CALCULS NUMÉRIQUES ET CALCULATRICE EN 3ème

GROUPE DE LIAISON 3e – 2nde

Dans le cadre d'un stage MAFPEN, une trentaine de professeurs se sont réunis pour réfléchir à différentes approches des mathématiques au niveau des 3èmes et des 2ndes. Ceux d'entre eux qui se sont intéressés au calcul numérique ont compilé ou inventé une série d'exercices qui mettent bien en évidence les possibilités et les limites, les avantages et les inconvénients du calcul sur machine. C'est volontairement qu'il n'est question ici ni des fonctions trigonométriques, ni des fonctions statistiques, ni même de la programmation élémentaire qui ne peuvent venir que dans un deuxième temps et plus sûrement au niveau de la seconde.

Exercice 1 : Qui est le plus rapide?

Dans chaque ligne, cocher d'une croix la bonne réponse. Mais attention : il ne s'agit pas de répondre au hasard ... Une bonne réponse rapporte un point, mais une mauvaise réponse enlève un point!

est égale à / l'expression	0	7	$2\sqrt{7}$	± 7	$\sqrt{7}$
$\sqrt{7} + \sqrt{7}$					
$\sqrt{49}$					
$\sqrt{28}$					
$\sqrt{63} - 3\sqrt{7}$					
$0,5[(\sqrt{7}+1)^2 - (\sqrt{7}-1)^2]$					
$\sqrt{1008} - \sqrt{847}$					
$7/\sqrt{7}$					

A faire : ① avec la calculatrice ② à la main. Chronométrer les deux étapes. Comparer les résultats et le temps consacré.

Exercice 2 : De l'usage de quelques touches

Une calculatrice scientifique reconnaît la priorité des opérations, elle possède les parenthèses et une mémoire.

$\boxed{\text{M}}$ (ou $\boxed{\text{M+}}$, $\boxed{\text{M in}}$, $\boxed{\text{STO}}$,...) s'utilise pour mettre un nombre en mémoire.

$\boxed{\text{RM}}$ (ou $\boxed{\text{MR}}$, $\boxed{\text{M out}}$, $\boxed{\text{RCL}}$, ...) permet d'utiliser le nombre placé

en mémoire.
La touche $\boxed{\text{CM}}$ permet de mettre 0 dans la mémoire.

a) Des programmes de calculs

Quelles expressions sont calculées par les programmes suivants?

1) Taper un nombre x puis $\boxed{\text{M}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{-}$ 4 $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{RM}}$ $\boxed{+}$ 5 $\boxed{=}$

2) Taper x puis $\boxed{\text{M}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{\div}$ 5 $\boxed{-}$ $\boxed{\text{RM}}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$

3) Taper x puis $\boxed{\text{M}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{(}$ $\boxed{\text{RM}}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{)}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$

4) Taper x puis $\boxed{\text{M}}$ $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{+}$ 3 $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{(}$ $\boxed{\text{RM}}$ $\boxed{-}$ 2 $\boxed{)}$ $\boxed{+}$ 3 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 5 $\boxed{=}$

b) Des expressions à calculer

Ecrire un programme de calcul pour chacune des expressions suivantes :
1) $5x + 3x^2 - 4$
2) $(x+3) \times (4-2x) + 3$
3) $\frac{3}{4}x - \frac{5}{7}x^2$
Tester ensuite ces programmes avec $x = 0$, puis $x = 3$ et enfin $x = -5$.
(Pour taper - 5 : 5 $\boxed{+/-}$)

Exercice 3 : La notation scientifique

1)

n	7	9	11	13
on calcule 283×10^n. Résultat affiché par la calculatrice				

2) a) La calculatrice affiche $\boxed{\mathbf{1.09951 \quad 12}}$.
Que signifie ce résultat? Ecrire la séquence des touches utilisées pour obtenir cet affichage. Ecrire le résultat en écriture décimale puis en toutes lettres.

b) Effectuer à la calculatrice $1,09951^{12}$ en notant la séquence des touches utilisées. Noter le résultat affiché.

Exercice 4 : Ne pas confondre x^n et $x \times 10^n$

1) Effectue sur ta calculatrice les opérations suivantes :

$3,435 \times 1000$	$3,435^3$(touche $\boxed{y^x}$)
$3,435 \times 100000$	$3,435^5$
$3,435 \times 10^5$	$3,435 \times 10^8$
$3,435 \times 10^{10}$	$3,435^{10}$

2) Quelle séquence de touches faut-il taper sur le clavier de ta calculatrice pour obtenir l'affichage : $\boxed{3.43597 \quad 10}$?

$\rightarrow$

$\rightarrow$ (2 possibilités).

3) Ecris ce nombre en écriture décimale.
Ecris-le maintenant en français en toutes lettres.

4) Effectue sur ta calculatrice, en notant la séquence des touches utilisées, le calcul de :
2^{35}
Interprète le résultat :

5) Des deux nombres ci-dessous, lequel est le plus grand? (donne un ordre de grandeur de chacun d'eux).
$a = 1,0995^{12}$
$b = 1,0995 \times 10^{12}$

Exercice 5 : La multiplication de grands nombres

Pour cette activité se munir d'une calculatrice.

a) Une multiplication
Problème : Calculer 123 456 × 987 654 à l'aide d'une calculatrice et sans *poser* de multiplication.

1. Obtient-on le résultat exact quand on tape 123 456 $\boxed{\times}$ 987 654 $\boxed{=}$ sur la calculatrice?

2. On peut écrire :
123 456 = 123 000 + 456 et 987 654 = 987 000 + 654; on a alors
123 456 × 987 654 = (123 000 + 456) × (987 000 + 654).
Comment peut-on maintenant résoudre le problème posé?

Exercice 6 : Mieux vaut réfléchir avant de calculer

1) Calculer avec différentes calculatrices les nombres $A = 923\ 761^2 - 923\ 760^2$ et $B = 28\ 923\ 761^2 - 28\ 923\ 760^2$.

2) Calculer à la main les valeurs théoriques de A et de B après avoir remarqué que **ce sont des différences de carrés.**
3) Confronter les résultats des calculatrices et les résultats théoriques.

Exercice 7 : Encore plus compliqué!

1) A l'aide de ta calculatrice, calcule les nombres suivants :

$$A = 123\ 456^2 - 123\ 455 \times 123\ 457 \qquad B = 456\ 789^2 - 456\ 785 \times 456\ 793$$

$$C = 123\ 456\ 789^2 - 123\ 456\ 787 \times 123\ 456\ 791$$

(tu donneras les résultats proposés par ta machine en précisant la marque et le modèle).

2) Calculer algébriquement les résultats exacts.
Pour cela : appeler x le nombre élevé au carré; exprimer les deux autres en fonction de x puis développer les deux termes de la différence.

3) Confronter les résultats théoriques avec ceux de la machine, essayer d'expliquer l'origine des différences.

4) Reprendre la question 1) avec d'autres modèles de calculatrice.

Exercice 8 : Divisions aux résultats proches

1) Avec plusieurs modèles de calculatrices, comparer les valeurs affichées par les calculs de $\frac{33\ 461}{80\ 782}$ et de $\frac{13\ 860}{33\ 461}$.

2) Justifier, **sans les calculer**, que les produits en croix ne peuvent pas être égaux.

Exercice 9 : $\sqrt{2}$ est-il rationnel?

1) Exercice à faire **d'abord avec la calculatrice puis sans la calculatrice** : Montrer que $\sqrt{2}$ et $(10/7)$ sont voisins, mais pas égaux.

2) Avec la calculatrice, comparer à présent
a) $\sqrt{2}$ et $\frac{19\ 601}{13\ 860}$
b) $\sqrt{2}$ et $\frac{768\ 398\ 401}{543\ 339\ 720}$.

3) Pour démontrer que $\frac{19\ 601}{13\ 860} \neq \sqrt{2}$:
a) Calculer d'abord le carré de 19 601 à l'aide des produits remarquables : $(19\ 601)^2 = (19\ 600 + 1)^2 = \ldots$
b) Calculer $13\ 860^2 = (1386 \times 10)^2$
c) En déduire que $\frac{19\ 601}{13\ 860} \neq \sqrt{2}$.

4) En faisant de simples considérations sur la parité du numérateur et du dénominateur, démontrer que $\sqrt{2} \neq \frac{768\ 398\ 401}{543\ 339\ 720}$.

Exercice 10 : Où les ordres de grandeurs jouent des tours

Pierre et Nicole ont à calculer le nombre suivant :

$$A = \sqrt{10^{16} - (10^8 - 2 \times 10^{-8})^2}.$$

Pierre n'utilise que sa calculatrice. Il trouve $A = 0$. Nicole fait d'abord quelques calculs à la main. Elle trouve $A = 2$. Le résultat de Nicole est meilleur que celui de Pierre. Justifier cette affirmation.

1) Refais les calculs de Pierre sur ta calculatrice.
2) Quels sont les calculs de Nicole?
3) Pourquoi le résultat de Nicole est-il meilleur?
4) Le résultat de Nicole est-il exact, trop grand ou trop petit?

Exercice 11 : La calculatrice pour tracer une courbe

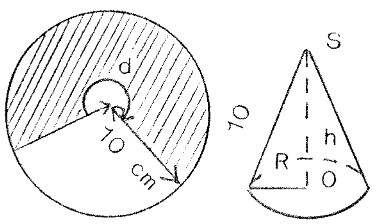
On veut tracer la courbe définie par l'équation $y = x^3 - 5x^2 + 8$ pour x compris entre -1 et 5.

1) Compléter le tableau de valeurs :

x	-1	0	1	2	3	4	5
y							

2) Indiquer la suite des touches de ta calculatrice utilisées pour calculer y en fonction de x (on pourra par exemple commencer par mettre x en mémoire).
3) Placer dans un repère orthonormé les points correspondants aux valeurs du tableau de 1) (unité : 1 cm).
4) Calculer d'autres valeurs pour préciser l'allure de la courbe.
5) y s'annule pour une valeur de x comprise entre 1 et 2. Essayer de préciser cette valeur en faisant des essais que l'on notera.

Exercice 12 : La calculatrice pour chercher un maximum



On cherche à réaliser un cône ayant le volume le plus grand possible en découpant son patron dans un disque de 10 cm de rayon.
1) Montrer que si R est le rayon du cône, son volume V est défini par la formule : $V = \frac{\Pi}{3} \times R^2\sqrt{100 - R^2}$.

2) Compléter le tableau de valeurs :

R	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V											

3) Indiquer la suite des touches de la calculatrice utilisées pour calculer V en fonction de R (on pourra par exemple commencer par mettre R en mémoire).
4) Faire une représentation graphique de la variation du volume en fonction du rayon (on mettra les valeurs de R en abscisses et les valeurs correspondantes de V en ordonnées : on prendra 1 cm pour représenter 100 cm^3).
5) En faisant des essais successifs, préciser la valeur de R pour laquelle le volume est maximal.
6) Calculer alors l'angle du secteur circulaire, patron du cône de volume maximal.

Exercice 13 : La calculatrice pour vérifier une solution

On cherche une solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

1) Compléter le tableau de valeurs

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$x^2 - x - 1$							

On pourra faire un graphique.
2) Indiquer la suite des touches utilisées pour calculer $x^2 - x - 1$ en fonction de x (on pourra, par exemple, commencer par mettre x en mémoire).
3) Préciser la solution cherchée en faisant des essais que l'on notera.
4) Calculer $x^2 - x - 1$ pour $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (indiquer la séquence de calcul en notant les touches utilisées). Que penser du résultat? Comparer le résultat selon le type de calculatrice. Démontrer (à la main) que $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ est une solution exacte de l'équation proposée.

Exercice 14 : L'utilisation de la calculatrice est-elle raisonnable?

1) Construire avec précision un triangle dont les côtés mesurent 9 cm, 8 cm et 12 cm. Ce triangle est-il rectangle? Justifier.
2) L'unité de longueur est de 5 cm pour cette question. Construire avec précision un triangle dont les côtés mesurent $(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ unités, $(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ unités et $\sqrt{10}$ unités.
3) Vérifier à l'aide d'une calculatrice si ce dernier triangle est bien un triangle rectangle.
4) Reprendre la question précédente sans calculatrice.
5) L'utilisation d'une calculatrice est-elle raisonnable pour cette vérification?

RÉPONSE A LA DEVINETTE POSÉE DANS LE N° 59 :

Qui a dit : "*Les mathématiques sont comme le porc, tout en est bon*"?

Il s'agit de LAGRANGE dont les propos sont rapportés par Emile PICARD lors de la séance d'ouverture du congrès international des mathématiques de Strasbourg en 1920.
