Forme affine du théorème de Pappus

En effet, la cubique contenant $A, B, C, a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ contient deux droites donc est dégénérée en 3 droites et passe par le 9^{e} point δ.

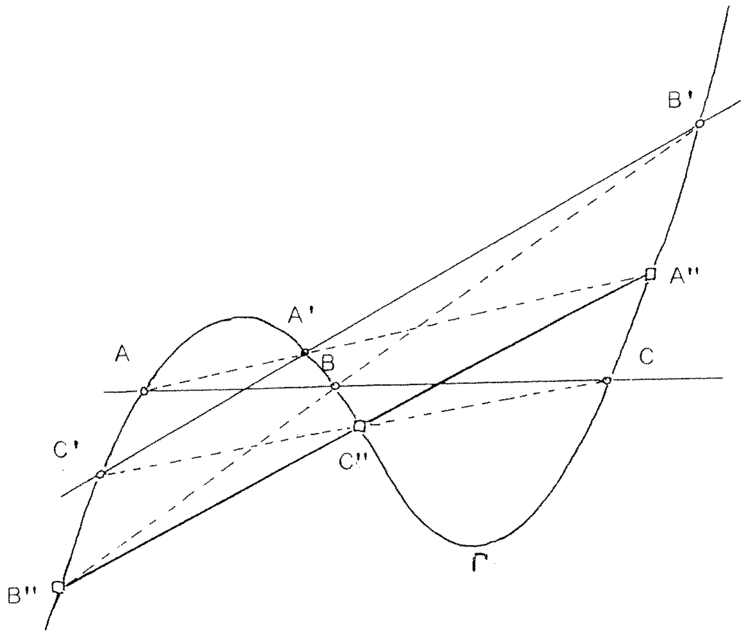
Forme affine : On considère que la droite α, β, γ est la droite à l'infini : soit (A, B, C) et (a, b, c) deux droites : si $bA \parallel (cC)$ et si $(aC) \parallel (bB)$ alors $(aA) \parallel (cB)$.

Si deux des cubiques sont dégénérées en 3 droites et l'autre en une conique et une droite, on obtient le théorème de Pascal.



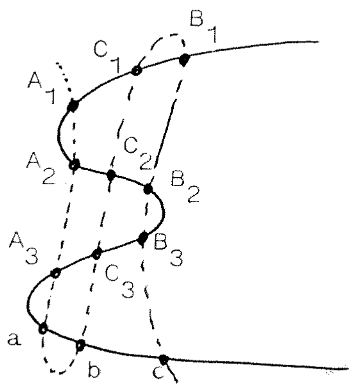
En effet les deux cubiques dégénérées en trois droites se coupent en 9 points dont 6 sont sur une conique. La cubique contenant ces 6 points et 2 autres est dégénérée en la conique et une droite, donc le 9^{e} point est aligné avec les 2 précédents.

Si deux cubiques sont dégénérées en 3 droites et l'autre est quelconque, on obtient le théorème de Lamé. Si les droites D et D' coupent la cubique respectivement en A, B, C et A', B', C' ; si A'', B'', C'' sont les points où $(AA'), (BB')$ et (CC') recoupent la cubique, alors A'', B'' et C'' sont alignés (*).



Ces résultats permettent de construire une loi de groupe sur les points d'une cubique (*).

Application 2 : On ne peut pas fabriquer une loi de groupe sur une quartique (C), mais on peut y créer quelque chose d'approchant sur les triplets de points non ordonnés par la méthode suivante :



On fixe trois points a, b, c sur une quartique. Aux deux triplets A_1, A_2, A_3 et (B_1, B_2, B_3) on associe le triplet (C_1, C_2, C_3) intersection de la quartique avec l'unique cubique passant par les 9 points $a, b, c, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$. On a presque défini une loi de groupe $*$ telle que $(A_1, A_2, A_3)*(B_1, B_2, B_3)*(a, b, c) = 0$ où 0 est l'élément neutre.

(*) Voir une démonstration de ces théorèmes dans '*L'Ouvert*' n° 54, l'article de J. MARTINET : "*Géométrie analytique sans coordonnées ... ou presque*".

La difficulté et le "presque" provient du fait que "la" cubique passant par les 9 points $a, b, c, \ldots B_3$ n'est pas toujours unique. Il peut arriver qu'il existe un pinceau de telles cubiques et le triplet (C_1, C_2, C_3) n'est plus bien défini. L'idée pour s'en sortir est alors d'identifier les divers triplets obtenus. La loi de groupe n'existe pas sur le produit symétrique $S^3(C)$ (ensemble des triplets, non ordonnés, de points de (C)) mais sur un quotient de cet espace que l'on appelle la **Jacobienne** de (C).

On peut néanmoins démontrer sur $S^3(C)$ un analogue de l'associativité, de l'existence de l'élément neutre et du symétrique, en faisant des constructions voisines de celles expliquées ci-dessus pour les cubiques planes. C'est d'ailleurs un joli exercice de trouver la raison de cette quasi-associativité (quasi car la loi de composition interne n'est pas partout définie), le dessin devenant passablement compliqué.
