A VOS STYLOS

PROBLÈME 16

Enoncé

Les touches (+) , (×) , (·/·) de ma calculatrice sont hors d'usage. Comment effectuer les quatre opérations en utilisant seulement des constantes et les touches de soustraction (−) et d'inversion (1/x) ?

Solution (de Jean-Pierre MALBOS)

Etant donné que :

$$\frac{x^2}{2} = \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)^{-1} + \frac{1}{2}$$

et

$$ab = \frac{(a+b)^2}{2} - \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2}.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} ab =& [(1-2-a-b)^{-1} - (1-a-b)^{-1}]^{-1} \\ & - [(a-1)^{-1} - (a-(1-2))^{-1}]^{-1} \\ & - [c-1)^{-1} - (b-(1-2))^{-1}]^{-1} \\ & - 0,5 \end{aligned}$$

ce qui correspond à 26 opérations (soustractions et inversions) pour la multiplication.

L'addition $a + b = a - (0 - b)$ et la division $a/b = a \times (1/b)$ ne présentent pas d'autres difficultés.

PROBLÈME 17

Enoncé (proposé par O. ADELMAN)

Trouver tous les couples (a, b) de réels strictement positifs tels que, en posant

$$A = \{[na], n \in \mathbb{N}^*\} \text{ et } B = \{[nb], n \in \mathbb{N}^*\}$$

on ait $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \mathbb{N}^*$. $[x]$ est la partie entière de x.

Même question avec trois réels a, b, c tels que A, B et C forment une partition de $\mathbb{N}^*$.

Indication

a et b sont des irrationnels tels que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

PROBLÈME 18

Enoncé (proposé par Ph. ARTZNER)

Aux instants 1, 3, 5, ..., 103, on retourne successivement les 52 cartes (26 noires et 26 rouges) d'un jeu préalablement battu. On a le droit de déclarer au plus une fois, à l'un des instants 0, 2, 4, ..., 102 : "*Je parie que la prochaine carte sera rouge*". On gagne si elle l'est effectivement, on perd sinon — ou si l'on n'a choisi aucun instant. Quelle stratégie maximise la probabilité de gain?

PROBLÈME 19

Enoncé

Soit C un ensemble convexe borné, fermé du plan. Peut-on construire un parallélogramme P inclus dans C tel que l'aire de P soit supérieure ou égale à la moitié de l'aire de C?