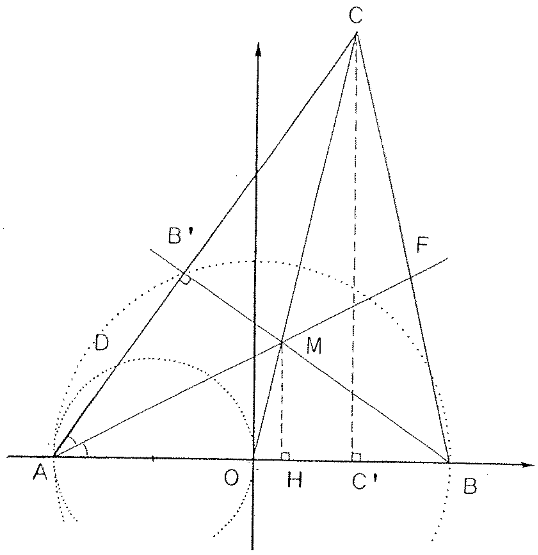
UNE BISSECTRICE, UNE MÉDIANE ET UNE HAUTEUR CONCOURANTES

Pierre DANIEL (*)

A l'origine de ma recherche se trouve un exercice pour une classe de 5ème :

> "*L'unité de longueur étant le cm, placer dans un système d'axes rectangulaires les points A(-3 ; 0), B(3 ; 0) et C(1,5 ; 6,5). Puis dans le triangle ABC, tracer la hauteur issue de B, la médiane issue de C et la bissectrice de* $\widehat{BAC}$."

Sur les dessins (exacts!) chaque élève peut constater que les droites construites sont concourantes ...



Mais pourquoi donc, moi, le professeur, ai-je un doute?

Je calcule les coordonnées des points d'intersection de la médiane avec la hauteur et avec la bissectrice. L'écart entre ces deux points est inférieur à 3 centièmes de mm! Et après un tel exercice, comment faire admettre sur les mêmes "*preuves*", la concourance des hauteurs?

Il s'en suit un temps de recherche auprès de mes collègues et aussi dans mes classiques de géométrie au sujet d'un théorème concernant la concourance d'une médiane, d'une hauteur et d'une bissectrice : sans succès.

(*) Collège de La Voulte (07800).

D'où le devoir à la maison suivant :

1ère étape

A partir de $A(-1;0), B(1;0)$ et $C(x,y), y \neq 0$ je cherche l'intersection de la médiane issue de C avec la hauteur issue de B.

— Cette intersection existe si (CO) n'est pas perpendiculaire à (AC), c'est-à-dire si C n'appartient pas au cercle de centre $(-\frac{1}{2};0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

— L'équation de la médiane (OC) est : $yX - xY = 0$.
(BB') qui est orthogonal à (AC) a pour équation : $(x+1)X + yY - x - 1 = 0$.
L'intersection M de ces deux droites a pour coordonnées :

$$X = \frac{x(x+1)}{y^2 + x(x+1)} \; ; \; Y = \frac{y(x+1)}{y^2 + x(x+1)}.$$

Ce point M appartient à la bissectrice si sa distance à (AB) et à (AC) est la même. Après simplification il vient :

$$x^2 + y^2 - 1 = (1+x)\sqrt{(1+x)^2 + y^2}$$

ce qui se traduit clairement, avec les notations de la figure, par :

$$\overline{CB'}.\overline{CA} = \overline{AC'}.AC$$

ce qui est équivalent à : $B' \in]AC[$ et $CB' = AC'$. D'où le théorème :

Théorème : B' et C' étant les pieds des hauteurs issues de B et C du triangle ABC, une condition nécessaire et suffisante pour que la bissectrice, la hauteur et la médiane issues respectivement de A, B et C soient concourantes est que $B' \in]AC[$ et $CB' = AC'$.

On en déduit une construction simple d'un tel triangle ABC après avoir choisi $\widehat{A}$ et AC. On construit C' puis B' sur $]AC[$, tel que $CB' = AC'$. La perpendiculaire à (AC) en B' donne B sur (AC').

2ème étape

Plus tard, j'ai recherché une solution géométrique. Pour la médiane issue de C, on a $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = -1$. Pour la bissectrice issue de A, on a $\frac{\overline{FB}}{\overline{FC}} = -\frac{AB}{AC}$. Et enfin pour la hauteur issue de B on a : $\overline{AB'}.\overline{AC} = \overline{AC'}.\overline{AB}$. Pour assurer la concourance de ces trois droites, l'utilisation du théorème de Ceva implique $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \times \frac{\overline{FB}}{\overline{FC}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -1$, ou encore, avec les relations précédentes $\overline{B'C} = \overline{AC'}$ (avec $\overline{B'C}$ mesuré de A vers C et $\overline{AC'}$ mesuré de A vers B).

Au passage, on démontre que $\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{FB}}$ ce qui prouve que (FB') est parallèle à (AB) et par suite que le triangle $FB'A$ est isocèle en B' puisque les angles en A et F sont égaux.

On en déduit une construction simple de F, M et C à partir de $[AB]$ et de B' choisi arbitrairement sur le cercle de diamètre $[AB]$. On construit F intersection de la bissectrice de $\widehat{BAB'}$ et de la parallèle à (AB) passant par B'. D'où M intersection de (AF) et (BB') puis C intersection de (OM) et (AB').

3ème étape : lieux de F, M et C.

Les lieux de F, M et C s'obtiennent facilement en coordonnées polaires dans un repère d'origine A et des abscisses (AB) avec $\overline{AB} = 2a$ $(a > 0)$.

$$\text{Pour } C \quad \text{on a } AC = AB' + B'C = AB' + AC'$$
$$\text{soit } \rho = 2a\cos\theta + \rho\cos\theta.$$

Finalement $(C) : \rho = \frac{2a\cos\theta}{1-\cos\theta}$ avec $\frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2}$ pour avoir B' sur $]AC[$.

Pour M, on remarque que sa projection sur (AC) est la même que celle de B : B'. Comme les angles $\widehat{BAM}$ et $\widehat{MAC}$ sont égaux, on trouve :

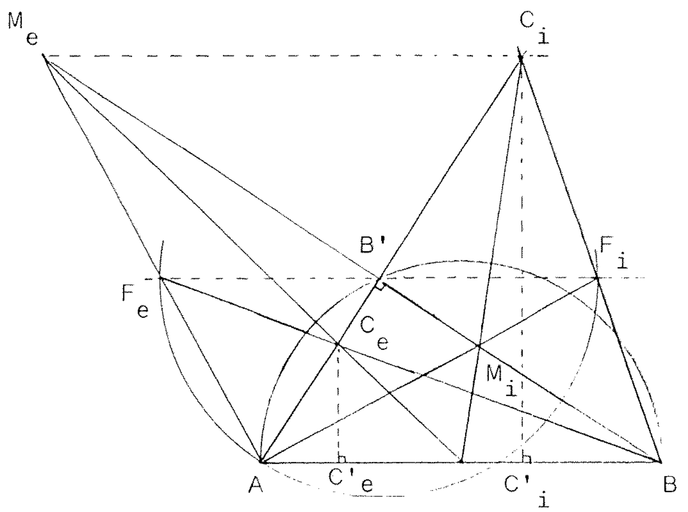
$$(M) : \rho = \frac{2a\cos 2\theta}{\cos\theta} \text{ avec } -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{4}$$

l'angle polaire de M étant évidemment la "*moitié*" de celui de C.

Pour F, comme le triangle $AB'F$ est isocèle en B', que l'angle à la base vaut θ, angle polaire de F et qu'enfin AB' vaut $2a\cos\theta$ on trouve :

$$(F) : \rho = 4a\cos 2\theta.\cos\theta. \text{ avec } -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{4}.$$

Il est facile de tracer ces trois ensembles de points comme sur la figure 2. Il est à noter que si on se libère des conditions sur θ, les courbes obtenues, support des lieux de C, M et F sont respectivement un kappa, une strophoïde droite et un trifolium. Pour les points de ces courbes qui ne correspondent pas aux lieux précédents il y a concours de la hauteur, de la médiane et de la **bissectrice extérieure** de l'angle en A.



Ci-contre, deux triangles "*conjugués*" ABC_i et ABC_e pour lesquels le point de concours remarquable est respectivement sur la bissectrice intérieure (en A) et sur la bissectrice extérieure.

Le parallélisme des droites C_iM_e, F_iF_e, avec la base AB, facilite la construction, point par point, des lieux (C) , (M) et (F), ci-dessous, à partir du pied de la hauteur commune aux deux triangles.

Et pour terminer, quelques remarques ...

1) ABC est rectangle en B pour $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Alors $AB = 2$; $BC = \sqrt{2+2\sqrt{5}}$; $AC = \sqrt{5}+1$; $AB = CB'$. Dans ce cas, le point M a une ordonnée maximum $y_M = \sqrt{10\sqrt{5}-22}$ pour $x_M = \sqrt{5}-2$.

2) Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ ($AB = 2$; $AC = 2\sqrt{2}+2$; $BC = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$) le point F a une ordonnée maximum $y_F = 1$ pour $x_F = \sqrt{2}$.

3) Le triangle $(1, \sqrt{\varphi}, \varphi)$ où φ est le nombre d'or est un triangle qui possède la propriété de concours.

4) Si nous revenons au point de départ, nous remarquons que dans l'exercice proposé la hauteur CC' est de 6,5 cm. Si le point C est supposé être sur (C), le calcul donne pour valeur approchée de CC' : 6,508125...!