# MATHÉMATIQUES SANS FRONTIÈRES (*)

I.P.R. & I.R.E.M. de Strasbourg

Pour la deuxième année consécutive, le concours vient de se dérouler en Alsace du Nord, en Haute Alsace et en Allemagne (dans le Palatinat), grâce à l'initiative et à la participation active de l'Inspection Pédagogique Régionale, au soutien du Rectorat de l'Académie de Strasbourg, de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM), des entreprises de la région, des collectivités locales et des professeurs de mathématiques.

C'est ainsi que près de 8000 élèves ont participé à la compétition cette année, ou plus exactement 295 classes dont 67 ont été primées lors des deux distributions des prix qui ont eu lieu les 23 et 28 mai à Haguenau et Mulhouse. 17 classes ont obtenu un prix de participation par tirage au sort.

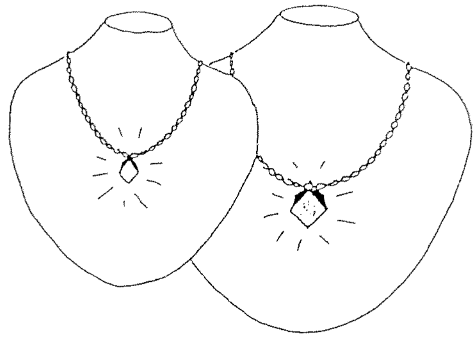
L'an prochain, le concours touchera le centre de l'Alsace (Colmar et Sélestat), des classes du Bade-Würtemberg et des classes suisses. Dans deux ans, enfin, il sera organisé à Strasbourg touchant ainsi l'Alsace dans son ensemble ainsi que les pays limitrophes : on pourra vraiment dire à ce moment-là que les frontières n'existeront plus, du moins pour les jeunes mathématiciens.

**EXERCICE 1**
**15 POINTS**

## UN TRAVAIL D'ORFEVRE

*Rédiger en allemand, espagnol ou anglais la solution de cet exercice.*

Ein Juwelier fertigt zwei Anhänger aus vergoldetem Silber an. Dazu nimmt er zwei Würfel aus reinem Silber. Der eine wiegt 8 g, der andere 27 g. Er überzieht beide mit einem gleich feinen Goldblatt.
Um den kleineren Würfel zu vergolden, braucht er 52 mg Gold. Wieviel Gold braucht er, um den größeren mit einer ebenso feinen Goldschicht zu überziehen.
Begründe das Ergebnis ! (**)



Un joyero fabrica dos pequeñas joyas de plata sobredorada. Para ello, toma dos cubos llenos de plata, uno de 8 g, otro de 27 g. Los cubre con una fina película de oro de espesor constante.
Para enchapar el más pequeño, utiliza 52 mg de oro. Calcular cuánto oro le será necesario para poner un enchapado del mismo espesor sobre el más grande. Justificar.

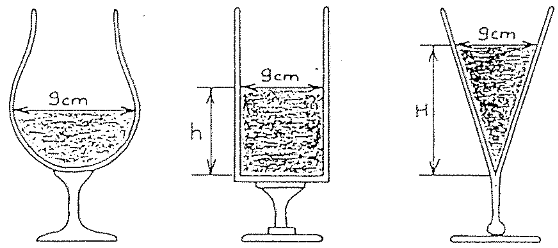
A jeweller makes two vermeil pendants. To that effect, he takes two solid silver cubes, one weighing 8 g, the other 27 g.
He covers them with a thin layer of gold of even thickness.
To plate the smallest cube, he uses 52 mg gold. Calculate how much gold he will need to put a coat of the same thickness on the biggest cube. Justify your answer.

(*) Voir également '*L'Ouvert*' n°59 de juin 1990
(**) Dans la version allemande, le texte en allemand ici est évidemment remplacé par un texte en français.

**EXERCICE 2**
**5 POINTS**

# UN VERRE ÇA VA... TROIS VERRES...

Les trois verres contiennent tous la même quantité de jus d'orange. La partie remplie du premier verre a la forme d'une demi-sphère. Le deuxième verre a la forme d'un cylindre de révolution et le troisième verre a la forme d'un cône de révolution. Dans chacun des trois verres le diamètre de la surface libre du liquide est 9 cm.
Calculer les hauteurs h et H atteintes par le liquide dans les verres n° 2 et 3.

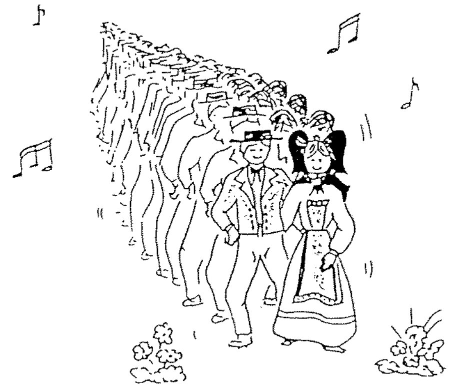



Verre n° 1 Verre n° 2 Verre n° 3

**EXERCICE 3**
**5 POINTS**

# EXERCICE FOLKLORIQUE

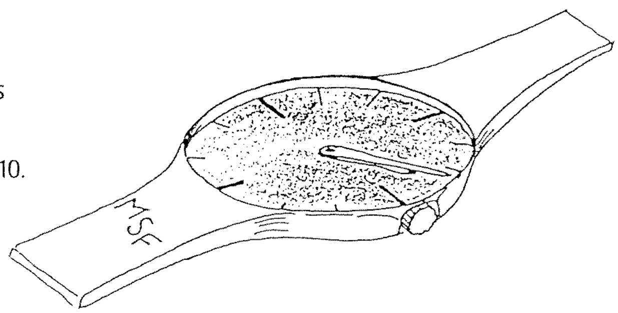
Au début d'un spectacle de danses folkloriques il y a trois fois plus de danseurs que de danseuses. Après le départ de 8 couples, il reste sur scène cinq fois plus de garçons que de filles.
Combien y avait-il de danseurs et de danseuses au début du spectacle ? On ne demande pas de justification.



**EXERCICE 4**
**15 POINTS**

# MIDI A QUATORZE HEURES

Dans combien de positions différentes les aiguilles des heures et des minutes d'une montre se superposent-elles ?
La compétition "Mathématiques Sans Frontières" vient de commencer depuis environ 10 minutes. Il est à peu près 14 h 10.
"Tiens, les deux aiguilles de ma montre sont exactement superposées, comme à midi."
Quelle heure est-il, à la seconde près ? Expliquer le calcul.



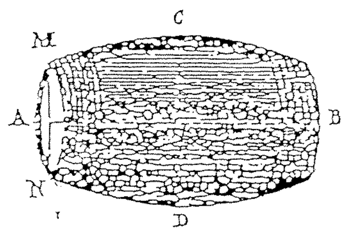

**EXERCICE 5**
**5 POINTS**

# UNE VIEILLE RECETTE

Dans un manuel édité en 1865 on lit :

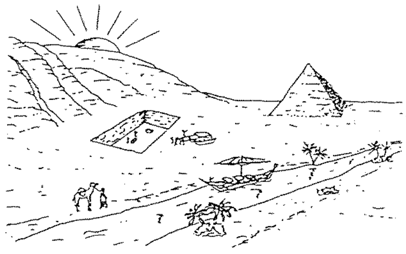
**611. Problème.** *Calculer la capacité d'un tonneau.*
On sait qu'un tonneau est une capacité formée par diverses planchettes de bois, appelées *douves*, dont les extrémités sont maintenues par des cercles de bois ou de fer et portent ce qu'on nomme les *deux fonds* du tonneau. Les douves sont plus ou moins renflées vers leur milieu ; ce renflement s'appelle le *bouge* du tonneau ; or, on nomme *diamètre du bouge* le plus grand diamètre CD, qui correspond, au milieu du tonneau, à une ouverture circulaire C, appelée la *bonde*, par laquelle le tonneau est rempli.
Cela posé, voici comment on calcule la capacité d'un tonneau : 1° *doublez le diamètre du bouge* CD, *et à ce double diamètre ajoutez le diamètre des fonds* MN ; 2° *divisez la somme obtenue par* 6 *et faites le carré du quotient* ; 3° *multipliez ce carré par le facteur* 3,1416 ; 4° *enfin, multipliez ce dernier produit par la longueur intérieure* AB *du tonneau.*

Appliquer la règle précédente pour un tonneau dont la longueur intérieure AB = 1,30 m, le diamètre du bouge CD = 0,93 m et le diamètre moyen des fonds MN = 0,78 m.
Exprimer le résultat en mètres cubes.
En déduire la contenance du tonneau à 1 litre près.



**EXERCICE 6**
**5 POINTS**

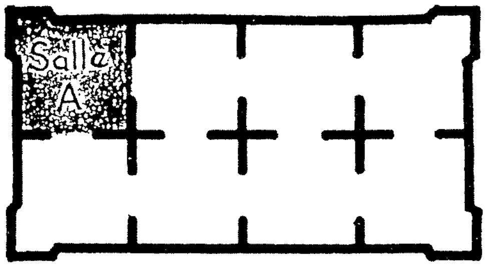
# LE SECRET DE LA PYRAMIDE



La pyramide de Khéops a une base carrée de côté 227 m et une hauteur de 138 m. Les matériaux qui remplissent complètement la pyramide ont été extraits d'une fosse.
Cette fosse a la forme d'un parallélépipède rectangle dont la base a pour dimensions 250 m et 150 m.
Quelle est la profondeur de cette fosse ?

**EXERCICE 7**
**5 POINTS**

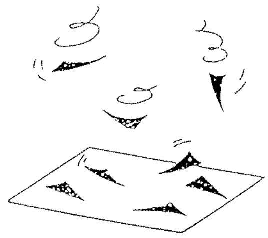
# UNE VISITE ORGANISEE




Pour visiter un musée, un touriste part de la salle A et veut passer dans chacune des salles une seule fois.
Reproduire le plan ci-contre et colorier, sans justifier, toutes les salles où le touriste peut terminer sa visite.

**EXERCICE 8**
**10 POINTS**

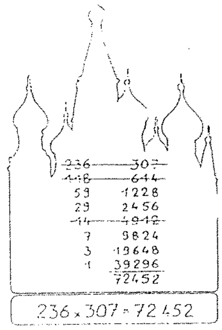
# ACCOLER ET COLLER



Découper dans du papier 20 triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit mesurent 3 cm et 6 cm.
On peut disposer ces triangles de telle manière qu'ils forment un carré. Quel est le côté de ce carré ? Justifier le calcul.
Faire le puzzle et coller le carré sur la feuille réponse.

**EXERCICE 9**
**10 POINTS**

# MULTIPLICATION A LA RUSSE

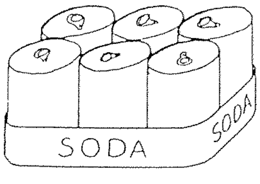


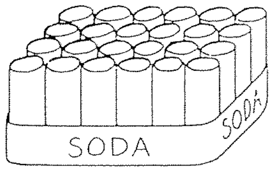

Il y a bien longtemps déjà, voici comment on calculait 236 x 307.
Disposer de la même manière la multiplication de 248 par 527.

**EXERCICE 10**
**10 POINTS**

# AU CHOIX !

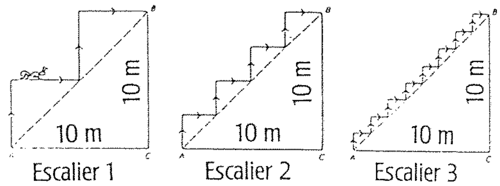
Dans un supermarché on a le choix entre deux présentations d'un même soda.
Il y a des cartons de 2 rangées de 3 boîtes cylindriques de 10 cm de diamètre, et des cartons de 4 rangées de 6 boîtes cylindriques de 5 cm de diamètre, de même hauteur que les premières.
Dans quel type de carton y a-t-il le plus de soda ? Justifier la réponse.



**EXERCICE 11**
**5 POINTS**

# L'ARTISTE ET LA FOURMI

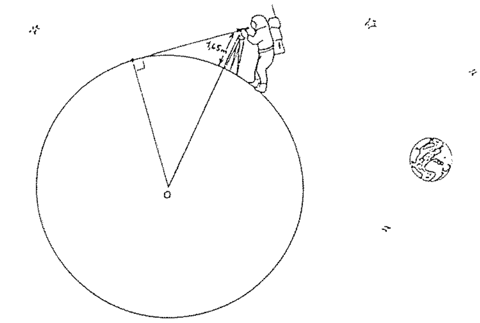



Un artiste a construit un monument composé de 10 escaliers. La conception de son œuvre est simple : pour passer d'un escalier à l'escalier suivant, il a remplacé chaque marche par deux marches de dimensions moitié comme le montrent les plans des trois premiers escaliers.

Une fourmi escalade le dixième escalier en suivant les flèches de A jusqu'à B. Quelle est la longueur du trajet parcouru ? Expliquer.

**EXERCICE 12**
**5 POINTS**

# RAYON DE LUNE

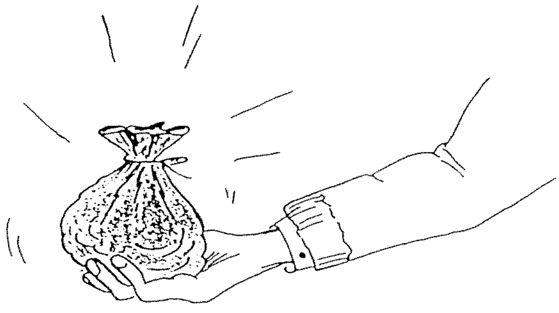


Un astronaute en mission sur la Lune a posé son vaisseau spatial dans une grande plaine, la Mer de la Tranquillité. Debout sur le sol, il mesure à l'aide d'un rayon laser la distance qui le sépare de la pierre la plus lointaine qu'il puisse apercevoir à l'horizon. Il trouve 2395 mètres.
L'instrument est posé à 1,65 m du sol.
Calculer le rayon de la Lune à 1 km près.

# SPECIAL SECONDE

**EXERCICE 13**
**5 POINTS**

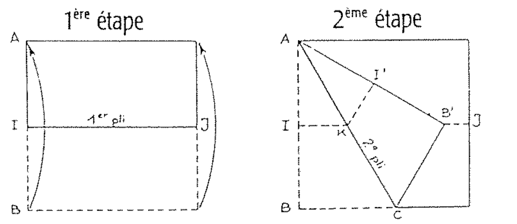
# DEVINEZ C'EST GAGNE



Jean a 82 écus dans sa bourse. Il dit à son ami Paul :
"tu peux gagner tous les écus de ma bourse, pour cela il te faudra résoudre l'énigme suivante :
Je pense un nombre entier.
Si je te donnais 5 fois ce nombre d'écus, il m'en resterait au moins 15. Si par contre, j'ajoutais 4 fois ce nombre d'écus aux 82 que je possédais au départ, j'en aurais au moins 132.
Devine ce nombre entier et la bourse est à toi."
Paul a gagné. Expliquer son raisonnement.

**EXERCICE 14**
**10 POINTS**

# MISE EN PLI



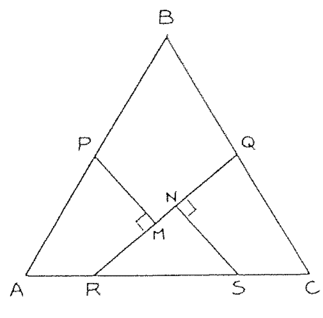
Amener B sur le segment [IJ]

Voici un programme de pliage en deux étapes.

En partant d'une feuille carrée, exécuter ce pliage puis coller le carré sur la feuille réponse.
Ce pliage fait apparaître plusieurs angles qui semblent avoir 60°. Choisir l'un d'entre eux et démontrer qu'il a bien 60°.

**EXERCICE 15**
**15 POINTS**

# VRAI FAUX CARRE




Construire un triangle équilatéral ABC de 16 cm de côté.
Marquer P et Q milieux de [AB] et de [BC].
Placer sur le segment [AC] les points R et S tels que AR = SC = 4 cm.
Tracer le segment [RQ].
Construire M et N, projections orthogonales de P et S sur (RQ).
Tracer les segments [PM] et [SN].
Le triangle ABC est alors partagé en quatre parties.
Les découper, puis les assembler de façon à former un rectangle. Le coller sur la feuille réponse.
Est-ce un carré ? Pour le savoir, calculer les dimensions du rectangle en justifiant.

Pour ne pas faire injure au lecteur nous nous contentons de donner ci-après des commentaires de corrections.

## Exercice 1 - Un travail d'orfèvre

### Partie mathématique (sur 11 points)

| Seconde | Troisième | |
|---|---|---|
| 42 classes | 61 classes | Pensent que l'aire est proportionnelle au volume |
| 4 classes | 2 classes | Trouvent la réponse exacte |
| sur 48 | sur 65 | |

### Rédaction en langue étrangère (sur 4 points)

| Seconde | Troisième | |
|---|---|---|
| 36 classes | 49 classes | Rédigent en allemand |
| 11 classes | 16 classes | Rédigent en anglais |
| 1 classe | | Rédige en espagnol |
| sur 48 | sur 65 | |

Dans l'ensemble, la rédaction en langue étrangère est assez satisfaisante. Elle a été notée indépendamment du contenu mathématique.

## Exercice 2 - Un verre ça va... trois verres...

Les formules donnant les volumes sont en général bien pratiquées; quelques fautes d'homogénéité sont constatées (confusion entre aire d'une sphère et volume d'une boule, par exemple).
Il y a deux façons d'aborder le problème :
- de façon littérale : une "simplification par $\pi$" conduit alors au résultat exact,
- l'utilisation de calculatrices et de résultats approchés.

La première méthode, plus fréquemment rencontrée en seconde qu'en troisième a été privilégiée à la correction.

## Exercice 3 - Exercice folklorique

91 % des classes de seconde et 90 % des classes de troisième donnent la réponse exacte.

## Exercice 4 - Midi à quatorze heures

Cet exercice s'est révélé difficile et sélectif, autant pour les élèves de $3^e$ que pour les élèves de 2nde, au point que la classement pour cet exercice est très voisin du classement final.

**Bilan :**

65 % des classes ont obtenu entre 0 et 2 points
7 % des classes ont obtenu entre 4 et 7 points
28 % des classes ont obtenu entre 10 et 15 points

(8 classes seulement ont obtenu le maximum de 15 points).

**Commentaires :** Les candidats n'ont pas toujours fait le lien entre la première question : "dans combien de positions différentes les aiguilles des heures et des minutes d'une montre se superposent-elles ?" et la suite de l'exercice.
La résolution s'est faite le plus fréquemment par approximations successives, en comparant les angles en degrés décrits par la petite aiguille (à partir de midi). En outre, il y a eu :
– une résolution d'équation avec pour inconnue le nombre de secondes écoulées après 14 h 10,
– une réponse par lecture graphique (angle de la petite puis de la grande aiguille $= f$ (temps),
– une réponse originale rédigée sous forme d'un dialogue plein d'humour.

### Exercice 5 - Une vieille recette

Il s'agit d'un exercice classique du type : application numérique d'une formule. Pour cet exercice, il fallait lire correctement l'énoncé et ajouter au double diamètre du bouge "**le** diamètre des fonds" : un piège où 17 classes sont tombées en ajoutant **deux** fois le diamètre des fonds.

**Bilan :**

16 % des classes ont obtenu 0 ou 1 point
16 % des classes ont obtenu 2 ou 3 points
68 % des classes ont obtenu 4 ou 5 points

(53 % ont obtenu le maximum de 5 points).

**Commentaires :**
Parmi les erreurs les plus fréquentes, en dehors de celle qui a été citée plus haut : des erreurs de calcul, des résultats mal arrondis, des erreurs d'unités ou l'absence pure et simple d'unités.

### Exercice 6 - Le secret de la pyramide

Exercice bien traité dans l'ensemble.
Les erreurs sont dues à une méconnaissance de la formule donnant le volume de la pyramide (malgré les dictionnaires). On trouve 1/2 Bh, 1/4 Bh ou Bh, ces dernières copies ne faisant pas la différence entre les formules des volumes de la pyramide parallélépipède rectangle.
Il y a aussi beaucoup d'hésitations sur la précision à donner au résultat et certaines fiches gardent tous les chiffres donnés par la calculatrice, ce qui donne la précision du micromètre !

### Exercice 7 - Une visite organisée

Une "visite" qui s'est déroulée sans accrocs : deux classes seulement sur 113 ont oublié de colorier une salle. Par ailleurs, 9 classes ont fait 4 dessins au lieu d'un seul et ont fait figurer en plus le trajet qui mène à la salle où le touriste termine sa visite.

## Exercice 8 - Accoler et coller

Exercice en général bien résolu avec plus ou moins de soin dans la réalisation du puzzle.
19 classes n'ont pas réalisé le puzzle.
6 classes affirment que la longueur du côté du carré est égale au double de l'hypoténuse sans justification.

## Exercice 9 - Multiplication à la russe

Cette multiplication, quoique d'un autre temps, n'a pas dérouté les candidats : il est vrai que la vérification en était aisée.

2 % des classes ont obtenu 0 point
11 % des classes ont obtenu entre 3 et 7 points
87 % des classes ont obtenu entre 9 et 10 points.

**Commentaires :**
Parmi les erreurs les plus fréquentes, on peut citer :
- des lignes qui manquent,
- des lignes barrées par erreur ou pas barrées du tout,
- des erreurs de calcul dans les colonnes,
- des dispositions différentes de celles qui étaient imposées.

## Exercice 10 - Au choix

Beaucoup de classes ne voient pas que l'on peut établir l'égalité entre les volumes de soda dans les deux types de cartons sans calculer de valeurs approchées et les difficultés viennent de là.
Suivant le nombre de chiffres acceptés pour les calculs approchés, on déduit l'égalité ou l'inégalité des volumes.
Dans beaucoup de copies, à l'exercice 6 comme à l'exercice 10, le mot volume est remplacé par le mot aire, bien qu'un volume soit calculé.

## Exercice 11 - L'artiste et la fourmi

La plupart des classes trouvent la réponse juste.
On rencontre trois types de raisonnements :
- la fourmi fait 10 m horizontalement et 10 m verticalement,
- à chaque escalier, le nombre de marches double mais leurs dimensions sont divisées par deux : leur longueur est donc constante,
- calcul du nombre de marches et de la dimension d'une marche du dixième escalier.

En général, lorsque les élèves perdent des points, c'est parce qu'ils :
- s'arrêtent au deuxième ou au troisième escalier,
- utilisent la troisième méthode et qu'ils donnent une valeur approchée pour la dimension d'une marche du dixième escalier,
- calculent la longueur totale des dix escaliers.

## Exercice 12 - Rayon de lune

Le théorème de Pythagore est en général utilisé.
Quelques tentatives d'utilisation de la trigonométrie sont souvent la conséquence d'une mauvaise reconnaissance de forme.
La mise en équation est en général correcte, le calcul du double produit est parfois faux : $2(a+b)$ au lieu de $2ab$.
Les résultats donnés sont parfois trop précis (tous les chiffres affichés par la calculatrice).

## Exercice 13 - Devinez c'est gagné

La seconde inéquation est plus souvent correcte que la première.
Le problème est en général bien posé. Il y a des erreurs dans la résolution du système : multiplication par un nombre négatif des deux nombres d'une inégalité sans changer son sens, addition d'inégalités membre à membre.

## Exercice 14 - Mise en pli

C'est un pliage à la fois simple et riche d'enseignements.
Les candidats ont fait preuve d'ingéniosité mais ils n'ont réussi que moyennement car les démonstrations manquaient souvent de rigueur.

**Bilan :**

| | |
|---|---|
| 12 % | des classes ont obtenu 0 ou 1 point |
| 67 % | des classes ont obtenu entre 3 et 6 points |
| 21 % | des classes ont obtenu entre 7 et 10 points |

(1 seule classe a obtenu le maximum de 10 points.)

**Commentaires :**

Parmi les solutions exactes on peut citer :
- triangle équilatéral $ABB'$ et bissectrice $(AC)$,
- triangle équilatéral $BKC$ et losange $BKB'C$,
- $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha\ldots$ (mais parfois on mesure les côtés, on calcule le cosinus, le sinus ou la tangente et on en déduit l'angle!).

D'autres solutions (fausses) sont de simples vérifications par pliage : un angle droit partagé en 3 angles de 30°...

## Exercice 15 - Vrai faux carré

Cet exercice difficile est mal réussi. Aucune classe n'obtient le maximum des points.
31 classes sur 48 ne proposent que le puzzle, quelquefois accompagné de commentaires faux.
7 classes fournissent le puzzle et le calcul d'un des côtés du rectangle.
10 classes proposent en plus une méthode de calcul du deuxième côté, mais le résultat obtenu est toujours une valeur approchée, conduisant certains à affirmer que la figure est un carré.