# A PROPOS DE GÉOMÉTRIE AU BAC

Nicole VOGEL

Certains d'entre nous connaissent déjà l'exercice 2 des sujets de bac C et E donnés en juin 1990 à Strasbourg. Pour ceux qui le découvrent ou qui ne s'en souviennent plus très bien, en voici l'énoncé :

**Exercice 2 : (5 points)**
Soient $\Gamma$ le cercle de centre $O$ et de rayon $R$, $[AA']$ un diamètre fixé de $\Gamma$, $P$ le milieu de $[OA']$. Une droite $\Delta$ distincte de la droite $(AA')$ et de la perpendiculaire en $P$ à $(AA')$ pivote autour de $P$ et coupe $\Gamma$ en $B$ et $C$.

1) Déterminer l'ensemble $E_1$ des milieux $M$ de $[BC]$ lorsque $\Delta$ varie.
2) a. Soit $H$ le pied de la hauteur issue de $A$ dans le triangle $ABC$. La droite $(A'M)$ coupe $(AH)$ en $D$. Déterminer l'ensemble $E_2$ des points $D$ lorsque $M$ décrit $E_1$.
   b. Montrer que $A'BDC$ est un parallélogramme. En déduire que $D$ est l'orthocentre du triangle $ABC$.
3) La droite $(AM)$ coupe $(OD)$ en $I$. Montrer que $2\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{O}$.
   Que représente $I$ pour le triangle $ABC$ ? Déterminer l'ensemble $E_3$ des points $I$ lorsque $M$ décrit $E_1$.

Cet exercice a été très mal réussi par les candidats (*). Je voudrais essayer d'expliquer ici pourquoi les questions posées sont difficiles pour un sujet d'examen.

## A. Etude de la figure

La situation à étudier devient très vite compliquée. Mais surtout, les heuristiques utiles sont presque toutes associées à des sous-figures sur lesquelles rien n'attire notre attention, détournée par d'autres objets.

Les figures que je propose ne comportent pas les ensembles $E_1, E_2, E_3$ qui les compliquent davantage sans fournir de nouvelle idée pour les démonstrations. A cette exception près, j'y ai placé tous les éléments mentionnés par l'énoncé et seulement ceux-là. Toutefois, les droites sont limitées à leurs segments nommés ou nécessaires pour trouver un point d'intersection, afin de ne pas alourdir davantage les schémas.

(*) Sur le paquet de 60 copies que j'ai corrigées, la moyenne pour cet exercice était de 1,4/5 !

Nous allons examiner les différentes étapes du problème (les différentes hypothèses et conclusions sont codées sur les figures).

**Question 1) :** Quel est l'ensemble des points $M$ ?

Ce qu'on vient de tracer :

Ce qu'il faut voir :
$(h_1)(h_2)$ : hypothèses de la démonstration
$(c)$ : conclusion.

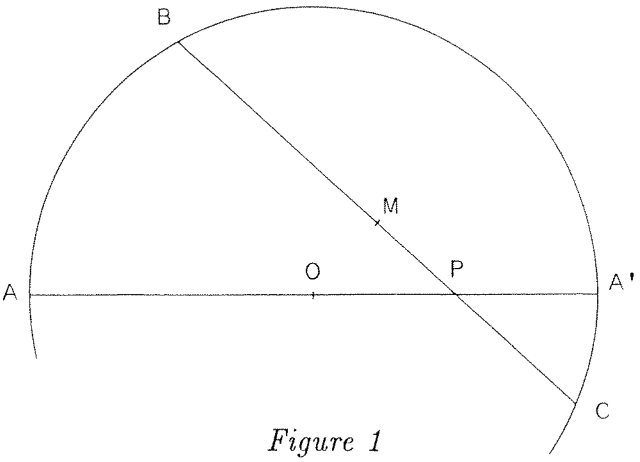



*Figure 1*

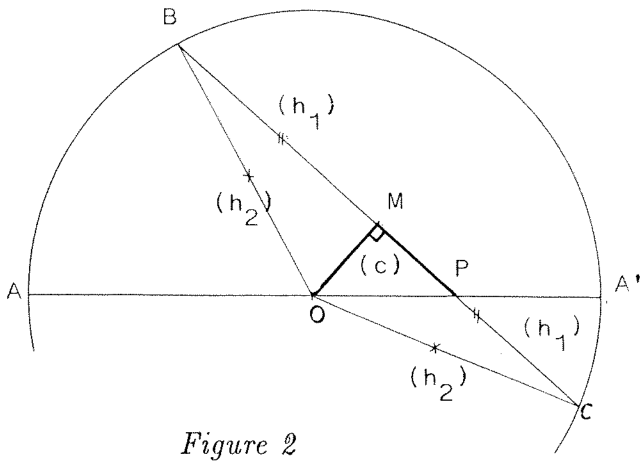



*Figure 2*

**Question 2) a :** Quel est l'ensemble des points $D$ ?

Comment se présente la figure :

Ce qu'on vient de tracer

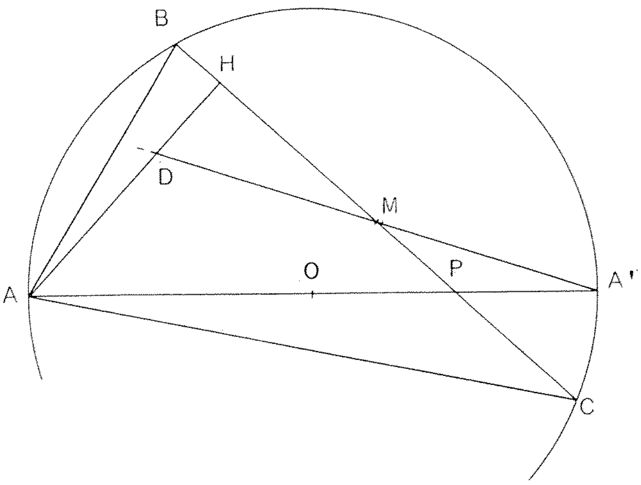



*Figure 3*

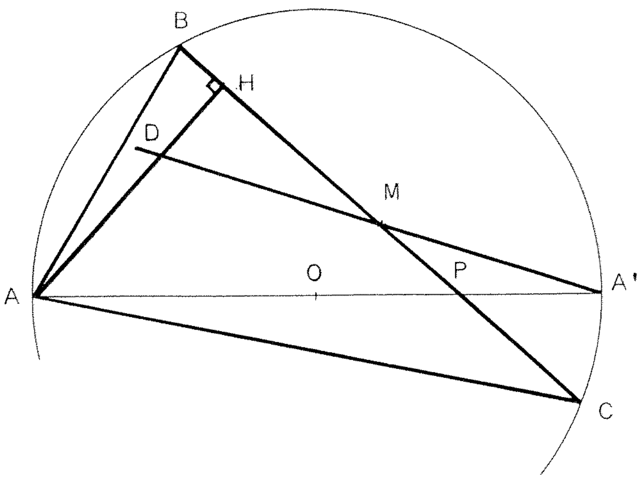



*Figure 4*

Ce qu'il faut voir : figures 5 et 6
$(h_1)(h_2)$ : hypothèses; on ne dispose de $(h_2)$ que si on a trouvé la question 1
$(c)$ : conclusion ...

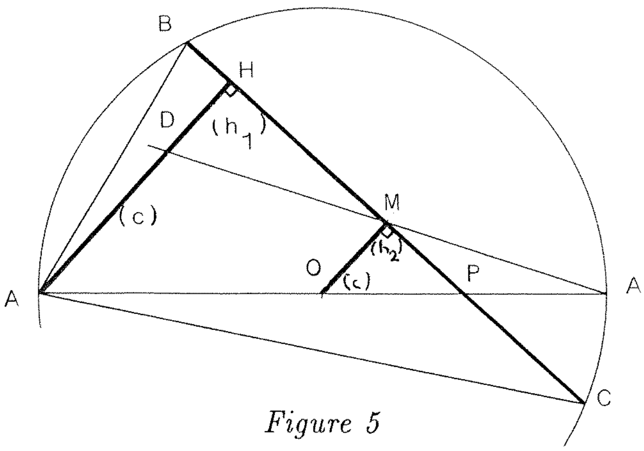



*Figure 5*

$(h_1)(h_2)$ : hypothèses
$(h_1)$ est une conclusion intermédiaire
$(c)$ : conclusion

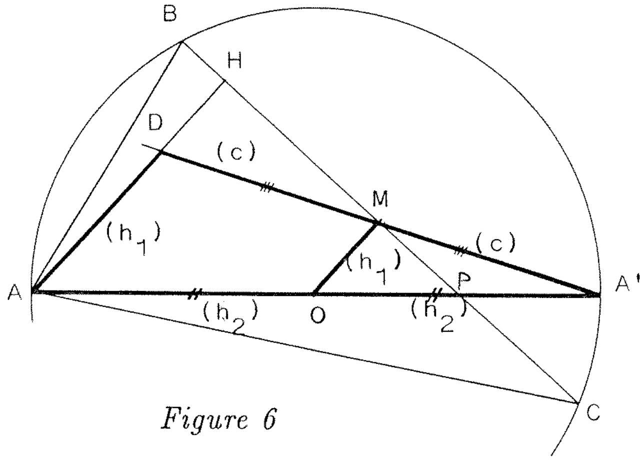



*Figure 6*

**Question 2) b :**

"*Montrer que $A'BDC$ est un parallélogramme*" ne semble pas poser de problème aux élèves qui ont traité les questions précédentes. La situation est effectivement assez simple si on se réfère au tableau présenté plus loin.

Voyons donc comment en déduire que $D$ est orthocentre de $ABC$.

Comment se présente la figure

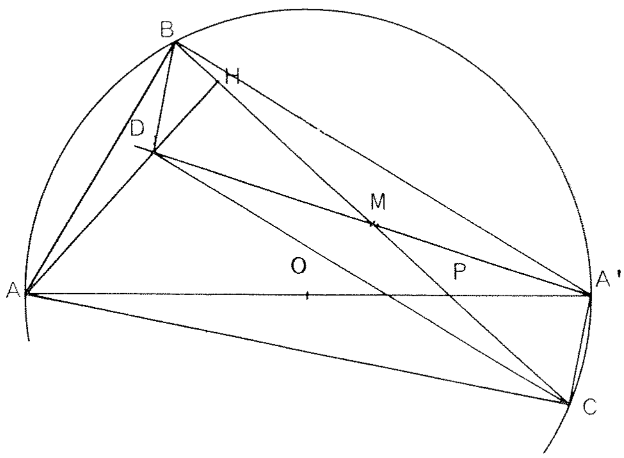



*Figure 7*

Ce qu'on vient de tracer

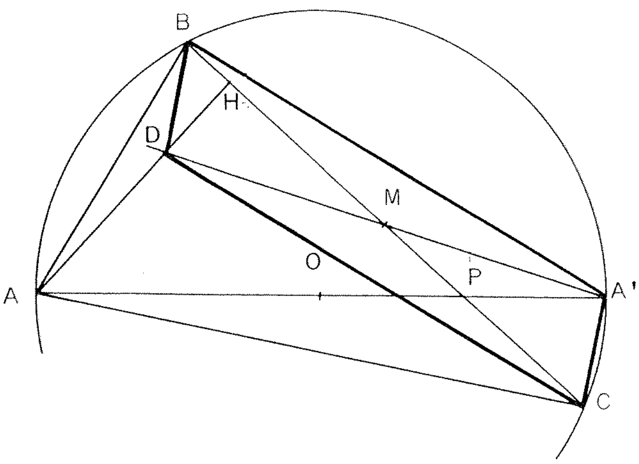



*Figure 8*

Ce qu'il faut voir : figures 9 et 10
$(h)$ : $C$ est sur le cercle de diamètre $[AA']$
$(c)$ conclusion ...

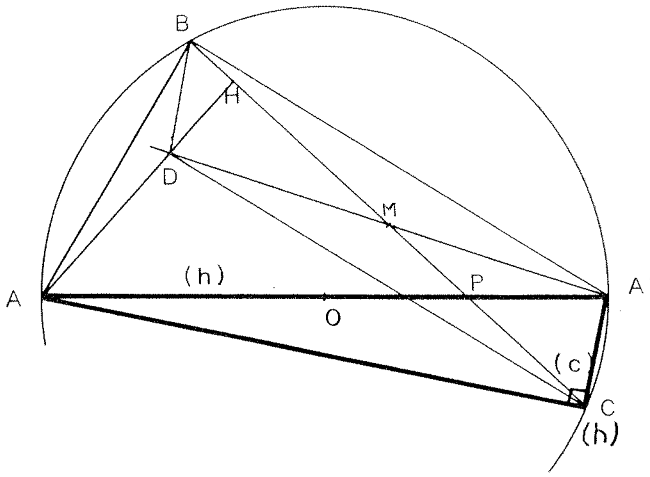



*Figure 9*

$(h_1)$ est une conclusion intermédaire
$(h_2)$ est une conclusion intermédiaire
du fait que $A'BDC$ est un parallélogramme
$(c)$ : conclusion

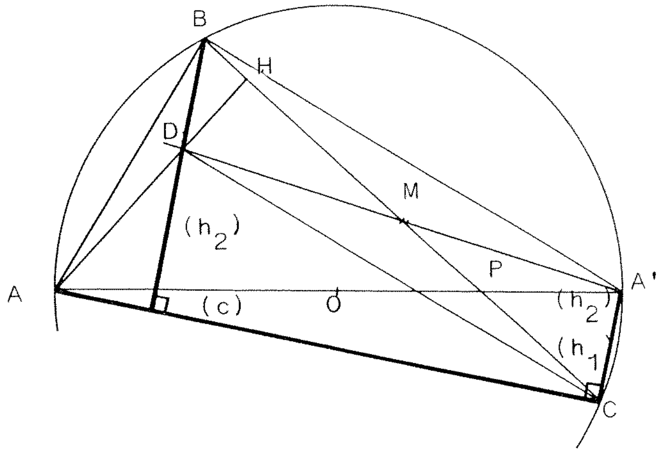



*Figure 10*

**Question 3) :** Montrer que $2\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{O}$.

Comment se présente la figure

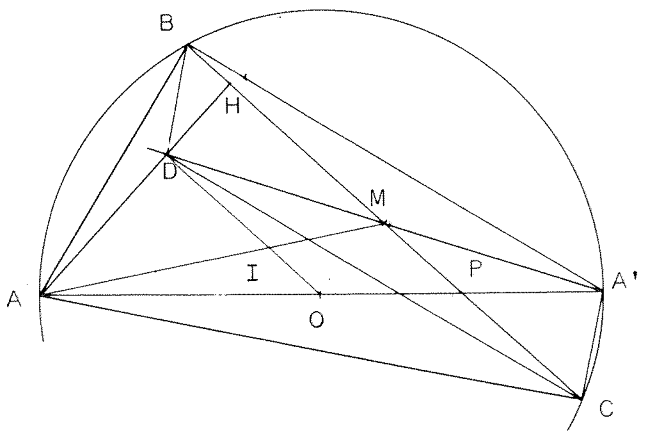



*Figure 11*

Ce qu'on vient de tracer

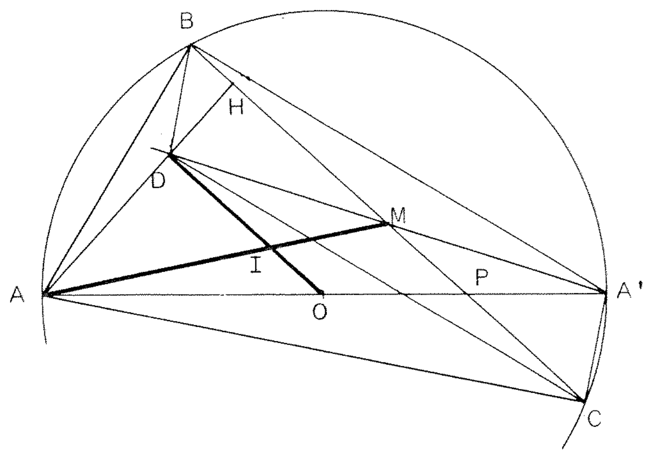



*Figure 12*

Ce qu'il faut voir
$(h_1)(h_2)$ : on ne dispose de $(h_2)$ que si on a trouvé la question 2a)
$(c_1)$ : $I$ est centre de gravité de $ADA'$.

$(c_1)$ est une conclusion intermédiaire qui permet de démontrer les trois items de la question 3.

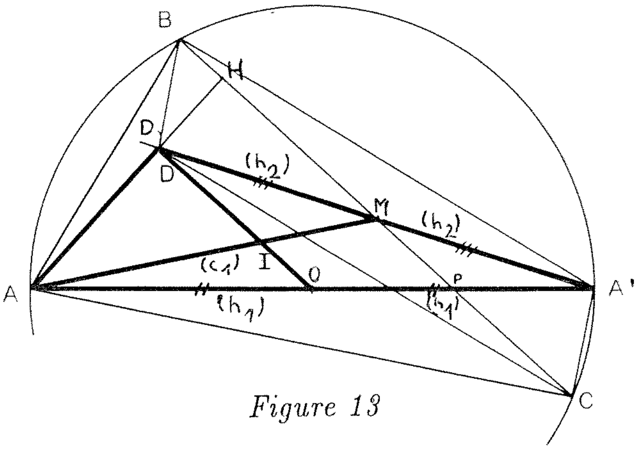


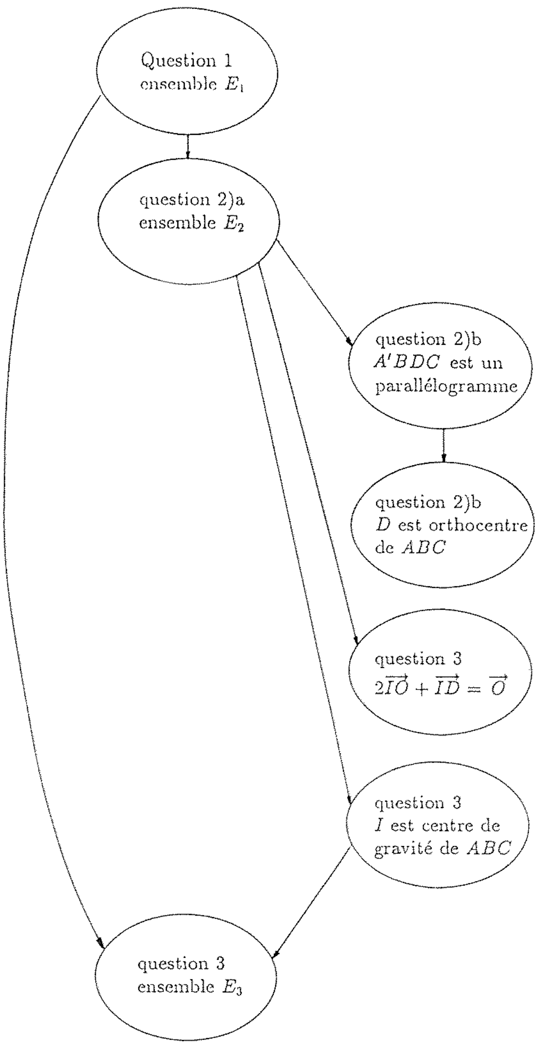

*Figure 13*

Bien sûr, on peut aussi commencer par prouver que les triangles $IOM$ et $IDA$ sont homothétiques en utilisant les résultats de la question 2a) puis en déduire les trois conclusions demandées.

**B. Objectifs de l'exercice**

Remarquons que l'énoncé poursuit un double objectif qui ne peut pas apparaître aux élèves :
— on détermine les ensembles de points $E_1, E_2, E_3$ dans les questions 1) et 2)a et à la fin de la question 3);
— on étudie la droite d'EULER du triangle $ABC$ dans la question 2)b et au début de la question 3).

La question "*montrer que $A'BDC$ est un parallélogramme*" est la seule qui ne se rattache qu'indirectement à l'un de ces objectifs puisqu'elle n'est qu'une aide pour prouver que $D$ est orthocentre de $ABC$. Mais l'élève qui a reconnu les objectifs du premier type est naturellement tenté de penser que les autres questions vont toutes l'aider à les atteindre, ce qui est faux.




Voici le graphe de dépendance des différentes questions en suivant le raisonnement évoqué dans la partie A.

| | question 1 : ensemble $E_1$ | question 2a : ensemble $E_2$ | question 2 b : $A'BDC$ est un parallélogramme |
|---|---|---|---|
| Objets qu'on vient de tracer et propriétés associées | le cercle $\Gamma$ (1)<br>le point $O$ • centre de $\Gamma$<br>le point $P$ • milieu de $[OA']$<br>$M$ • milieu de $[BC]$<br>les segments $[AA']$, $[BC]$ | le point $H$ • pied de la hauteur<br>$D$ • intersection ... (4)<br>le segment $[AH]$ • hauteur de $ABC$ et $[A'D]$<br>le triangle $ABC$ | le quadrilatère $A'BDC$ (8) |
| Autres objets nouveaux cités dans la question | le nombre $R$<br>la droite $\Delta$,<br>la droite perpendiculaire en $P$ à $(AA')$<br>l'ensemble $E_1$ | l'ensemble $E_2$ | |
| Eléments sur lesquels porte la conclusion de la question précédente | | le point $M$ • sur le cercle de diamètre $[OP]$ | Ensemble $E_2$<br>• hom $_{A'}2$ (ensemble $E_1$) image de $E_1$ par l'homothétie de centre $A'$, de rapport 2 |
| Objets et propriétés essentiels dans l'heuristique retenue | l'angle $\widehat{OMP}$ (2)<br>• droit | les triangles $A'AD$ et $A'OM$<br>• ils sont homothétiques dans un rapport 2 (6) | le point $M$ • milieu de $[A'D]$ et milieu de $[BC]$ |
| Objets et propriétés secondaires de la démonstration | le triangle $OBC$ • isocèle<br>la droite $(OM)$ (2)<br>• médiane de $OBC$ | les droites $(AH)$ et $(OM)$ • perpendiculaires à $(BC)$ (5)<br>le point $O$<br>• milieu de $[AA']$ (6) | |

Remarques : • cette question nécessite une réciproque
• la position de $P$ sur $[OA']$ n'intervient que pour obtenir une définition simple des ensembles $E_1, E_2, E_3$ et pas du tout dans la démonstration

| question 2 b :<br>$D$ orthocentre de $ABC$ | question 3 :<br>$2\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{O}$ | question 3 :<br>que représente $I$? | question 3 :<br>ensemble $E_3$ |
|---|---|---|---|
| | les segments $[AM]$ 12<br>et $[OD]$<br>le point $I$ | | |
| | les vecteurs $\overrightarrow{IO}$<br>et $\overrightarrow{ID}$ | les vecteurs $\overrightarrow{IO}$ et $\overrightarrow{ID}$<br>• $2\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{O}$ | l'ensemble $E_3$ |
| le quadrilatère $A'BDC$<br>• parallélogramme | le point $D$<br>• orthocentre de $ABC$ | le point $I$<br>le segment $[AM]$<br>• position de $I$ sur $[AM]$ | le point $I$<br>• centre de gravité de $ABC$ |
| le segment $[BB']$ où $B'$ est l'intersection de $(BD)$ avec $(AC)$ 10<br>• perpendiculaire à $(AC)$ | le triangle $ADA'$ 13<br>le point $I$<br>• centre de gravité de $ADA'$ | le triangle $ADA'$ • $I$ est son centre de gravité<br>la droite $(AM)$ • médiane de $ADA'$ et de $ABC$ | les points $I$<br>et $M$ et $A$<br>• $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ |
| l'angle $\widehat{A'CA}$ • droit 9<br>les droites $(A'C)$ et $(BD)$<br>• parallèles 10 | les points $M$<br>• milieu de $[A'D]$<br>et $O$<br>• milieu de $[AA']$ 13 | | |

Note : 1 , 2 , 3 ...
renvoient aux figures
de même numéro.

### C. Comparaison des éléments présents dans chaque question et des éléments utiles à la résoudre

Nous allons les présenter de façon non exhaustive dans un tableau (voir pp. 6 et 7), en suivant encore le raisonnement retenu dans la partie A.

### Conclusions

Cette étude de l'énoncé et de la figure montre que tous les raisonnements élémentaires mis en œuvre sont très simples et à la portée d'un bon élève de seconde. Cette remarque a fait dire hâtivement à certains que l'exercice était très simple.

Mais nous voyons, en comparant les heuristiques utilisées aux hypothèses des questions qu'il n'est absolument pas évident de découvrir de bonnes stratégies de démonstration.

Pire, aucune des méthodes naturellement associées au programme des terminales C et E (utilisation d'une similitude, de la composée de transformations planes, interprétation dans le plan complexe, barycentres ...) n'est utile ici. J'ai observé de nombreux élèves qui cherchaient une transformation simple donnant $M$ dans la première question. Je trouve cette tentative honorable. Malheureusement, ces jeunes ont souvent abandonné entièrement l'exercice lorsqu' ils ont constaté que les questions suivantes dépendaient toutes de la première. Ils se sont retrouvés ainsi au même niveau que ceux qui n'avaient pas du tout travaillé la géométrie en terminale.

Certes, cet exercice est un sujet intéressant pour un travail en classe. De plus, il est sûrement souhaitable que l'épreuve de math des bacs C et E comporte un peu de géométrie pure. Cependant, il me semble indispensable de cerner les compétences que nous pouvons évaluer en temps limité. Qu'attendons-nous de nos élèves dans le domaine des heuristiques? Quelles sont celles que nous les aidons à acquérir? Quelles sont celles qui sont implicitement associées au programme?

Pour terminer, je voudrais évoquer un dernier problème : combien de temps "*l'élève moyen, rédigeant posément après avoir réfléchi posément*" — vous savez, celui qui est déposé au pavillon de Breteuil depuis la note de service n° 86–331 du 3 novembre 1986 et auquel on soumet tous les sujets de bac — a-t-il mis pour trouver et rédiger cet exercice? Et s'il l'avait très bien traité le jour du bac, peut-être même parce que ses professeurs auraient su lui faire aimer la géométrie, aurait-il été raisonnable de ne lui attribuer que cinq petits points en récompense? Ne risque-t-il pas de dire à ses camarades actuellement en terminale qu'il vaut mieux faire des mots croisés que de la géométrie?