L'INÉGALITÉ D'ERDÖS–MORDELL
(1ère partie)

Patrick FUHR

Ce texte a été élaboré dans le cadre du groupe "Lycée" de l'IREM de Strasbourg. C'est pourquoi il est présenté sous forme de travaux pratiques. Ce T.P. offre beaucoup d'occasions d'employer les notions et outils qui se trouvent essentiellement au programme de la classe de première S : minorations, majorations, second degré, transformations, théorème de l'angle inscrit, relations métriques, produit scalaire, calcul de distances et d'angles dans le plan ou l'espace, barycentres et recherche d'extremums d'une fonction. Il peut être étudié assez tôt dans une année de terminale en raison des possibilités de révisions qu'il donne.

Le but du T.P. est alors clairement d'aborder de nombreuses questions de géométrie autour d'un thème central qui est ici l'inégalité d'ERDÖS–MORDELL, conjoncturée en 1935 par P. ERDÖS, démontrée en 1937 par L.-J. MORDELL, et qui stipule que :

> "*Dans le plan, la somme des distances d'un point M intérieur à un triangle ABC aux sommets A, B et C est au moins égale au double de la somme des distances de ce point aux côtés (BC), (CA) et (AB) du triangle.*"

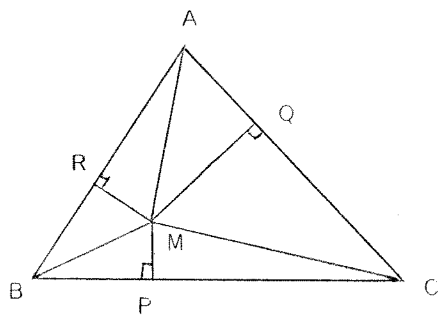


Figure 1

Nous noterons P (resp. Q, R) le projeté orthogonal d'un point M quelconque sur (BC) (resp. $(CA), (AB)$); l'inégalité d'ERDÖS–MORDELL signifie donc que : "Pour tout M intérieur au triangle ABC, $MA+MB+MC \geq 2(MP+MQ+MR)$" (ce que nous noterons inégalité (E.M.).

Paul ERDÖS est un mathématicien hongrois né en 1913 (son nom se prononce "*èrdeuch*"). Il est célèbre pour le grand nombre de conjectures qu'il énonca. Louis-Joël MORDELL est un mathématicien britanique né en en 1888 et mort en 1972. Ses travaux portèrent, entre autres, sur l'arithmétique.

La somme $MA + MB + MC$ est assez difficile à étudier, sa propriété la plus classique fait l'objet du T.P. intitulé "*Problème de Fermat*" déjà publié et auquel nous renvoyons le lecteur (*); par contre, la somme $MP+MQ+MR$ est beaucoup plus simple, et quelques-unes de ses propriétés sont étudiées au § 1, qui contient aussi quelques remarques destinées à familiariser le lecteur avec l'inégalité (E.M.).

Le § 2 contient quelques résultats sur les inégalités qui nous seront utiles.

Les § 3, 4 et 5 sont consacrés à diverses démonstrations de l'inégalité (E.M.), chacune d'elles étant suivie de la recherche des cas d'égalité, c'est-à-dire des points M et des triangles ABC tels que : $MA + MB + MC = 2(MP + MQ + MR)$.

Dans le § 6 enfin, on se demande de quelle manière on peut améliorer l'inégalité (E.M.) dans le cas de triangles particuliers.

Tout cela fait un T.P. assez long; mais, si l'on souhaite gagner du temps, on peut très bien faire l'économie de l'une des démonstrations de l'inégalité (E.M.).

1.— LA SOMME MP + MQ + MR; QUELQUES CONSÉQUENCES

Nous commençons par établir une caractérisation en termes de barycentres, de l'intérieur du triangle ABC; précisons que, dans tout le T.P., l'intérieur du triangle ABC est entendu "*bords compris*".

Question 1 :

a) Expliquer pourquoi l'intérieur du triangle ABC est l'ensemble des points M dont les coordonnées (y, z) dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ vérifient le système :

$$[y \geq 0\ ;\ z \geq 0\ ;\ y + z \leq 1].$$

b) En déduire que l'intérieur du triangle ABC est aussi l'ensemble des barycentres de (A, x), (B, y), (C, z), où x, y et z désignent des réels ≥ 0 quelconques de somme égale à 1.

Voyons ce que ce dernier résultat implique pour la somme $MP + MQ + MR$; pour cela, nous notons A' (resp. B', C') le pied sur (BC) (resp. $(CA), (AB)$) de la hauteur issue de A (resp. B, C); le point M, supposé intérieur au triangle ABC, est donné comme barycentre de $(A, x), (B, y), (C, z)$ où $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ et $x + y + z = 1$.

Question 2 :

a) Que déduit-on par projection, au sujet des points P, Q et R, de : "M est barycentre de $(A, x), (B, y), (C, z)$" ? Compléter alors : $\overrightarrow{MP} = \cdots \times \overrightarrow{AA'}$.

b) En conclure que : $MP + MQ + MR = xAA' + yBB' + zCC'$. (Voilà pourquoi nous disions que la somme $MP + MQ + MR$ est assez simple; c'est en effet une fonction "du premier degré" des coefficients x, y et z !)

(*) "*Les Maths en Pratique*", Terminales C/D/E, par l'IREM de Strasbourg, éd. Bordas, 1990 (en vente en librairie $\simeq$ 79 F).

c) Plus particulièrement, quelle propriété (classique) de la somme $MP+MQ+MR$ obtient-on, dans le cas où ABC est équilatéral ? (théorème de VIVIANI*) (*).*

d) En 1986, les candidats au Rallye Mathématique d'Alsace (**) (classe de Première) avaient à résoudre l'exercice suivant : "Soit M un point à l'intérieur d'un triangle équilatéral; on projette M perpendiculairement sur les côtés du triangle en P, Q, R; dans quel domaine doit-on choisir M pour que des segments égaux à MP, MQ, MR, puissent former un triangle ? Faire un dessin".

Il devient maintenant assez simple de répondre à quelques questions concernant la somme $MP + MQ + MR$ (M parcourant toujours l'intérieur du triangle ABC); dans les questions 3 et 4, nous continuons de regarder M comme barycentre de $(A,x),(B,y),(C,z)$ où x,y et z sont ≥ 0, et : $x+y+z=1$.

Question 3 :

a) Supposons, pour fixer les idées : $AA' \geq BB' \geq CC'$. Nous rappelons que AA', BB' et CC' sont les hauteurs du triangle ABC. (Le lecteur pourra démontrer qu'il revient au même de supposer : $BC \leq CA \leq AB$.)
Quelle est la valeur maximum de la somme $MP+MQ+MR$? Sa valeur minimum ?

b) Supposons en outre, pour simplifier : $AA' > BB'$. En quel point M la valeur maximum de la somme $MP+MQ+MR$ est-elle atteinte ? Vérifier qu'en ce point on a bien : $MA+MB+MC \geq 2(MP+MQ+MR)$. Cela suffit-il à prouver que l'inégalité (E.M.) est vraie en n'importe quel point M intérieur au triangle ABC ?

La question suivante porte sur la recherche des "*lignes de niveau*" de la fonction $M \to MP+MQ+MR$; d'après la question 2 c), cette recherche n'a d'intérêt que si le triangle ABC n'est pas équilatéral, ce que nous supposerons.

Question 4 :

a) Soit s un réel ≥ 0 quelconque :
Interpréter l'égalité : $xAA' + yBB' + zCC' = s$ comme une relation entre les coordonnées de M prises dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, et en déduire la nature géométrique de l'ensemble $\mathcal{L}$ des points M (intérieurs au triangle ABC) tels que : $MP + MQ + MR = s$.

b) Quelle précision sur l'ensemble $\mathcal{L}$ peut-on apporter lorsque ABC est isocèle, disons de sommet principal A ?

Pour terminer ce paragraphe, revenons au cas particulier d'un triangle ABC équilatéral; d'une part nous allons y voir que la démonstration de l'inégalité (E.M.) devient assez simple (question 6); d'autre part l'examen de ce cas nous permettra de comprendre pourquoi :

(*) Nous renvoyons le lecteur au livre "*Mathématiques en 1ère S*", par l'IREM de Strasbourg, éd. Casteilla-Istra, 1988, pour un autre très bel exemple d'application du théorème de VIVIANI, qui concerne le problème de FERMAT.
(**) Consulter : "*Mathématiques de compétition*", 2nde/1ère/Term, Sélection des Rallyes mathématiques d'Alsace, éd. Bordas, 1990 (en vente en librairie $\simeq$ 59 F).

- Il est important que M soit pris à l'intérieur du triangle ABC (question 7).
- Le facteur 2 qui apparaît dans : "$MA + MB + MC \geq 2(MP + MQ + MR)$" correspond au "meilleur résultat général possible" (question 8); ce point mérite explication : il est, par exemple, bien clair que pour tout M et tout triangle ABC : $MA + MB + MC \geq MP + MQ + MR$.

Question 5 :

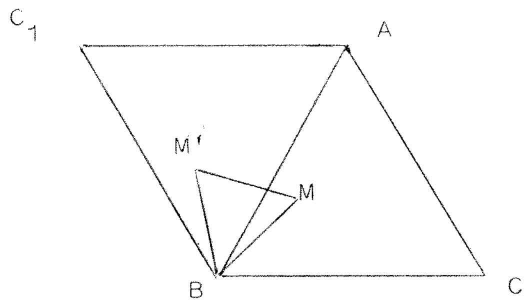
Pourquoi ?

Mais l'inégalité (E.M.) est bien meilleure que l'inégalité $MA + MB + MC \geq MP + MQ + MR$; or, a priori, rien n'interdit d'espérer pouvoir encore améliorer l'inégalité (E.M.); la question 8 prouvera qu'en réalité c'est impossible, si du moins l'on veut garder un résultat valable pour tout triangle ABC et tout point M intérieur à celui-ci.

Question 6 :

a) Rappeler la valeur trouvée pour la somme $MP + MQ + MR$ en n'importe quel point M intérieur au triangle équilatéral ABC de côté a.

b) Sur la figure 2, on a fait subir aux points M et A une rotation de centre B et d'angle 60° : Calculer CC_1 et expliquer pourquoi cette construction prouve que : $MA + MB + MC \geq 2(MP + MQ + MR)$.



Par rotation de centre B et d'angle 60°,
M vient sur M' et A sur C_1.

Figure 2

Question 7 :

Imaginer un point M, extérieur au triangle équilatéral ABC, pour lequel l'inégalité (E.M.) ne soit plus vraie.

Question 8 :

a) Vérifier qu'au centre O du triangle équilatéral ABC, on a : $OA + OB + OC = 2(OP + OQ + OR)$. (Nous découvrons ainsi un "cas d'égalité", qu'il faudra avoir présent à l'esprit en temps utile.)

b) En déduire qu'il n'existe pas de constante $k > 2$ telle que : pour tout triangle ABC et tout point M intérieur à celui-ci, on ait :

$$MA + MB + MC \geq k(MP + MQ + MR).$$

2.— QUELQUES OBSERVATIONS SUR LES INÉGALITÉS

Question 9 :

a) On minore un réel a par un réel b, puis b par un réel c :
Que peut-on en conclure, s'il advient que : $a = c$?

b) On sait que :

$$\begin{array}{ll} a \geq b & \\ & a + a' \geq b + b'. \\ a' \geq b' & \end{array}$$

Sachant que : $a \geq b$ et $a' \geq b'$, que peut-on en conclure, s'il advient que : $a + a' = b + b'$?

Question 10 :

a) On donne deux réels positifs a et b quelconques : Comparer leur moyenne arithmétique $\frac{a+b}{2}$ et leur moyenne géométrique $\sqrt{ab}$; quand l'égalité a-t-elle lieu ?

b) Plus particulièrement, étant donné un réel $x > 0$, comparer $x + \frac{1}{x}$ et 2; quand l'égalité a-t-elle lieu ?

3.— PREMIÈRE DÉMONSTRATION DE L'INÉGALITÉ (E.M.)

Les notations utilisées dans cette démonstration sont fixées par les figures 3 et 4 suivantes :

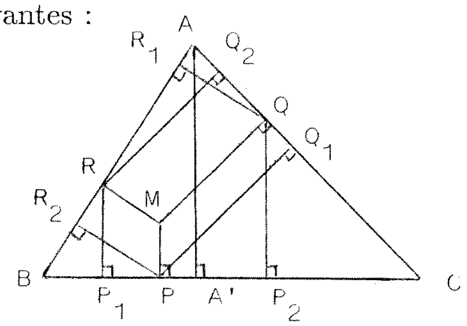


Figure 3

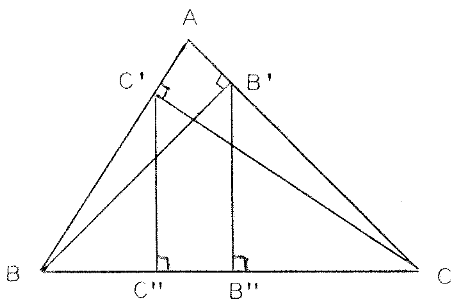


Figure 4

Nous commencerons par l'examen d'un cas particulier de manière à pouvoir l'écarter ensuite, car il se révèlerait un peu gênant pendant la démonstration générale.

Question 11 :

Quels sont les points M tels que : $P = Q$? $Q = R$? $R = P$?
Vérifier qu'en ces points : $MA + MB + MC > 2(MP + MQ + MR)$.

Du même coup, ces points se trouveront aussi écartés de la recherche des "*cas d'égalité*". Désormais nous supposerons M distinct des sommets A, B et C du triangle; les longueurs PQ, QR, RP sont alors non nulles, et les droites $(PQ), (QR)$ et (RP) parfaitement définies.

Question 12 :

Sous réserve qu'on ait prouvé que P (resp. Q, R) est situé sur le segment $[P_1P_2]$ (resp. $[Q_1Q_2]$, $[R_1R_2]$), justifier l'inégalité :

$$(1) \qquad MA+MB+MC \geq MA\frac{P_1P+PP_2}{RQ}+MB\frac{Q_1Q+QQ_2}{PR}+MC\frac{R_1R+RR_2}{QP}.$$

Cette première minoration de la somme $MA+MB+MC$ constitue le point de départ de notre démonstration; mais auparavant, voici comment on peut prouver que, par exemple : $P \in [P_1P_2]$:
Rappelons que M peut être considéré comme barycentre de $(A,x),(B,y),(C,z)$, où x,y et z sont des réels ≥ 0 tels que : $x+y+z=1$.

Question 13 :

a) Qu'en déduit-on, par les projections orthogonales appropriées, au sujet des points P,R,Q,P_1,P_2 ?

b) Prouver que : $\overrightarrow{PP_1} = z\overrightarrow{CC''}$ et $\overrightarrow{PP_2} = y\overrightarrow{BB''}$.

c) En déduire que si les vecteurs (colinéaires) $\overrightarrow{PP_1}$ et $\overrightarrow{PP_2}$ ne sont pas nuls, ils sont de sens contraire et conclure.

Nous allons à présent transformer le membre de droite de l'inégalité (1); il est remarquable, pour cela, que l'on puisse calculer les longueurs $PP_1, PP_2, \ldots$, en fonction des longueurs MA, MB, MC, MP, MQ, MR et PR, QP, RQ; la démarche n'est détaillée que pour le calcul de PP_1 : il en ressortira que : $PP_1 = MR\frac{PR}{MB}$.

Question 14 :

a) Vérifier cette formule lorsque : $M \in [AB]$.

b) Lorsque $M \notin [AB]$, justifier que M est distinct de R et de B, et P distinct de R et de P_1, de sorte que les angles $\widehat{BMR}$ et $\widehat{RPP_1}$ sont bien définis; trouver un cercle passant par M,R,B et P; démontrer que $\widehat{BMR} = \widehat{RPP_1}$; en déduire l'expression annoncée de PP_1.

c) Donner de même une expression de chacune des longueurs $PP_2, Q_1Q, QQ_2, R_1R, RR_2$ en fonction des longueurs $PR, QP, RQ, MA, MB, MC, MP, MQ, MR$. (Voilà une belle occasion de se convaincre de l'importance du choix des notations et du rôle des permutations circulaires !)
d) Par report dans l'inégalité (1) des expressions trouvées, vérifier que celle-ci devient :

$$\begin{aligned} MA+MB+MC \geq\ & MP\Big(\frac{MB.PQ}{MC.PR}+\frac{MC.PR}{MB.PQ}\Big) \\ &+ MQ\Big(\frac{MC.QR}{MA.QP}+\frac{MA.QP}{MC.QR}\Big) \\ &+ MR\Big(\frac{MA.RP}{MB.RQ}+\frac{MB.RQ}{MA.RP}\Big). \end{aligned}$$

Cela nous permet de passer à une deuxième minoration :
e) Observer attentivement les rapports tels que $\frac{MB.PQ}{MC.PR}$ *figurant dans une même "parenthèse", et conclure à l'inégalité :*

$$MA + MB + MC \geq 2(MP + MQ + MR).$$

Passons maintenant à la recherche des cas d'égalité, dont sont exclus, rappelons-le, les sommets A, B et C du triangle; la première chose à faire pour cela est de relire les différentes étapes de la démonstration précédente, pour se convaincre qu'au fond elle a consisté en deux minorations de la somme $MA + MB + MC$; chaque minoration résultait elle-même de l'addition "membre à membre" d'inégalités "de même sens", les unes exprimant qu'une projection orthogonale ne peut augmenter les distances, les autres que la quantité $x + \frac{1}{x}$ ne peut, pour $x > 0$, être < 2.

Question 15 :

a) A quelle condition la longueur d'un segment est-elle conservée par projection orthogonale sur une droite ?

b) Démontrer que si $MA+MB+MC = 2(MP+MQ+MR)$ *alors les conditions suivantes sont simultanément satisfaites :*

> *(C_1) : Les droites* $(PQ), (QR)$ *et* (RP) *sont, respectivement, parallèles à* $(AB), (BC)$ *et* (CA)*.*
> *(C_2) :* $\frac{PQ}{MC} = \frac{QR}{MA} = \frac{RP}{MB}$*.*

(On observera que deux au moins des trois longueurs MP, MQ, MR *sont* > 0*).*

Commençons par examiner la condition (C_1) :

Question 16 :

a) Prouver que (C_1) n'est réalisée que dans un cas : lorsque P, Q, R *sont respectivement milieux de* $[BC]$*,* $[CA]$ *et* $[AB]$*. (Pensez au théorème de* THALÈS*).*

b) En déduire le seul point M *pour lequel (C_1) est réalisée. (C'est un point très particulier lié au triangle* ABC*, et qui ne nous intéressera pour notre problème que s'il est bien intérieur à* ABC*.)*

Passons maintenant à l'examen de (C_2), à supposer que (C_1) soit déjà réalisée :

Question 17 :

a) Prouver que (C_2) ne peut être réalisée que si le triangle ABC *est équilatéral.*

b) En conclure que le seul cas d'égalité est celui où M *est le centre d'un triangle équilatéral* ABC*.*

(à suivre ...)