# QUATERNIONS, OCTONIONS ET GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

## Deuxième partie : PAPPUS, DESARGUES et l'algèbre des octonions

Marc GUINOT

Les octonions sont moins bien connus que les quaternions à tel point qu'un éminent professeur d'université m'a récemment avoué que, tout en ayant entendu parler des "*octaves de* CAYLEY", il ne connaissait pas le mot synonyme d'"*octonions*" pourtant utilisé en priorité par BOURBAKI dans ses "*Éléments de mathématiques*" (Alg. Chap. III, p. 176) et par DIEUDONNÉ dans son "*Abrégé d'histoire des mathématiques*", éd. Hermann 1978.

Leur découverte date du milieu du XIX$^{\mathrm{e}}$ siècle en liaison avec les travaux des mathématiciens de l'époque sur les "*systèmes hypercomplexes*" susceptibles de généraliser, comme le corps des nombres complexes ou celui des quaternions, la notion usuelle de nombre. Si le nom du grand mathématicien anglais Arthur CAYLEY est le plus souvent associé à cette découverte, il ne faut pas oublier celui bien moins connu de John GRAVES qui précéda CAYLEY d'un an dans ses travaux et dont les mérites en la matière ne furent connus que quatre ans plus tard, grâce à HAMILTON qui était son correspondant (cf. le livre "*Zahlen*", Grundwissen Mathematik 1, Springer Verlag, 2. Auflage, 1988, Kapitel 9).

Outre la particularité de fournir, comme nous allons le voir, un exemple de plan qui n'est que partiellement arguésien, l'algèbre des octonions est à l'origine de l'identité algébrique remarquable :

$$\begin{gathered}
(m^2+n^2+p^2+q^2+r^2+s^2+t^2+u^2)(M^2+N^2+P^2+Q^2+R^2+S^2+T^2+U^2) = \\
(mM-nN-qQ-rR-sS-tT-uU-vV)^2+(mN+nM+qR-rQ-tS+sT+vU-uV)^2+ \\
(mQ+qM+rN-nR-uS+sU+tV-vT)^2+(mR+RM+nQ-qN-vS+sV+uT-tU)^2+ \\
(mS-nT-qU-rV+sM+tN+uQ+vR)^2+(nS-mT+rU-qV-sN+tM-uR+vQ)^2+ \\
(qS+mU+nV-rT-sQ+uM-vN+tR)^2+(nS+mV+qT-nU-sR+vM-tQ+uN)^2
\end{gathered}$$

qui fait pendant aux identités plus simples de FIBONACCI

$$(m^2+n^2)(M^2+N^2) = (mM-nN)^2+(mN+nM)^2$$

et d'EULER

$$\begin{aligned}
(m^2+n^2+p^2+q^2)(M^2+N^2+P^2+Q^2) &= (mM-nN-pP-qQ)^2+(mN+nM+pQ-qP)^2 \\
&\quad +(mP+pM+qN-nQ)^2+(mQ+qM+nP-pN)^2
\end{aligned}$$

et dont HURWITZ a démontré en 1898 qu'elle n'était pas généralisable à plus de huit carrés.

Si j'en crois enfin DIEUDONNÉ, dans son tout récent livre sur l'histoire de la topologie algébrique (en anglais!), c'est l'existence de l'algèbre des octonions qui explique certaines propriétés topologiques remarquables concernant, entre autres, la sphère à 7 dimensions, mais il ne m'est pas possible de les détailler ici, faute de les comprendre moi-même (cf. Jean DIEUDONNÉ, *A history of Algebraic and Differential Topology* 1900–1960, Birkhäuser, 1989).

Comme pour les quaternions, nous ne chercherons pas à donner tout de suite une définition précise des octonions qui permettrait de rattacher ceux-ci à la sacro-sainte théorie des ensembles, mais nous demanderons au lecteur de bien vouloir admettre l'existence d'un ensemble particulier, noté $\mathbb{O}$, muni de deux lois de composition $(x, y) \to x + y$ ("l'addition") et $(x, y) \to xy$ ("la multiplication"), contenant un élément particulier, noté $p$, le tout de telle sorte que l'on ait les propriétés axiomatiques suivantes :
$(O_1)$ $\mathbb{H}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{O}$.
$(O_2)$ L'addition et la multiplication de $\mathbb{O}$ prolongent respectivement l'addition et la multiplication de $\mathbb{H}$.
$(O_3)$ L'addition dans $\mathbb{O}$ est commutative et associative.
$(O_4)$ La multiplication dans $\mathbb{O}$ est distributive par rapport à l'addition.
$(O_5)$ Tout élément de $\mathbb{O}$ peut s'écrire sous la forme $u + vp$ où $u$ et $v$ sont des quaternions.
$(O_6)$ Si $u$ et $v$ sont des quaternions quelconques, on a

$$\begin{array}{ll} (i) & u(vp) = (vu)p \\ (ii) & (up)v = (u\bar{v})p \\ (iii) & (up)(vp) = -\bar{v}u \end{array}$$

où évidemment, $\bar{v}$ est le conjugué du quaternion $v$.

Les éléments de $\mathbb{O}$ sont appelés **octonions (**ou **octaves) de Cayley**, pour être plus précis). D'après le premier axiome, tout quaternion est un octonion particulier.

Le lecteur observera tout de suite qu'il n'est pas question d'associativité, pour la multiplication, dans $(O_4)$. Vu les relations figurant dans $(O_6)$, cette associativité est extrêmement douteuse, ce qui va nous obliger à des précautions particulières dans le maniement des parenthèses.

A cause de $(O_2)$, les notations $xy$ et $x + y$ sont dépourvues d'ambiguïté. Comme de coutume, on notera $x^2$ (carré de $x$) le produit $xx$. Par contre, il ne serait pas judicieux d'introduire sans réfléchir la notation $x^3$ car rien ne prouve que $x^2x = xx^2 \ldots$

Grâce à $(O_5)$, on voit facilement que pour tout octonion $x$, on a

$$(1) \qquad 0 + x = x$$

$$(2) \qquad 1x = x1 = x.$$

En effet, $x$ étant de la forme $u + vp$ où $u$ et $v$ sont deux quaternions, on a $0 + x = 0 + (u + vp) = (0 + u) + vp = u + vp = x$ et $1x = 1(u + vp) = 1u + 1(vp) = 1u + (v1)p = u + vp = x$, en utilisant la règle (i) de $(O_6)$.

Le fait que $1x = x1$ peut se déduire de l'égalité plus générale

$$(3) \qquad ax = xa$$

pour tout octonion $x$ et tout réel $a$.

Mettons en effet $x$ sous la forme $u + vp$ avec $u$ et $v$ dans $\mathbb{H}$. Alors, grâce à (i) et (ii), $ax = a(u + vp) = au + a(vp) = au + (va)p = au + (av)p$ et $xa = (u + vp)a = ua + (vp)a = ua + (v\overline{a})p = ua + (va)p = au + (av)p$ en utilisant le fait bien connu que tout réel $a$ permute avec tout quaternion et que $\overline{a} = a$.

On a aussi

$$(4) \qquad 0x = 0$$

pour tout octonion $x$. En effet, les relations $0(u+vp) = 0u+0(vp) = 0u+(v0)p = 0 + 0p = 0p$ montrent que tout le problème est de voir que $0p = 0$. Pour cela, on observe d'abord que $(0p)p = (0p)(1p) = -\overline{1} \times 0 = 0$ d'après $(O_6)$, (iii), de sorte que l'on peut écrire soit $(0p + 0)p = (0p)p = 0$ en utilisant le fait que $0p + 0 = 0p$, soit $(0p + 0)p = (0p)p + 0p = 0 + 0p = 0p$ par distributivité. D'où l'égalité voulue.

Ces particularités du nombre 0 au sein des octonions permettent de voir que tout octonion $x$ admet un opposé $y$. En effet, si on écrit $x = u + vp$ avec $u$ et $v$ dans $\mathbb{H}$ et si on pose $y = (-u) + (-v)p$, alors $x + y = u + vp + (-u) + (-v)p = [u + (-u)] + [v + (-v)]p = 0 + 0p = 0p = 0$. Ainsi, l'ensemble des octonions est-il un groupe commutatif pour l'addition. Cela permet en particulier d'utiliser dans les calculs les écritures abrégées $x - y$ pour $x + (-y)$, $-x - y$ pour $(-x) + (-y)$, et ainsi de suite. De plus, la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition permet de justifier la règle des signes qui s'exprime par les égalités $(-x)y = -xy$, $(-x)(-y) = xy$, $(x - y)(z - w) = xz - xw - yz + yw$, etc.

Au delà de ces propriétés sans surprises, il nous faut compléter les étranges relations (i), (ii) et (iii) données dans $(O_6)$.

En premier lieu, on a

$$(5) \qquad pu = \overline{u}p$$

pour tout quaternion $u$, et

$$(6) \qquad p^2 = -1.$$

La première égalité s'obtient en introduisant le facteur 1 dans le produit $pu$ : $(1p)u = (1\overline{u})p = \overline{u}p$ grâce à (ii) et à (2); la seconde en faisant de même, mais deux fois : $p^2 = (1p)(1p) = -\overline{1}.1 = -1$ d'après (iii). D'une manière générale, les relations de $(O_6)$ permettent de développer le produit de deux octonions quelconques, écrits sous la forme $u + vp$ et $u' + v'p$ où $u, v, u', v'$ sont des quaternions; on a

$$(7) \qquad (u + vp)(u' + v'p) = uu' - \overline{v'}v + (v'u + v\overline{u'})p.$$

En effet, $(u + vp)(u' + v'p) = uu' + u(v'p) + (vp)u' + (vp)(v'p) = uu' + (v'u)p + (v\overline{u'})p - \overline{v'}v = uu' - \overline{v'}v + (v'u + v\overline{u'})p$.

Si on prend en particulier $u' = \overline{u}$ et $v' = -v$, on obtient $u\overline{u} + \overline{v}v + (-vu + v\overline{\overline{u}})p = u\overline{u} + v\overline{v}$, c'est-à-dire

$$(8) \qquad (u + vp)(\overline{u} - vp) = u\overline{u} + v\overline{v} = |u|^2 + |v^2|$$

où, comme on l'a vu dans la première partie, $|u|$ et $|v|$ représentent les modules des quaternions $u$ et $v$. Cette dernière propriété nous permet de voir que si $u$ et $v$ sont deux quaternions, la relation $u + vp = 0$ n'est possible qu'avec $u = v = 0$ car l'égalité $|u|^2 + |v|^2 = 0$ qui découle de $u + vp = 0$ grâce à (8) n'est possible que si $|u| = |v| = 0$, donc si $u = v = 0$. On déduit de là que tout octonion s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $u + vp$ où $u$ et $v$ sont deux quaternions. Ainsi, se donner un octonion revient à se donner deux quaternions.

En sens inverse, on peut se servir de cette propriété pour définir $\mathbb{O}$ : on considère l'ensemble $\mathbb{H}^2$ des couples $(u, v)$ de deux quaternions et on définit une addition et une multiplication en posant

$$(u, v) + (u', v') = (u + u', v + v')$$

et

$$(u, v).(u', v') = (uu' - \overline{v'}v, v'u + v\overline{u'}).$$

En identifiant chaque quaternion $u$ avec le couple $(u, 0)$ et en posant $p = (0, 1)$, il est possible de démontrer que les axiomes $(O_1)$ à $(O_6)$ sont tous satisfaits.

Comme tout quaternion correspond à un quadruplet de nombres réels, on voit qu'un octonion correspond à huit nombres réels, rangés dans un certain ordre, ce qui explique, évidemment, l'appellation d'octonion. Une autre façon de voir cela est de restreindre la multiplication de $\mathbb{O}$ à la seule considération des produits $ax$ où $a$ est un réel et $x$ un octonion. Cela permet, conjointement à l'addition, de considérer $\mathbb{O}$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, mais il convient de vérifier que l'on a toujours $a(bx) = (ab)x$ si $a, b$ sont des réels et $x$ un octonion arbitraire : cela résulte en fait de ce que $a(u + vp) = (au) + a(vp) = (au) + (va)p = au + (av)p$ car $va = av$.

Moyennant quoi, $\mathbb{O}$ est un espace vectoriel de dimension 8, dont une base peut être définie par la suite $(1, i, j, k, p, ip, jp, kp)$. Le lecteur observera que, heureusement pour la simplicité des calculs, on a $(ai)p = a(ip)$ si $a \in \mathbb{R}$ ainsi que les relations analogues pour $j$ et $k$.

Car il faut avouer que la relation $(xy)z = x(yz)$ — que l'on écrira encore $xy.z = x.yz$ pour éviter les parenthèses — est fausse en général. Il suffit de le voir dans le cas particulier où $x = i, y = j$ et $z = p$. On a en effet $i(jp) = (ji)p = (-ij)p$, ce qui est différent de $(ij)p$ à cause de l'unicité de l'écriture $u + vp$ en général.

Néanmoins on a

$$(9) \qquad (ax)y = a(xy), (xa)y = x(ay) \text{ et } (xy)a = x(ya)$$

si $x$ et $y$ sont deux octonions quelconques et si $a$ est un réel.

Vérifions la première relation. Il revient au même de s'assurer que $a\ .\ t(u+vp)(u'+v'p) = a(u+vp)\ .\ (u'+v'p)$ lorsque $u, v, u', v'$ sont des quaternions quelconques. Il peut être commode de vérifier d'abord le cas particulier $au\ .\ p = a.up$ pour tout quaternion $u$ : on a en effet, d'après ($0_6$), (i) et (3), $a\ .\ up = ua\ .\ p = au.p$. Cela étant, en appliquant (7) et en utilisant le cas particulier en question, il vient

$$\begin{aligned} a\ .\ (u+vp)(u'+v'p) &= a[(uu' - \overline{v'}v) + (v'u + v\overline{u'})p] = a(uu' - \overline{v'}v) \\ &+a\ .\ (v'u + v\overline{u'})p = a(uu' - \overline{v}'v) + a(v'u + v\overline{u'})\ .\ p \\ &= a\ .\ uu' - a\ .\ \overline{v}'v + (a\ .\ v'u + a\ .\ v'u)p \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a(u+vp)\ .\ (u'+v'p) &= (au + a\ .\ vp)(u'+v'p) = (au + av\ .\ p)(u'+v'p) \\ &= (au\ .\ u' - \overline{v'}\ .\ av) + (v'\ .\ au + av\ .\ \overline{u'})p \end{aligned}$$

ce qui donne le même résultat vu l'associativité de la multiplication dans $\mathbb{H}$ et le fait que $a$ permute avec tout quaternion.

On peut vérifier de même la troisième relation en utilisant le fait que $up\ .\ a = au\ .\ p$ et les règles de calcul usuelles sur les quaternions, y compris cette fois celles faisant intervenir les conjugués : $\overline{au'} = a\overline{u'}$ et $\overline{av'} = a\overline{v'}$. Enfin, pour la relation du milieu, le mieux est de s'appuyer sur les deux autres et sur (3).

On peut résumer les relations (9) ci-dessus en disant que la relation d'associativité $xy\ .\ z = x\ .\ yz$ a lieu lorsque l'un des facteurs est un réel. Dans ce cas-là, on écrira naturellement $xyz$ chacun des octonions obtenus.

Nous allons voir que ce cas particulier n'est pas le seul où la relation d'associativité soit vraie. Mais pour cela, nous aurons besoin de définir, comme pour les quaternions, les notions de conjugué, de module et d'inverse. Comme tout octonion $x$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $u + vp$ où $u$ et $v$ sont des quaternions, on peut utiliser $u$ et $v$ pour les définitions. On posera successivement $\overline{x} = \overline{u} - vp$, $|x| = \sqrt{|u|^2 + |v|^2}$ et $x^{-1} = (\overline{u} - vp)(|u|^2 + |v|^2)^{-1}$ en supposant dans ce dernier cas $x \neq 0$ ce qui implique que $(|u|^2 + |v|^2)^{-1}$ représente l'inverse d'un nombre réel $\neq 0$. Lorsque $x$ est un élément de $\mathbb{H}$, on a $x = u$ (et $v = 0$), ce qui fait que l'on retrouve le conjugué $\overline{u}$, le module $|u|$ et l'inverse $u^{-1}$ du quaternion $u$. Les notations sont donc cohérentes avec celles déjà utilisées pour les quaternions et rien ne s'oppose à ce qu'on applique le même vocabulaire de **conjugué**, de **module** (ou **valeur absolue**) et d'**inverse**. La définition du conjugué d'un octonion peut sembler étrange mais elle se comprend mieux si on examine la relation (8) ci-dessus. De façon précise, on a

$$(10) \qquad x\overline{x} = \overline{x}x = |x|^2$$

pour tout octonion $x$.

La relation $x\overline{x} = |x|^2$ n'est autre que (8) et la relation $\overline{x}x = |x|^2$ se justifie par un calcul direct : $(\overline{u} - vp)(u + vp) = \overline{u}u + \overline{u}(vp) - (vp)u - (vp)(vp) = \overline{u}u + (v\overline{u})p - (v\overline{u})p + \overline{v}v = \overline{u}u + \overline{v}v = |u|^2 + |v|^2$.

On a aussi immédiatement

$$(11) \qquad \overline{\overline{x}} = x$$

et pour deux octonions $x$ et $y$ quelconques

$$(12) \qquad \overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$$
$$(13) \qquad \overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$$

ce qui s'établit sans problème par un calcul direct, laissé au lecteur. On notera que la relation $\overline{x} = x$ revient à dire que $x$ est un réel, car en écrivant $x = u + vp$, cette relation signifie que $\overline{u} = u$ et $-v = v$, donc que $u \in \mathbb{R}$ et $v = 0$.

Si on écrit $x$ sous la forme $a+bc+cj+dk+ep+fip+gjp+hkp$ où $a, b, c, d, e, f, g, h$ sont des réels (coordonnées de $x$ dans la base $(1, i, j, k, p, ip, jp, kp)$), dire que $x$ est un réel revient à dire que les sept dernières coordonnées sont nulles. En sens inverse, si la première coordonnée $a$ est nulle, on dit que $x$ est un **octonion pur**. Lorsque $x$ est un quaternion on retrouve la notion de quaternion pur. Dire que $x$ est un octonion pur revient à dire que $\overline{x} = -x$. On vérifie aussi facilement que tout octonion est somme d'une manière et d'une seule d'un nombre réel $a$ et d'un octonion pur $y$, ce qui permet de parler de la **partie réelle** et de la **partie pure** de l'octonion $x$.

De la relation (13) ci-dessus, on déduit que

$$(14) \qquad xx^{-1} = x^{-1}x = 1$$

pour tout octonion $x \neq 0$.

On a en effet $x^{-1} = \overline{x}|x|^{-2}$ par définition où $|x|^{-2}$ est un simple réel, permutable en tant que tel avec tout octonion et qui ne pose pas de problème d'associativité d'après (9). On a donc $xx^{-1} = x(\overline{x}|x|^{-2}) = (x\overline{x})|x|^{-2} = |x|^2|x|^{-2} = 1$ et $x^{-1}x = (\overline{x}|x|^{-2})x = (|x|^{-2}\overline{x})x = |x|^{-2}(\overline{x}x) = |x|^{-2}|x|^2 = 1$.

Pour aller plus loin et pour démontrer par exemple que $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, il nous faut établir au préalable que $|xy| = |x||y|$ si $x$ et $y$ sont des octonions quelconques. Comme c'est, en fait, une relation entre des réels positifs, il revient au même de montrer que $|xy|^2 = |x|^2|y|^2$. Ce serait facile à faire s'il s'agissait de quaternions car on pourrait user de l'associativité, alors que pour des octonions quelconques on ne le peut pas. Si on écrit $x = u + vp$ et $y = u' + v'p$ où $u, v, u', v'$ sont des quaternions, la formule à démontrer revient à

$$|uu' - \overline{v'}v|^2 + |v'u + v\overline{u'}|^2 = (|u|^2 + |v|^2)(|u'|^2 + |v'|^2)$$

ou

$$(uu' - \overline{v'}v)(\overline{uu' - \overline{v'}v}) + (v'u + v\overline{u'})(\overline{v'u + v\overline{u'}}) = (u\overline{u} + v\overline{v})(u\overline{u'} + v\overline{v'})$$

ce qui, on en conviendra, n'a rien d'évident.

Pourtant, si on développe le premier nombre, on trouve

$$uu'\overline{u'}\overline{u} - uu'\overline{v}v' - \overline{v'}v\overline{u'}\overline{u} + \overline{v'}v\overline{v}v' + v'u\overline{u}\overline{v'} + v'uu'\overline{v} + v\overline{u'}\overline{u}\overline{v'} + v\overline{u'}u'\overline{v}.$$

Les termes 1, 4, 5 et 8 sont en fait $|uu'|^2, |vv'|^2, |uv'|^2$ et $|u'v|^2$ ou (pour des quaternions, cela revient au même) $|u|^2|u'|^2$, $|v|^2|v'|^2$, $|u|^2|v'|^2$ et $|u'|^2|v|^2$, autrement dit les termes qui résulteraient du développement de $(|u|^2 + |v|^2)(|u'|^2 + |v'|^2)$.

Il s'agit donc de montrer que les termes qui restent font, ensemble, 0. Or les termes 2 et 3 (resp. 6 et 7) sont conjugués l'un de l'autre. Ajoutés ensemble, ils donnent des nombres réels qu'on peut noter $-2\mathcal{R}(\overline{v'}v\overline{u'}\overline{u})$ (resp. $2\mathcal{R}(v\overline{u'}\overline{u}\overline{v'})$ en convenant de noter en général $\mathcal{R}w$ la partie réelle d'un quaternion $w$ quelconque. Or on a $\mathcal{R}(\overline{v'}v\overline{u'}\overline{u}) = \mathcal{R}(v\overline{u'}\overline{u}\overline{v'})$ en vertu du lemme suivant.

**Lemme.**— Si $w$ et $w'$ sont des quaternions, on a $\mathcal{R}(ww') = \mathcal{R}(w'w)$. Il suffit d'écrire $w = a + bi + cj + dk$ et $w' = a' + b'i + c'j + d'k$ où $a, b, c, d, a', b', c', d'$ sont des réels pour voir que $\mathcal{R}(ww') = \mathcal{R}(w'w) = aa' - bb' - cc' - dd'$. Ce lemme une fois acquis, le résultat final est démontré : on a

$$(15) \qquad |xy| = |x||y|$$

pour deux octonions $x$ et $y$ quelconques.

Comme la relation $|x| = 0$ n'est possible qu'avec $x = 0$, on voit, grâce à (15) que le produit de deux octonions ne peut être nul que si l'un des facteurs $x$ ou $y$ est nul.

La même relation (15) montre aussi que si $x$ est un octonion non nul, on a

$$(16) \qquad |x^{-1}| = |x|^{-1}.$$

La relation

$$(17) \qquad (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$$

si $x, y$ sont des octonions non nuls est alors facile à établir. On a $(xy)^{-1} = (\overline{xy})|xy|^{-2} = (\overline{xy}(|x||y|)^{-2} = (\overline{y}\ \overline{x})(|x|^{-2}|y|^{-2})$. Comme les derniers facteurs sont des réels, ils peuvent permuter comme on veut et être associés aux autres facteurs n'importe comment, ce qui peut donner $(\overline{y}|y|^{-2})(\overline{x}|x|^{-2})$, c'est-à-dire le résultat.

Il n'est malheureusement pas possible de s'arrêter là. Nous aurons besoin d'abord de vérifier que pour deux octonions $x$ et $y$, on a

$$(18) \qquad (x\overline{x})y = x(\overline{x}y), (xy)\overline{y} = x(y\overline{y}), (xy)\overline{x} = x(y\overline{x})$$

ce qui veut dire, en fait, que la relation d'associativité $(xy)z = x(yz)$ a lieu si deux des facteurs $x, y, z$ sont conjugués.

La démonstration de ces formules n'est pas aisée. Voilà ce que je propose : s'il y a plus simple, qu'on me le fasse savoir !

Commençons par démontrer la première relation par un calcul direct. Développons d'abord le produit $(u+vp)[(\overline{u}-vp)(u'+v'p)]$. Le produit entre crochets donne $\overline{u}u'+\overline{u}(v'p)-(vp)u'-(vp)(v'p)=\overline{u}u'+(v'\overline{u})p-(v\overline{u'})p+\overline{v'}v=\overline{u}u'+\overline{v'}v+(v'\overline{u}-v\overline{u'})p$. D'où le produit complet

$$\begin{gathered}u(\overline{u}u'+\overline{v'}v)+u[(v'\overline{u}-v\overline{u'})p]+(vp)(\overline{u}u'+\overline{v'}v)+(vp)[(v'\overline{u}-v\overline{u'})p]=\\ u(\overline{u}u'+\overline{v'}v)+[(v'\overline{u}-v\overline{u'})u]p+(v\overline{\overline{u}u'+\overline{v'}v})p-(\overline{v'\overline{u}-v\overline{u'}})v.\end{gathered}$$

Comme $\overline{\overline{u}u'+\overline{v'}v}=\overline{\overline{u}u'}+\overline{\overline{v'}v}=\overline{u'}u+\overline{v}v'$ et $\overline{v'\overline{u}-v\overline{u'}}=\overline{v'\overline{u}}-\overline{v\overline{u'}}=u\overline{v'}-u'\overline{v}$, on trouve

$$u\overline{u}u'+u\overline{v'}v+(v'\overline{u}u-v\overline{u'}u)p+(v\overline{u'}u+v\overline{v}v')p-u\overline{v'}v+u'\overline{v}v$$

ce qui se simplifie heureusement en $u\overline{u}u'+u'\overline{v}v+(v'\overline{u}u+v\overline{v}v')p$. Comme $u\overline{u}$ et $\overline{u}u$ (resp. $v\overline{v}$ et $\overline{v}v$) sont des réels égaux, permutant avec tous les facteurs, il vient $u\overline{u}(u'+v'p)+v\overline{v}(v'p+u')=(u\overline{u}+v\overline{v})(u'+v'p)$, ce qui n'est autre que le produit $(x\overline{x})y$ (si $x=u+vp$ et $y=u'+v'p$). D'où la première relation.

On pourrait démontrer de la même façon $(xy)\overline{y}=x(y\overline{y})$, mais si on part de l'égalité déjà trouvée $(x\overline{x})y=x(\overline{x}y)$ et qu'on prend les conjugués des deux membres, on obtient $\overline{y}(x\overline{x})=(\overline{y}x)\overline{x}$. Comme cette relation est valable quels que soient $x$ et $y$, on peut remplacer $x$ par $y$ et $y$ par $\overline{x}$, ce qui donne $x(y\overline{y})=(xy)\overline{y}$.

Une démonstration directe de la relation restante $[(xy)\overline{x}=x(y\overline{x})]$ semble plus malaisée car on ne peut espérer de simplification liée à des groupements du type $x\overline{x}$ et $y\overline{y}$. C'est pourquoi, nous allons faire appel à une autre méthode en commençant par établir que

$$(19)\qquad (xx)y=x(xy),\ (xy)y=x(yy),\ (xy)x=x(yx).$$

Pour l'égalité $(xx)y=x(xy)$, on va utiliser la relation établie $(x\overline{x})y=x(\overline{x}y)$ en remarquant que $x+\overline{x}$ est un nombre réel $a$ car il est son propre conjugué : $\overline{x+\overline{x}}=\overline{x}+\overline{\overline{x}}=\overline{x}+x=x+\overline{x}$. On a donc $\overline{x}=a-x$, de sorte que la relation $(x\overline{x})y=x(\overline{x}y)$ s'écrit $[x(a-x)]y=x[(a-x)y]$. Le premier membre devient $(xa-xx)y=(xa)y-(xx)y=axy-(xx)y$ puisque $a$ est un réel ; le second devient $x(ay-xy)=x(ay)-x(xy)=axy-x(xy)$. D'où la relation voulue

On démontre de la même manière l'égalité $(xy)y=x(yy)$ à partir de la relation $(xy)\overline{y}=x(y\overline{y})$ déjà établie.

Mais pour la relation qui reste $(xy)x=x(yx)$, il faut naturellement une autre méthode car on ne sait pas encore que $(xy)\overline{x}=x(y\overline{x})$ ...Partons de l'égalité $(xx)y=x(xy)$ et remplaçons $x$ par $y+x$. On obtient $[(y+x)(y+x)]y=$

$(y+x)[(y+x)y]$, soit $(yy+yx+xy+xx)y = (y+x)(yy+xy)$ c'est-à-dire $(yy)y+(yx)y+(xy)y+(xx)y = y(yy)+y(xy)+x(yy)+x(xy)$. Comme $(yy)y = y(yy)$, $(xy)y = x(yy)$ et $(xx)y = x(xy)$ d'après ce qu'on a déjà vu, il reste $(yx)y = y(xy)$, ce qui est en substance la relation manquante. On peut alors achever la démonstration de (18) en remplaçant $x$ par $a-\overline{x}$. A partir de ces nouvelles règles de calcul, il n'est pas difficile de voir que

$$(20) \qquad (xx^{-1})y = x(x^{-1}y), (xy)y^{-1} = x(yy^{-1}),\ (xy)x^{-1} = x(yx^{-1})$$

où $x \neq 0$ dans les cas 1 et 3 et $y \neq 0$ dans le cas 2.

Pour simplifier ses calculs, le lecteur est invité à noter $\frac{x}{a}$ le produit d'un octonion $x$ par l'inverse d'un réel $a \neq 0$ et à vérifier au préalable que $\frac{x}{a}y = x\frac{y}{a} = \frac{xy}{a}$ si $x$ et $y$ sont des octonions quelconques.

Le lecteur pourra s'assurer de sa virtuosité en essayant de démontrer l'*identité de Moufang* $(xy)(zx) = x(yz)x$ (cf. N. Bourbaki, *Éléments de mathématique, Alg.*, Chap. III, exercice 2, p. 203).

Signalons pour ceux qui veulent enrichir leur culture mathématique que l'on traduit les relations (19) en disant que l'algèbre $\mathbb{O}$ des octonions est **alternative** (cf. N. Bourbaki, *Alg.*, Chap. III, Appendice). Pour expliquer cette appellation, faisons correspondre à tout triplet $(x,y,z)$ d'octonions l'expression $(xy)z - x(yz)$ (appelée l'**associateur** de $x,y,z$). On définit ainsi une application non nulle de $\mathbb{O}\ .\ \mathbb{O}\ .\ \mathbb{O}$ dans $\mathbb{O}$ qui est trilinéaire. Les relations (20) signifient alors très exactement que cette application trilinéaire est alternée, c'est-à-dire qu'elle s'annule pour tout triplet $(x,y,z)$ comportant deux termes égaux.

Pour définir à partir de $\mathbb{O}$ un plan analogue au plan de Hamilton de la première partie, on pourrait associer à tout triplet $(a,b,c)$ d'octonions tel que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ l'ensemble, noté $\mathcal{D}(a,b,c)$, formé de tous les couples $(x,y) \in \mathbb{O}^2 = \mathbb{O}\ .\ \mathbb{O}$ tels que $ax+by+c=0$.

Malheureusement, si on procède ainsi, il n'est plus vrai que *par deux points distincts passe une droite et une seule*. En effet, si on pose $A=(0,0)$ et $B=(1,p)$, il est facile de vérifier que $A$ et $B$ appartiennent tous deux à la *droite* $\mathcal{D}(1,p,0) = 0$ et à la *droite* $\mathcal{D}(i,ip,0)$, c'est-à-dire que l'on a $x+py=0$ et $ix+ip\ .\ y=0$ si $x=y=0$ et si $x=1$ et $y=p$. Dans ce dernier cas, on a en effet $1+p^2=0$ et $i+(ip)p = i+ip^2 = i-i = 0$. Néanmoins, les *droites* en question, malgré la proportionnalité de leurs coefficients sont *distinctes*. La première contient le *point* $M=(jp,j)$ car $jp+pj = jp+\overline{j}p = jp-jp = 0$, mais pas la seconde car $i\ .\ jp + ip\ .\ j = (ji)p + (i\overline{j})p = (ji)p - (ij)p = (2ji)p \neq 0$.

Aussi pour définir malgré tout dans $\mathbb{O}^2$ une structure géométrique convenable se limitera-t-on à des équations *réduites*. De façon précise, si $a$ et $b$ sont deux octonions quelconques, on notera $\Delta(a,b)$ l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{O}^2$ tels que $y = ax+b$ et si $c$ est un octonion isolé, on désignera par la notation $\Delta(c)$ l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{O}^2$ tels que $x=c$ — autrement dit l'ensemble $\{c\}\ .\ \mathbb{O}$.

Pour fixer les idées, on dira que les ensembles $\Delta(a,b)$ et $\Delta(c)$ sont les **droites de Cayley** de $\mathbb{O}^2$, droites de CAYLEY **de première espèce** dans le premier cas, droites de CAYLEY **de deuxième espèce** dans le second.

**Proposition 1.**— Les droites de CAYLEY de $\mathbb{O}^2$ jouissent des propriétés suivantes :
a) Si $c$ et $c'$ sont des octonions quelconques, on a $\Delta(c) = \Delta(c')$ si $c = c'$ et $\Delta(c) \cap \Delta(c') = \emptyset$ si $c \neq c'$.
b) Si $a, b, c$ sont trois octonions, il y a un élément et un seul qui appartient à la fois à $\Delta(a,b)$ et à $\Delta(c)$.
c) Si $a, a', b$ et $b'$ sont des octonions et si $a \neq a'$, il y a un élément et un seul qui appartient à la fois à $\Delta(a,b)$ et à $\Delta(a',b')$.
d) Si $a, a', b$ et $b'$ sont des octonions et si $a = a'$, on a $\Delta(a,b) = \Delta(a',b')$ si $b = b'$ et $\Delta(a,b) \cap \Delta(a',b') = \emptyset$ si $b \neq b'$.

Les affirmations a) et d) ci-dessus sont faciles à démontrer. En effet, les égalités $\Delta(c) = \Delta(c')$ si $c = c'$ et $\Delta(a,b) = \Delta(a',b')$ si $a = a'$ et $b = b'$ sont évidentes. Si $c \neq c'$, il n'y a effectivement aucun élément commun $(x,y)$ à $\Delta(c)$ et à $\Delta(c')$ car dans le cas contraire, on aurait $x = c$ et $x = c'$, donc $c = c'$, en contradiction avec l'hypothèse.

De même, si $a = a'$ et $b \neq b'$, il n'y a aucun élément commun $(x,y)$ aux deux ensembles $\Delta(a,b)$ et $\Delta(a',b')$ car dans le cas contraire, on aurait $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$, donc $ax + b = a'x + b'$, ce qui impliquerai $b = b'$ puisqu'on a déjà $a = a'$.

Considérons maintenant un élément $(x,y)$ appartenant à la fois à $\Delta(a,b)$ et à $\Delta(c)$. Alors $x = c$ et $y = ax + b$. Cela ne donne qu'une possibilité pour le couple $(x,y)$ : $x = c$ et $y = ac + b$. Inversement, il est clair que si $x = c$ et $y = ac + b$, le couple $(x,y)$ appartient à la fois à $\Delta(a,b)$ et à $\Delta(c)$. D'où l'assertion b) de la proposition.

Considérons enfin quatre octonions $a, a', b$ et $b'$ tels que $a \neq a'$. Pour qu'un couple $(x,y)$ appartienne à $\Delta(a,b) \cap \Delta(a',b')$, il faut et il suffit que l'on ait à la fois $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$. Il revient au même de dire que l'on a simultanément $y = ax + b$ et $ax + b = a'x + b'$. Cette dernière égalité s'écrit aussi $(a - a')x = b' - b$. Comme $a - a'$ est un octonion non nul par hypothèse, cette relation implique que $(a-a')^{-1}[(a-a')x] = (a-a')^{-1}(b'-b)$, donc que $x = (a-a')^{-1}(b'-b)$ puisque $(a-a')^{-1}[(a-a')x] = [(a-a')^{-1}(a-a')]x = 1x = x$. Réciproquement, on montre de la même manière que si $x = (a-a')^{-1}(b'-b)$, on a $(a-a')x = b'-b$.

Bref, on voit ainsi qu'il y a un couple $(x,y)$ et un seul commun à $\Delta(a,b)$ et à $\Delta(a',b')$, qui est

$$\Big((a-a')^{-1}(b'-b), a[(a-a')^{-1}(b'-b)] + b\Big)$$

ce qui achève la démonstration.

Il est facile de voir qu'une droite de CAYLEY contient une infinité d'éléments et qu'en dehors de celle-ci il y a aussi, dans $\mathbb{O}^2$, une infinité d'éléments. La partie b) de la prop. 1 montre qu'une droite de CAYLEY ne peut être à la fois de première et de seconde espèce.

Si $D$ est une droite de CAYLEY de première espèce, il existe un octonion $a$ unique et un octonion $b$ unique tels que $D = \Delta(a, b)$. En effet, la relation $\Delta(a, b) = \Delta(a', b')$ n'est pas possible si $a \neq a'$ d'après le c) de la prop. 1 et si $a = a'$, on a nécessairement $b = b'$ d'après le d). L'unique octonion $a$ qu'on peut ainsi associer à une droite $D$ de première espèce s'appellera le **coefficient directeur** de $D$. Si $D$ est une droite de seconde espèce, ce n'est pas une droite de première espèce et on convient alors de dire que le **coefficient directeur** est le symbole $\infty$, élément mathématique particulier qui est tout sauf un octonion.

La proposition 1 permet de démontrer le théorème que tout le monde attend.

**Théorème 1.**— Muni de l'ensemble $\mathcal{D}$ de toutes les droites de CAYLEY, l'ensemble $\mathbb{O}^2$ des couples d'octonions est un plan de type affine.

Montrons d'abord que l'axiome $(P_2)$ est vérifié. Il s'agit de montrer que si $A$ et $B$ sont deux éléments différents de $\mathbb{O}^2$, il existe une droite de CAYLEY et une seule contenant à la fois $A$ et $B$.

L'unicité résulte de la proposition 1. En effet, d'après b) deux droites de CAYLEY $D$ et $D'$ qui contiennent à la fois $A$ et $B$ sont nécessairement de même espèce. Si elles sont toutes deux de seconde espèce, on a $D = D'$ d'après a). Si elles sont toutes deux de première espèce, on peut les écrire $D = \Delta(a, b)$ et $D' = \Delta(a', b')$. En vertu de c), on ne peut avoir $a \neq a'$. On a alors $a = a'$ et $b = b'$ d'après d). D'où $D = D'$ encore.

Pour démontrer l'existence, on doit distinguer deux cas et poser $a = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ où $x_A, x_B, y_A, y_B$ sont des octonions. Si $x_A = x_B$, il est clair que la droite $\Delta(x_A)$ répond aux conditions voulues. Si $x_A \neq x_B$, on pose $D = \Delta(a, b)$ avec $a = (y_B - y_A)(x_B - x_A)^{-1}$ et $b = y_A - [(y_B - y_A)(x_B - x_A)^{-1}]x_A$. Pour montrer que $\Delta(a, b)$ contient $A$ et $B$, on doit s'assurer que $y_A = ax_A + b$ et que $y_B = ax_B + b$. La première relation est évidente et la seconde s'obtient en appliquant convenablement les règles de calcul vues plus haut sur les octonions :

$$\begin{aligned}
ax_B + b =& [(y_B - y_A)(x_B - x_A)^{-1}]x_B + y_A - [(y_B - y_A)(x_B - x_A)^{-1}]x_A \\
=& [(y_B - y_A)(x_B - x_A)^{-1}]x_B - [(y_B - y_A)(x_B - x_A)^{-1}]x_A + y_A \\
=& [(y_B - y_A)(x_B - x_A)^{-1}](x_B - x_A) + y_A \\
=& (y_B - y_A)[(x_B - x_A)^{-1}(x_B - x_A)] + y_A \\
=& y_B - y_A + y_A \\
=& y_B.
\end{aligned}$$

Le lecteur observera que l'on obtient en prime le coefficient directeur de l'unique droite contenant $A$ et $B$ : c'est le symbole $\infty$ si $x_A = x_B$ et l'octonion $(y_B - y_A)(x_B - x_A)^{-1}$ si $x_A \neq x_B$.

Vérifions maintenant l'axiome $(P_3)$ et pour ce faire considérons une droite de CAYLEY $D$ quelconque et un élément $A$ de $\mathbb{O}^2$ n'appartenant pas à $D$.

Il s'agit de montrer qu'il existe une droite de CAYLEY $D'$ et une seule contenant $A$ et sans élément commun avec $D$. L'unicité résulte de la prop. 1. Si $D$ est de première espèce, $D'$ ne peut être de seconde espèce d'après b). Si on pose alors $D = \Delta(a, b)$ et si on considère deux droites $\Delta(a', b')$ et $\Delta(a'', b'')$ répondant au problème, on a nécessairement $a' = a$ et $a'' = a$ d'après c) et par suite $b' = b''$ d'après d). Si $D$ est de seconde espèce, la droite cherchée est nécessairement de seconde espèce d'après b) et son unicité résulte aisément de a). Pour démontrer l'existence, distinguons deux cas. Si $D = \Delta(a, b)$, prenons $D' = \Delta(a, y_A - ax_A)$ (en posant évidemment $A = (x_A, y_A)$). Si on n'avait pas $D \cap D' = \emptyset$, on aurait, d'après d), $b = y_A - ax_A$, ce qui est absurde car $A$ n'appartient pas à $D$ par hypothèse.

Si $D = \Delta(c)$, on pose $D' = \Delta(x_A)$. D'après a), on a $D \cap D' = \emptyset$ ou $D = D'$. Comme il est impossible que $D = D'$ sinon $A$ appartiendrait à $D$, on a la propriété cherchée.

Comme l'axiome $(P_1)$ est trivialement vérifié, la démonstration du théorème est achevée.

Dans la suite, on supposera $\mathbb{O}^2$ muni de la structure définie grâce au th. 1 et on dira que $\mathbb{O}^2$ est le **plan de Cayley**. On utilisera alors librement le vocabulaire général de la géométrie en parlant de points et de droites dans $\mathbb{O}^2$. Comme dans le plan de HAMILTON, chaque point du plan de CAYLEY admet deux coordonnées, l'abscisse et l'ordonnée : ce sont des octonions. Chaque droite admet une équation soit de la forme $y = ax + b$, soit de la forme $x = c$. On pourra aussi parler dans $\mathbb{O}^2$ de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées. On notera que les droites de seconde espèce ne sont autres que les parallèles à l'axe des ordonnées.

Comme on l'a observé en démontrant le th. 1 on peut aisément déterminer le coefficient directeur des droites de $\mathbb{O}^2$.

**Proposition 2.**— Si $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ sont deux points distincts du plan de CAYLEY $\mathbb{O}^2$, le coefficient directeur de l'unique droite passant par $A$ et par $B$ est $(y_B - y_A)(x_B - x_A)^{-1}$ si $x_A \neq x_B$ et $\infty$ si $x_A = x_B$.

Il est facile aussi de tirer de la prop. 1 le résultat suivant

**Proposition 3.**— Pour que deux droites du plan de CAYLEY soient parallèles il faut et il suffit qu'elles aient le même coefficient directeur.

Armé de ces deux derniers résultats, il est facile de s'attaquer au problème de la validité des théorèmes de DESARGUES et de PAPPUS. Pour ce dernier, la question se pose à peine car l'ensemble $\mathbb{H}$ étant une partie de $\mathbb{O}$, le même contre-exemple que dans la première partie suffit : $A = (1, 0)$, $B = (i, 0)$, $C = (j, 0)$, $A' = (O, 1)$, $B' = (O, -i)$, $C' = (O, -j)$.

Mais le théorème de DESARGUES est aussi, en général, en défaut. Pour le voir, on considère les droites d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées), $y = x$ (la première bissectrice) et $y = 0$ (l'axe des abscisses). Ce sont des droites distinctes, concourantes en 0. Sur la première droite, on prend $A = (0, i)$ et $A' = (0, ip)$, sur la seconde $B = (1, 1)$ et $B' = (p, p)$, sur la troisième $C = (j, 0)$ et $C' = (jp, 0)$.

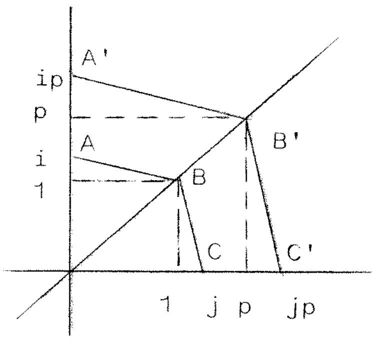


*Figure 9*

Montrons en calculant les coefficients directeurs que $AB \| A'B'$. Pour $AB$, on trouve $(1 - i)(1 - 0)^{-1} = 1 - i$ et pour $A'B'$, $(p - ip)(p - 0)^{-1} = [(1 - i)p]p^{-1} = (1 - i)(pp^{-1}) = 1 - i$.

Montrons de même que $BC \| B'C'$. Pour $BC$, on trouve $(0-1)(j-1)^{-1} = -(j-1)^{-1}$ et pour $B'C'$, $(0 - p)(jp - p)^{-1} = -p[(j - 1)p]^{-1} = -p[(p^{-1})](j - 1)^{-1} = (-pp^{-1})(j - 1)^{-1} = -(j - 1)^{-1}$.

Par contre, $AC$ n'est pas parallèle à $A'C'$ car les coefficients directeurs correspondants sont $(0 - i)(j - 0)^{-1} = -ij^{-1} = (-i)(-j) = ij$ et $(0 - ip)(jp - 0)^{-1} = (-ip)(jp)^{-1} = (-ip)(-p^{-1}j) = -(ip)(pj) = (ip)(jp) = -\overline{j}i = ji$. Et on sait que $ij \neq ji$.

Néanmoins, comme nous l'avions annoncé, le théorème de DESARGUES reste valable si on se contente de prendre six points sur des droites $D_A, D_B, D_C$ parallèles.

**Théorème 2.**— Soient $D_A, D_B, D_C$ des droites parallèles dans le plan $\mathbb{O}^2$, $A$ et $A'$ deux points sur $D_A$, $B$ et $B'$ deux points sur $D_B$, $C$ et $C'$ deux points sur $D_C$ tels que $AB \| A'B'$ et $BC \| B'C'$. Alors, les droites $AC$ et $A'C'$ sont parallèles.

L'idée de la démonstration est d'introduire la notion de translation dans le plan de CAYLEY, comme on l'a fait dans le plan de HAMILTON. De façon précise, si $a$ et $b$ sont deux octonions, on appelle translation d'opérateur $(a, b)$ dans $\mathbb{O}^2$ l'application $(x, y) \to (x+a, y+b)$ de $\mathbb{O}^2$ dans lui-même. On vérifie aussitôt que l'on définit ainsi une bijection dont la bijection réciproque est la translation d'opérateur $(-a, -b)$ et que si on compose la translation d'opérateur $(a, b)$ avec la translation d'opérateur $(a', b')$, on obtient la translation d'opérateur $(a + a', b + b')$. Mais les deux propriétés essentielles pour la démonstration du th. 2 sont les résultats équivalents aux propositions 5 et 6 de la première partie :

**Proposition 4.**— Si $A$ et $B$ sont deux points de $\mathbb{O}^2$, il existe une translation et une seule qui transforme $A$ et $B$.

En effet, avec des notations évidentes, la translation cherchée est celle d'opérateur $(x_B - x_A, y_B - y_A)$.

**Proposition 5.**— Si $t$ est une translation de $\mathbb{O}^2$, si $A$ et $B$ sont deux points quelconques et si $A'$ et $B'$ sont les images de $A$ et $B$ par $t$, on a les deux propriétés suivantes
(i) Si $A \neq B$, alors $A' \neq B'$ et $AB \| A'B'$.
(ii) Si $A \neq A'$, alors $B \neq B'$ et $AA' \| BB'$.

En effet, comme dans le cas de la prop. 6 vue dans la première partie, le calcul des coefficients directeurs ne nécessite que l'emploi de l'addition et de la soustraction.

En utilisant ces résultats, la démonstration du th. 2 peut se calquer sans problème sur celle du th. 2 de la première partie. Les détails sont laissés au lecteur.

On peut dire que dans le plan de CAYLEY, la *moitié* du théorème de DESARGUES est vraie. On exprimera cela en disant que $\mathbb{O}^2$ est **semi-arguésien**, ce qui constitue un modèle fort intéressant de plan son arguésien compte tenu de l'importance que présente le théorème de DESARGUES dans certaines définitions axiomatiques du plan. Ce sera notre conclusion.

### Conclusion : Axiome de DESARGUES et axiome de PAPPUS

Nous avons vu dans l'introduction que les propriétés les plus élémentaires de la géométrie plane (propriété d'incidence) peuvent être présentées au moyen de trois axiomes $(P_1)$, $(P_2)$ et $(P_3)$ qui définissent de façon précise ce que nous avons appelé les plans de type affine. Un grand nombre d'exemples de plans de ce genre peuvent être définis à l'aide d'un corps $K$, commutatif ou non. Comme nous l'avons expliqué en détail avec le corps $\mathbb{H}$ des quaternions, le plan $K^2$ correspondant est arguésien, ce qui veut dire qu'il satisfait à un cas particulier du théorème historique de DESARGUES exprimant que pour des points $A, B, C, A', B', C'$ convenablement disposés, les relations $AB \| A'B'$ et $BC \| B'C'$ impliquent $AC \| A'C'$. L'énoncé précis de ce résultat constitue ce qu'on appelle maintenant l'**axiome de DESARGUES**. C'est donc une condition nécessaire pour que la structure d'un plan de type affine puisse être définie à l'aide d'un corps, commutatif ou non.

Il se trouve que c'est aussi une condition suffisante. La démonstration de ce phénomène est assez longue, sans être difficile. Le lecteur intéressé pourra consulter les livres de Pierre SAMUEL et de Jacqueline LELONG-FERRAND cités dans notre bibliographie — ou pour un point de vue légèrement différent celui d'Emil ARTIN. La méthode de SAMUEL et de LELONG-FERRAND consiste à définir, d'une manière géométrique, la notion de vecteur dans un plan de type affine. Pour ce faire, on définit une relation binaire entre bipoints du plan, qui n'est autre que la bonne vieille relation d'équipollence de BELLAVITIS. Si on suit SAMUEL, il y a trois espèces d'équipollence que, à Saumur, pour y voir clair, nous avons baptisées *équipollence stricte*, *équipollence linéaire* et *équipollence triviale*. Moyennant quoi, on détermine une relation réflexive et symétrique entre les bipoints d'un plan de type affine quelconque. Mais l'exemple du *plan de MOULTON* (cf. fig. 5 de l'Introduction) montre que cette relation n'est pas nécessairement transitive. Cependant si on admet l'axiome de DESARGUES, cette transitivité se démontre, mais non sans peine (cf. SAMUEL). En fait, l'analyse de la démonstration montre que seule la *moitié* de cet axiome est vraiment utile. De façon précise, pour que l'équipollence soit une relation transitive il faut et il suffit que le plan de type affine considéré soit semi-arguésien. Avec cette seule hypothèse, on peut alors non seulement définir les vecteurs du plan par passage au quotient, mais montrer que l'ensemble de ces vecteurs est un groupe commutatif pour une addition qui satisfait à la relation de CHASLES. Pour définir à partir de là le corps souhaité, l'idée consiste à introduire de manière purement géométrique la notion d'homothétie dans un plan semi-arguésien. Pour s'affranchir du centre d'homothétie, on se contente d'introduire la notion d'homothétie vectorielle. Sans introduire d'autre hypothèse, on montre alors que ces homothéties constituent un corps non nécessairement commutatif $K$ et que l'ensemble $V$ des vecteurs du plan est un espace vectoriel (à gauche) sur ce corps. Malheureusement — et c'est ce qui fait l'intérêt du plan de CAYLEY — il n'est pas toujours vrai que $V$ soit de dimension 2 sur $K$. Pour qu'il en soit ainsi il est nécessaire et suffisant que la totalité de l'axiome de DESARGUES soit vérifiée, autrement dit que le plan soit arguésien.

Des calculs personnels que je n'ai fait vérifier par personne semblent montrer que dans le cas du plan de CAYLEY $\mathbb{O}^2$ la dimension de $V$ sur $K$ est égale à 16, ce qui fait beaucoup pour un plan!

Dans un plan de type affine quelconque, on peut considérer aussi un énoncé qu'il est légitime d'appeler l'**axiome de PAPPUS** (cf. fig. 4 de l'Introduction). On démontre que l'axiome de PAPPUS entraîne l'axiome de DESARGUES (voir le livre de Jacqueline LELONG-FERRAND). Comme nous l'avons laissé entendre dans la première partie, la validité de cet axiome équivaut à la commutativité du corps de base que l'on peut associer à tout plan arguésien.

Les lecteurs assoiffés de détails n'ont qu'à se procurer les ouvrages cités dans notre abondante bibliographie. Ça suffit comme ça!

## Bibliographie

Pour ce qui concerne la place des théorèmes de DESARGUES et de PAPPUS dans la présentation axiomatique de la géométrie plane, le lecteur pourra consulter conjointement les livres déjà cités de Pierre SAMUEL et de Jacqueline LELONG-FERRAND :

Pierre SAMUEL, *Géométrie projective*, P.U.F., 1986.

Jacqueline LELONG-FERRAND, *Les fondements de la géométrie*, P.U.F., 1985.

Il trouvera aussi des compléments et un autre point de vue dans le livre plus ancien d'Emil ARTIN ou dans l'ouvrage célèbre de David HILBERT :

Emil ARTIN, *Algèbre géométrique*, Gauthier-Villars, 1967.

David HILBERT, *Les fondements de la géométrie*, Dunod 1971.

Sur les octonions, on trouvera quelques indications dans

Nicolas BOURBAKI, *Éléments de mathématique*, Alg. Chap. III, Appendice, nouvelle édition, 1970, Hermann.

Jean DIEUDONNÉ, *A History of Algebraic and Differential Topology (1900–1960)*, Birkhäuser, 1989.

Mais pour ceux qui lisent l'allemand sans peine, nous ne pouvons que leur conseiller l'achat de l'ouvrage collectif

H.-D. EBBINGHAUS u. a., *Zahlen, Grundwissen Mathematik 1, zweite, überarbeitete und ergänzte Auflage*, Springer Verlag, 1988

dont tout un chapitre est consacré aux *nombres de CAYLEY.*

Pourquoi vous agace-t-il, ce fameux slogan de "*80% d'une classe d'âge menés au niveau du bac*"?

D'abord parce qu'on a mué en grande cause ce qui n'est, au départ, qu'une bourde ministérielle, un lapsus malheureux ou plutôt un contresens. De passage au Japon, M. CHEVÈNEMENT y a entendu dire que 80 % des élèves, là-bas, atteignaient le stade du baccalauréat. En fier patriote, il a proclamé aussitôt que les petits Français valaient bien les petits Japonais. Il omettait de signaler, dans sa candide ignorance, que le "*bac*", au Japon, n'est qu'une attestation de fin d'études sans valeur aucune. Il ne savait pas non plus que le système japonais est un système assassin qui épuise les gosses pour un "*rendement*" des plus médiocres.

Mais tant pis. La formule était lancée. Et il fallait que les choses ressemblent aux mots quand bien même les mots résonnaient dans le vide. C'est cela, paraît-il, le courage politique et la volonté de la Nation. Résultat : pour s'approcher de l'objectif, on n'hésite pas à intensifier les tortures et à multiplier les martyrs.

Marguerite GENTZBITTEL
La cause des élèves, éd. du Seuil, 1991.