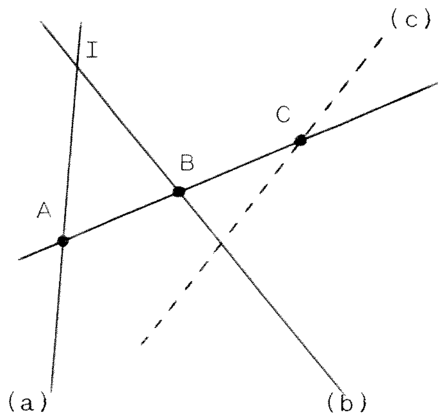
POINTS D'INFLEXION D'UNE CUBIQUE

Jean MARTINET

Dans les archives de *'L'Ouvert'* nous avions conservé un document de Jean MARTINET qui donne un exemple de plan affine à 9 points : l'ensemble des 9 points d'inflexion d'une cubique. Ce texte n'était pas destiné à la publication, du moins pas dans cet état, c'est pourquoi nous y ajoutons quelques commentaires en note [1].

1.— Soit (Γ) une cubique du plan projectif (Γ est un polynôme de degré 3 en x et y) [2].

Théorème 1 : Si A et B sont deux points d'inflexion de (Γ), le point C où la droite (AB) recoupe (Γ) est aussi un point d'inflexion.



• Soient (a) et (b) les tangentes à (Γ) en A et B et (d) la droite (AB).
Considérons le polynôme du 3^{e} degré :

$$P = \Gamma - \lambda d^3$$

où λ est choisi de façon que $\Gamma - \lambda d^3$ s'annule en I. Le polynôme P restreint à (a) admet 4 racines (3 en A et une en I). Il est donc nul sur (a) et par conséquent divisible par a. De même, il est divisible par b.

• Il suit $P = a.b.c$ où c est un polynôme du premier degré ((c) est une droite) donc :

$$\Gamma = \lambda d^3 + abc.$$

• Le point $(c) \cap (d)$ est clairement le point C (car $\Gamma = 0$ et $d = 0 \Longleftrightarrow \Gamma = 0$ et $abc = 0$) et (c) est une tangente d'inflexion car :

$$(\Gamma = 0 \text{ et } c = 0) \Longleftrightarrow (c = 0 \text{ et } d^3 = 0)$$

qui met en évidence le contact d'ordre 3.

[1] On pourra se reporter avec profit à l'article de J. Martinet *"Géométrie analytique sans coordonnées ... au presque"* paru dans *'L'Ouvert'* n° 54.

[2] C'est nous qui distinguons dans cet article la courbe (Γ) du polynôme Γ, de même (a) et a ...

2.— Le résultat précédent est en fait un cas particulier du suivant :

Théorème 2 : Si A, B, C sont alignés sur (Γ) et si A', B', C' sont alignés sur (Γ) alors les points A'', B'', C'' où (AA'), (BB'), (CC') respectivement recoupent (Γ), sont aussi alignés ([3]).

3.— Une cubique (non dégénérée) a en fait, en général, **neuf** (9) **points d'inflexion** ([4]) dans le plan projectif **complexe**. Le théorème 1 montre que dans le plan **réel**, il y en a au plus **3**; sinon ils sont tous **alignés** ([5]), et comme une droite coupe une cubique en au plus trois points ([6]) ...

([3]) Voir une démonstration dans l'article cité (*'L'Ouvert'* n° 54).
([4]) Ce qui est facile à voir puisque rechercher les tangentes d'inflexion revient à chercher les droites qui coupent (Γ) en 3 points confondus. Or en remplaçant dans Γ, y par $mx + p$, on obtient un polynôme du 3^e degré en x dont les coefficients sont des polynômes du 3^e degré en m et p. Ecrire que le polynôme en x admet une racine triple c'est écrire que son discriminant est nul, or le discriminant est une fonction du 3^e degré des coefficients donc du 9^e degré en m et p.
([5]) D'après le théorème de SYLVESTER : Si n points du plan sont tels que toute droite passant par deux des n points en contient un troisième, alors ces n points sont alignés.
([6]) On obtient ainsi un exemple de plan affine à 9 points, malheureusement peu visible puisque dans $\mathbb{C}^2$. On trouvera une représentation torique dans "*Le livre du problème, volume 6 : Géométrie d'incidence*", par l'IREM de Strasbourg, éd. Cédic. La représentation classique est celle-ci :