L'INÉGALITÉ D'ERDÖS-MORDELL
(Suite)

Patrick FUHR

4.— DEUXIÈME DÉMONSTRATION DE L'INÉGALITÉ (E.M.)

Cette démonstration s'appuyera sur une minoration des longueurs MA, MB et MC dont l'idée repose essentiellement sur des calculs d'aires : rappelons que l'aire d'un parallélogramme est égale au produit d'une quelconque de ses bases par la hauteur correspondante; il revient au même de dire que l'aire des parallélogrammes possède la propriété suivante :

"Si le segment $[CD]$ se déplace (de manière qu'on ait toujours : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$) sur une droite d parallèle à (AB), l'aire du parallélogramme $ABCD$ reste constante."

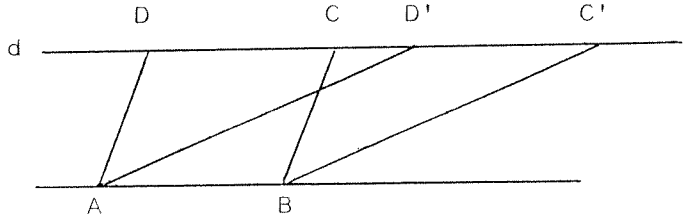


Figure 5

Aire $ABCD$ = Aire $ABC'D'$.

Ceci rappelé, commençons par préciser les notations que nous utiliserons, et qui apparaissent sur la figure 6 :

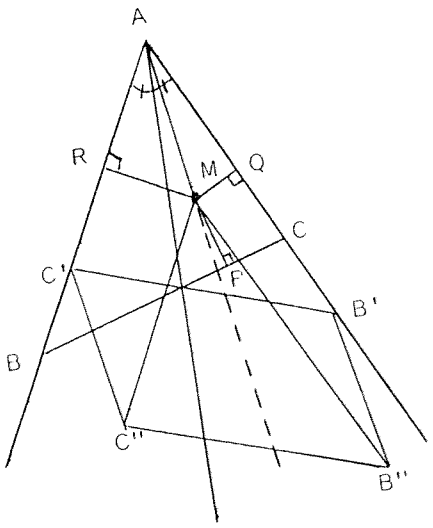


Figure 6

B' (resp. C') désigne le symétrique de B (resp. C) par rapport à la bissectrice intérieure de $\hat{A}$;

B'' et C'' sont définis par : $\overrightarrow{B'B''} = \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{C'C''}$; et, comme d'habitude, on pose :

$$a = BC \ ; \ b = CA \ ; \ c = AB.$$

L'idée de base, très astucieuse, consiste à minorer la longueur MA par la hauteur du parallélogramme $B'C'C''B''$ correspondant au choix de $[B'C']$ pour base.

© L'OUVERT 64 (1991)

Question 18 :

a) Justifier cette minoration, et exprimer la hauteur en question en fonction de l'aire du parallélogramme $B'C'C''B''$ et de la longueur a.

b) Justifier que l'aire du parallélogramme $B'C'C''B''$ est la somme des aires des parallélogrammes $AB'B''M$ et $AC'C''M$.

c) En déduire que : $MA \geq |\frac{1}{a}|(bMR + cMQ)$.

Un raisonnement similaire prouverait, bien entendu, que :

$$MB \geq \frac{1}{b}(cMP + aMR) \text{ et } MC \geq \frac{1}{c}(aMQ + bMP).$$

Question 19 :

En se souvenant du § 2, prouver que :

$$MA + MB + MC \geq 2(MP + MQ + MR).$$

Il serait dommage de quitter cette démonstration sans y ajouter deux remarques :

D'une part, quelle a été, au juste, la contribution de la symétrie par rapport à la bissectrice intérieure de $\hat{A}$? Autrement dit, n'aurait-on pas pu obtenir le même résultat en faisant jouer, dans le raisonnement, aux points B et C eux-mêmes le rôle qu'y ont tenu les points B' et C'?

Question 20 :

a) Comment aurait-il fallu redéfinir, en conséquence, les parallélogrammes considérés ?

b) Montrer qu'on serait alors parvenu à :

$$MA + MB + MC \geq a(\frac{1}{b} + \frac{1}{c})MP + b(\frac{1}{c} + \frac{1}{a})MQ + c(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})MR.$$

c) Montrer, par un exemple bien choisi, qu'il n'y a aucune raison "générale" pour que les coefficients $a(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}), \ldots,$ soient ≥ 2.

On voit donc qu'il aurait été beaucoup plus difficile de conclure sans l'intervention de cette symétrie.

D'autre part, l'idée d'introduire de tels parallélogrammes doit être rapprochée de la démonstration "*historique*", due à PAPPUS, du théorème de PYTHAGORE; les notations sont fixées par la figure 7.

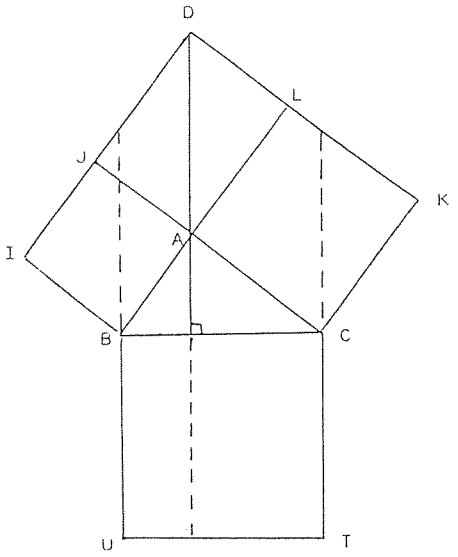


Figure 7

Question 21 :

a) Par une rotation convenable, prouver que :

$$AD = BC \text{ et } \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}.$$

b) Examiner attentivement la figure pour comprendre pourquoi : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Pour terminer ce paragraphe, passons à l'étude des "*cas d'égalité*" et pour cela, observons que la démonstration précédente se résume en deux minorations :

$$MA+MB+MC \geq (\frac{b}{c}+\frac{c}{b})MP+(\frac{c}{a}+\frac{a}{c})MQ+(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})MR \geq 2(MP+MQ+MR)\,;$$

d'autre part, comme dans le paragraphe 3, et pour les mêmes raisons, les sommets A, B, C du triangle seront écartés de la recherche des cas d'égalité (cf. question 11); par suite, deux au moins des trois longueurs MP, MQ, MR sont > 0.

Question 22 :

a) Que peut-on dire des inégalités ci-dessus, lorsque : $MA + MB + MC = 2(MP + MQ + MR)$ *?*

b) Démontrer que, si $(\frac{b}{c}+\frac{c}{b})MP+(\frac{c}{a}+\frac{a}{c})MQ+(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})MR = 2(MP+MQ+MR)$, *alors le triangle* ABC *est équilatéral.*

c) Expliquer pourquoi, s'agissant de la recherche des cas d'égalité, il suffit maintenant de comprendre à quelle condition : $MA = \frac{1}{a}(bMR + cMQ)$ *(par exemple).*

d) Reprendre le raisonnement qui avait conduit à : $MA \geq \frac{1}{a}(bMR + cMQ)$, *et prouver que l'égalité n'a lieu que lorsque* (AM) *est une hauteur du triangle* $AB'C'$.

Or, le triangle $AB'C'$ a la remarquable propriété suivante : "*Si* O *est le centre du cercle circonscrit au triangle* ABC, (AO) *est la hauteur issue de* A *du triangle* $AB'C'$" (voir figure 8 page suivante).

Admettons un instant cette propriété, pour répondre à la question suivante :

Question 23 :

a) Prouver que si l'égalité : $MA + MB + MC = (\frac{b}{c} + \frac{c}{b})MP + (\frac{c}{a} + \frac{a}{c})MQ + (\frac{a}{b} + \frac{b}{a})MR$ *a lieu, alors* M *est le centre du cercle circonscrit au triangle* ABC.

b) En conclure que le cas où ABC *est un triangle équilatéral de centre* O *est bien le seul "cas d'égalité".*

Reste donc à prouver la propriété précédente; pour cela, soit A' le projeté orthogonal de A sur (BC), et A_1 le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

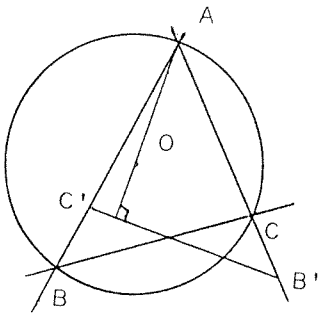


Figure 8

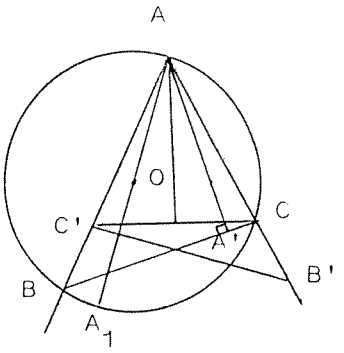


Figure 9

Question 24 :

a) Comparer, à "$k\pi$ *près", les angles de vecteurs suivants :* $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}})$; $(\widehat{\overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{BC}})$; $(\widehat{\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AC}})$.

b) En déduire que la symétrie par rapport à la bissectrice intérieure de $\hat{A}$ *échange les droites* (AA') *et* (AO), *et conclure.*

5.— TROISIÈME DÉMONSTRATION DE L'INÉGALITÉ (E.M.)

Les notations sont fixées par la figure 10 :

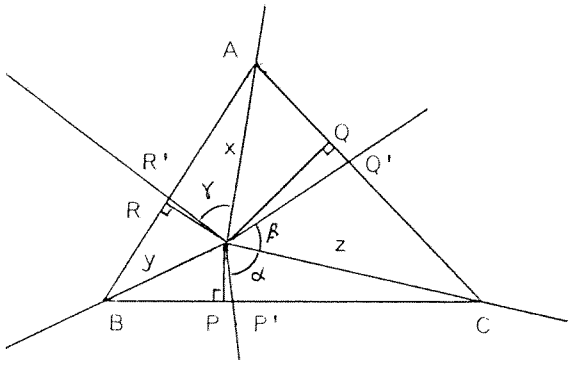


Figure 10

La bissectrice intérieure de $\widehat{BMC}$ (resp. $\widehat{CMA}, \widehat{AMB}$) recoupe (BC) (resp. $(CA),(AB)$) en P', Q', R' ; on pose :

$$\begin{array}{l} MA = x \ ; \ MB = y \ ; \ MC = z \\ MP = p \ ; \ MQ = q \ ; \ MR = r \\ MP' = p' \ ; \ MQ' = q' \ ; \ MR' = r' \end{array}$$

ainsi que

$$a = BC \ ; \ b = CA \ ; \ c = AB.$$

$\widehat{BMC} = 2\alpha$; $\widehat{CMA} = 2\beta$; $\widehat{AMB} = 2\gamma$, de sorte qu'il s'agit de prouver que : $x + y + z \geq 2(p + q + r)$.

Nous avions vu en effet au paragraphe 3 qu'on pouvait supposer M distinct des sommets A, B, C du triangle, ainsi les angles $\widehat{BMC}, \widehat{CMA}, \widehat{AMB}$ sont-ils bien définis.

Question 25 :

Montrer qu'il suffit de prouver que :

$$x + y + z \geq 2(p' + q' + r').$$

Pour cela, nous allons d'abord calculer les longueurs p', q', r' en fonction des quantités $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$; il s'agit en fait de répondre à la question un peu plus générale suivante :

Question 26 :

On donne un triangle ABC ; la bissectrice intérieure de $\hat{A}$ recoupe (BC) en X : soit à calculer la longueur AX. Nous proposons trois méthodes :

a) (1ère méthode) : Commençons par rappeler que les bissectrices (intérieure et extérieure) de $\hat{A}$ sont les axes des symétries échangeant les droites (AB) et (AC) ; soit alors B' le symétrique de B par rapport à la bissectrice extérieure de $\hat{A}$: Justifier les égalités :

$$B'B = 2c \sin \frac{\widehat{BAB'}}{2} \ ; \ AX = B'B . \frac{CA}{CB'};$$

en conclure que : $AX = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\hat{A}}{2}$.

b) (2ème méthode) : Rappelons que l'aire S d'un triangle ABC peut être donnée par : $S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$: quelle nouvelle expression de S cette formule donne-t-elle lorsqu'on divise le triangle ABC en les triangles ABX et AXC ? Retrouvez alors :

$$AX = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\hat{A}}{2}.$$

c) (3ème méthode) : Rappelons (*) que X est le barycentre de $(B,b),(C,c)$: comment s'exprime, par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{AX}$? Calculer alors le carré scalaire $\overrightarrow{AX}^2$, et retrouver

$$AX = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\hat{A}}{2}.$$

d) (Un exemple d'application) : Y et Z désignant, de même, les pieds, sur (CA) et (AB) respectivement, des bissectrices intérieures de $\hat{B}$ et $\hat{C}$, prouver que :

$$a < b < c \Longrightarrow AX > BY > CZ.$$

Cette question résolue, revenons à la démonstration entamée de l'inégalité (E.M.) ; les résultats obtenus entrainent :

$$p' + q' + r' = 2\frac{yz}{y+z}\cos\alpha + 2\frac{zx}{z+x}\cos\beta + 2\frac{xy}{x+y}\cos\gamma.$$

Le paragraphe 2 va permettre une majoration de la somme $p' + q' + r'$.

Question 27 :

Démontrer que : $p' + q' + r' \leq \sqrt{yz}\cos\alpha + \sqrt{zx}\cos\beta + \sqrt{xy}\cos\gamma$ (on n'oubliera pas de s'interroger sur le signe de $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$).

En déduire qu'il suffit désormais de prouver que : $2(\sqrt{yz}\cos\alpha + \sqrt{zx}\cos\beta + \sqrt{xy}\cos\gamma) \leq x + y + z$.

Pour cela, nous allons étudier le signe de la différence : $\mathcal{D} = x+y+z-2\sqrt{yz}\cos\alpha - 2\sqrt{zx}\cos\beta - 2\sqrt{xy}\cos\gamma$, en observant qu'elle est aussi de la forme :

$$\mathcal{D} = X^2 + Y^2 + Z^2 - 2YZ\cos\alpha - 2ZX\cos\beta - 2XY\cos\gamma;$$

(pour quel choix de X, Y, Z ?) ; cette dernière forme se prêtera bien à l'étude du signe de $\mathcal{D}$, par une méthode qui s'inspire de la mise sous forme canonique des trinômes du second degré.

Exposons cette méthode sur l'exemple suivant : soit à étudier le signe de l'expression

$E = X^2 + Y^2 + Z^2 - XY - YZ - ZX$; en écrivant :

$E = X^2 - X(Y+Z) + Y^2 + Z^2 - YZ,$

nous marquons que nous regardons E comme un "*trinôme du second degré en la variable X*", que nous allons mettre sous sa forme canonique, comme il est naturel pour en étudier le signe :

$$E = (X - \frac{Y+Z}{2})^2 - (\frac{Y+Z}{2})^2 + Y^2 + Z^2 - YZ,$$

(*) Voir une démonstration dans l'ouvrage de l'IREM de Strasbourg "*Les Maths en Pratique – Terminale CDE*", éd. Bordas, p. 126 : Ensemble des points M tels que $\frac{MA}{MB} = k$.

soit, tous calculs faits : $E = (X - \frac{Y+Z}{2})^2 + \frac{3}{4}(Y-Z)^2$, ce que le lecteur est invité à vérifier! On voit alors que l'expression E est toujours ≥ 0.

Au lecteur de faire de même, maintenant, avec l'expression $\mathcal{D}$.

Question 28 :

a) Que vaut la somme $2\alpha + 2\beta + 2\gamma$ *? En déduire que :* $\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma = \sin\beta\sin\gamma$.

b) Présenter l'expression D, regardée comme un "trinôme du second degré en la variable X", d'abord sous forme réduite et ordonnée, puis sous forme canonique; en déduire que :

$$D = (X - Y\cos\gamma - Z\cos\beta)^2 + (Y\sin\gamma - Z\sin\beta)^2.$$

c) Quel est le signe de D ? En conclure que cette démonstration de l'inégalité (E.M.) est bien achevée.

Passons à présent à l'étude des cas d'égalité; pour cela, commençons par résumer les étapes de la démonstration précédente; il s'agit en fait de trois majorations successives :

$$\begin{aligned} 2(p+q+r) \leq 2(p'+q'+r') &\leq 2(\sqrt{yz}\cos\alpha + \sqrt{zx}\cos\beta + \sqrt{xy}\cos\gamma) \\ &\leq x+y+z. \end{aligned}$$

Question 29 :

Que peut-on dire de toutes ces inégalités "larges", s'il advient que : $2(p+q+r) = x+y+z$ *?*

Cherchons donc à quelle condition $p+q+r = p'+q'+r'$.

Question 30 :

a) *Que peut-on dire d'un triangle dont une bissectrice intérieure est aussi hauteur ?*

b) En déduire que, si $p+q+r = p'+q'+r'$, *M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC (ce que nous supposerons désormais, de sorte que* $x = y = z$*).*

c) Prouver qu'alors on a aussi : $p'+q'+r' = 2(\sqrt{yz}\cos\alpha + \sqrt{zx}\cos\beta + \sqrt{xy}\cos\gamma)$. *(On relira la démonstration de l'inégalité :* $p'+q'+r' \leq 2\sqrt{yz}\cos\alpha + \sqrt{zx}\cos\beta + \sqrt{xy}\cos\gamma$.*)*

Reste donc à chercher quand : $2(\sqrt{yz}\cos\alpha + \sqrt{zx}\cos\beta + \sqrt{xy}\cos\alpha) = x+y+z$, toujours en supposant que : $x = y = z$; pour cela, relire l'étape correspondante de la démonstration de l'inégalité, et voir que l'égalité se produit lorsque l'expression notée D est nulle.

Question 31 :

a) Démontrer que si $2(\sqrt{yz}\cos\alpha+\sqrt{zx}\cos\beta+\sqrt{xy}\cos\gamma) = x+y+z$, *alors* $\beta=\gamma$.

b) En déduire que si cette même égalité a lieu, le triangle ABC *est équilatéral.*

c) En conclure que le seul cas où $x+y+z = 2(p+q+r)$ *est celui où* ABC *est équilatéral de centre* M, *résultat qui achève ce paragraphe.*

6.— ÉTUDE PARTICULIÈRE DES TRIANGLES RECTANGES ISOCÈLES

Voici comment on peut reformuler l'inégalité (E.M.) : pour tout triangle ABC, soit m la valeur minimum du rapport $\frac{MA+MB+MC}{MP+MQ+MR}$, lorsque M parcourt l'intérieur du triangle : alors $m \geq 2$; pour un triangle équilatéral, $m = 2$, valeur atteinte au centre du triangle; pour d'autres types de triangles, il se peut très bien que : $m > 2$; nous nous proposons, dans ce paragraphe, de calculer m dans le cas particulier des triangles rectangles isocèles.

Dans ce qui suit, ABC est un triangle rectangle isocèle de sommet A; on choisit, pour fixer les idées, la demi-diagonale $[BC]$ comme unité de distance; les points M dont il est question sont toujours intérieurs au triangle.

Question 32 :

Que sait-on des lignes de niveau de la fonction $M \to MP+MQ+MR$ *?*

Par suite, dans un premier temps, nous chercherons le minimum du rapport $\frac{MA+MB+MC}{MP+MQ+MR}$ lorsque M décrit un segment $[B'C']$ parallèle à $[BC]$, défini, disons, par $MP = x$;

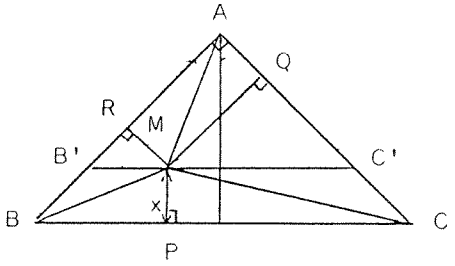


Figure 11

Il suffit donc en fait de chercher le minimum de la somme $MA+MB+MC$, lorsque M décrit $[B'C']$.

Question 33 :

a) Démontrer que cette somme est minimum lorsque M *est le milieu de* $(B'C')$ *(indication : considérer séparément* MA *et* $MB+MC$ *; pour cette dernière, penser aux symétriques de* B *et* C *par rapport à la droite* $(B'C')$*).*

b) Etablir que, si M *est le milieu du segment* $[B'C']$, $\frac{MA+MB+MC}{MP+MQ+MR} = \frac{1-x+2\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{2}(1-x)}$, *expression que nous noterons, dans la suite,* $f(x)$.

c) Entre quelles valeurs peut varier x ?

Tout revient donc, à présent, à chercher le minimum de la fonction

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \to \frac{1 - x + 2\sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{2}(1-x)}$$

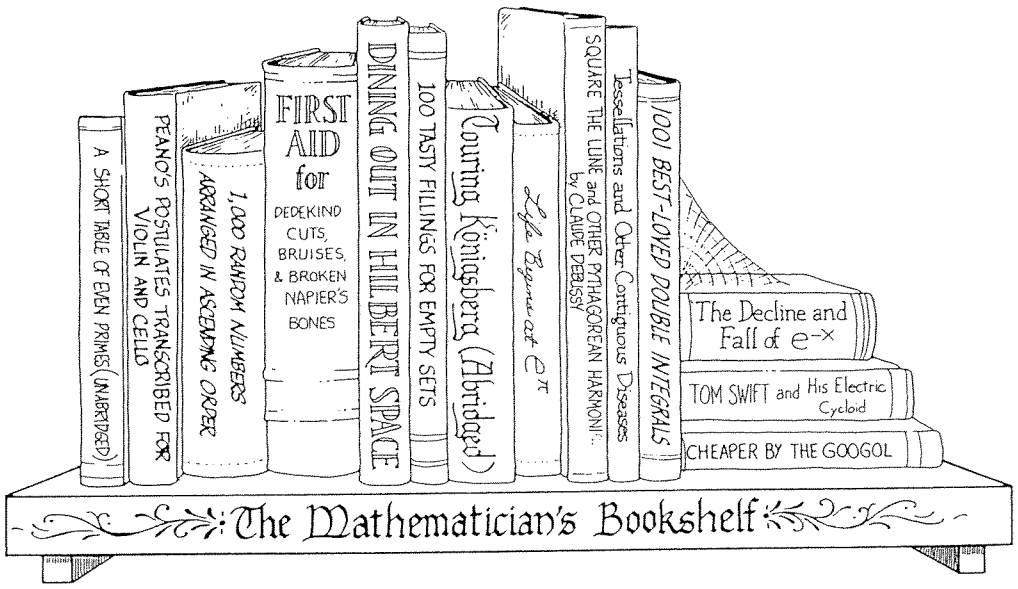
Question 34 :

a) Démontrer que, pour $x \in [0,1]$, le signe de $f'(x)$ est aussi celui de l'expression $g(x)$ définie par :

$$g(x) = 2(\sqrt{2} - 1) + 2x\sqrt{2} - \sqrt{1+x^2}.$$

b) Etudier le signe de $g(x)$, toujours pour $x \in [0,1]$. (Deux méthodes nous paraissent possibles : traiter "élémentairement" la condition $g(x) > 0$ comme une inéquation irrationnelle, ou bien étudier les variations de g sur $[0,1]$.)

c) En déduire le minimum cherché du rapport $\frac{MA+MB+MC}{MP+MQ+MR}$ (il sera rassurant, après tous ces calculs, de trouver une valeur légèrement supérieure à 2, ce qui est conforme à l'inégalité (E.M.)).



Extrait de "Mathematics and Humor"
Edité par le National Council of Teachers of Mathematics
U.S.A. (1978)