

LA GRANDE SAGA DES CALENDRIERS

Jean LEFORT

6.— LES CALENDRIERS LUNI-SOLAIRES (suite)

5) La date de Pâques

Nous avons vu que notre calendrier civil, le calendrier grégorien, est un calendrier solaire, mais que sa constitution a conservé de nombreuses traces d'un calendrier lunaire. Pour les églises chrétiennes cela est pire puisqu'une partie des fêtes religieuses dépendent de la date de Pâques qui est réglée par l'évolution de la Lune. Historiquement encore une fois – on ne bouscule pas aussi facilement des traditions – cela s'explique très bien : les jeunes églises chrétiennes ont choisi de fixer l'anniversaire de la mort et de la résurrection du CHRIST en liaison avec la Pâque juive (Pessah) puisqu'aussi bien au début les chrétiens n'étaient qu'une secte juive parmi d'autres et que le martyr du CHRIST eu lieu à ce moment. Or Pessah se célèbre le 15 Nissan, c'est-à-dire exactement 163 jours avant le 1er Tisri (ou Rosch Haschana) de l'année suivante.

Rappelons qu'au début de notre ère, ni le calendrier juif, ni le calendrier ecclésiastique chrétien n'étaient fixés. Par suite chaque pays, voire chaque communauté avait sa règle en liaison avec le calendrier civil local (romain, grec ...). C'est au concile de Nicée en 325 que fut adoptée la règle très générale : **“Pâques est le dimanche qui suit le quatorzième jour de la lune qui atteint cet âge au 21 mars ou immédiatement après”**.

Ceux de mes lecteurs qui ne se sont pas perdus dans les méandres du calendrier juif doivent comprendre le naturel (si l'on peut dire!) d'une telle règle. Les mois juifs suivant assez fidèlement la lune, le 14 Nissan au soir (début de la célébration de la Pâque) la lune a bien 14 jours. Comme le mois de Nissan commençait alors ou plus tôt vers le 8 mars, le choix du 21 mars, outre sa fonction symbolique liée à l'équinoxe de printemps, est une valeur qui n'est pas trop mauvaise.

Mais il a bien fallu établir la date de Pâques longtemps à l'avance et pour cela mettre en place une lune moyenne fictive, baptisée lune du comput. C'est encore, paraît-il, à Denys-le-Petit que l'on doit ce calcul. Il le fit évidemment pour le calendrier julien qu'il fixait par la même occasion. Quand quelques siècles plus tard on s'aperçut que le ciel ne respectait pas les décisions terrestres, ce fut la consternation parmi les représentants de DIEU sur la terre. Si le patron ne donne pas raison à la maîtrise contre les employés, c'est la révolution! Comme le patron émarge plutôt aux abonnés absents, il fut assez facile à l'Eglise de maintenir son pouvoir sur le bas-clergé et les laïcs grâce à une réforme compliquée. CLAVIUS lui-

même qui fut, comme nous l'avons vu, l'auteur de la réforme grégorienne – le Pape se contentant d'apposer sa griffe au bas des documents – CLAVIUS, reconnaît en toutes lettres que l'on aurait pu en profiter pour rendre fixe ou presque (choisir le premier dimanche d'Avril, par exemple) la date de Pâques.

De Pessah à la date de Pâques dans le calendrier grégorien, les calculs sont devenus de plus en plus compliqués comme nous allons le voir ci-après.

a. Pessah ou la Pâque juive

Dans le calendrier juif, aucun problème : c'est le 15 Nissan. Si l'on veut connaître le jour de la semaine, il vaut mieux se reporter au R.H. de l'année suivante qui a lieu 163 jours plus tard, quantité indépendante de la nature de l'année. Comme 163 est congru à 2 modulo 7, Pessah de l'année A est donnée par une règle tout à fait analogue à celle donnée pour le calcul de R.H. de l'année $A + 1$. Si le 1^{er} Tisri de l'an $A + 1$ tombe le $j^{\text{ième}}$ jour de la semaine, Pessah de l'an A tombe le $[j - 2]_7^{\text{ième}}$ jour de la semaine.

Etant donné l'usage généralisé qui est fait du calendrier grégorien, il peut être intéressant de trouver la correspondance entre le calendrier juif et le calendrier civil en usage en Europe. Actuellement le 1^{er} Tisri tombe en septembre ou en octobre, mais cela ne sera pas toujours le cas car la durée de l'année juive est en moyenne plus longue que la durée moyenne de l'année grégorienne; très exactement $365 + \frac{24311}{98496} \simeq 365,246822$ contre $365 + \frac{97}{400} \simeq 365,242500$, ce qui correspond à peu près à 6,25 minutes d'écart, écart qui va s'accumulant année après année pour donner un jour en un peu plus de 231 ans.

Construisons une formule qui donne la date du 1^{er} Tisri d'une année A juive en jour de septembre de l'année B grégorienne (ce qui veut dire que si l'on trouve que c'est le 43 septembre, cela veut dire le 43 - 30 = 13 octobre). Comme il y a un écart constant de 163 jours entre Pessah de l'année $A - 1$ et R.H. de l'année A , de même qu'il y a un écart constant de 184 jours entre le 1^{er} septembre et le 1^{er} mars de l'année B , la même formule, à l'adjonction près de 21 (c'est-à-dire 184 - 163) donnera la date du 15 Nissan de l'année $A - 1$ juive en jours de mars de l'année B grégorienne.

Pour cela reprenons la formule des Moleds et tenons compte du fait que le début de l'ère juive a commencé le dimanche 6 octobre -3760 un peu après 11 heures du matin. Par conséquent B est très voisin de $A - 3761$ (n'oublions pas qu'il n'y a pas d'année zéro dans le calendrier grégorien).

$$M_A = T + t = 347605 + \frac{392640}{492480} + (365 + \frac{121555}{492480})A + (1 + \frac{272953}{492480})[12A + 5]_{19}.$$

D'où en utilisant $B = A - 3761$

$$\begin{aligned} M_B = T + t = 347605 + \frac{392640}{492480} + (365 + \frac{121555}{492480})(B + 3761) \\ + (\frac{1 + 272953}{492480})[12B + 12] \end{aligned}$$

soit

$$M_B = 1721299 + \frac{47075}{492480} + (365 + \frac{121555}{492480})B + (1 + \frac{272953}{492480})[12B + 12]_{19}.$$

Or le 31 Août (c'est-à-dire le 0 septembre) de l'année grégorienne B est donnée par la formule adaptée de $(4 - 3 - d)$ (pour tenir compte du fait qu'il faut travailler avec le méridien de Jérusalem) :

$$G_B = [365, 25B] + 306 + 1720997 - [\frac{B}{100}] + [\frac{B}{400}].$$

On calcule alors la différence $M_B - G_B$ en fonction de B pour avoir la date de R.H. en jour de septembre

$$\begin{aligned} M_B - G_B = & -4 + \frac{47075}{492480} - \frac{1565}{492480}B + [\frac{B}{100}] - [\frac{B}{400}] + \frac{1}{4}[B]_4 \\ & + (1 + \frac{272953}{492480})[12B + 12]_{19}. \end{aligned}$$

Mais cette formule ne tient pas compte des règles de Hillel concernant le report de R.H. Nous avons vu qu'il est en général de 1 jour (règle ADOU). Mais il peut aller jusqu'à 3 jours. Du point de vue du calcul il est plus facile d'appliquer les règles de Hillel en regardant la partie fractionnaire de $M_B - G_B$ qui n'est autre que t_A ainsi que $[12B + 12]_{19}$ qui n'est autre que α et en cherchant le jour (ici $[T_A]_7$) à partir du calendrier grégorien.

C'est une formule analogue que GAUSS avait donnée aussi bien pour le calendrier julien que pour le calendrier grégorien.

Voici un exemple de calcul pour l'année 1984. $M_B - G_B = 24 + \frac{490504}{492480}$ avec $\alpha = [12B + 12]_{19} = 13$. Or, le 24 septembre 1984 est un lundi donc le 1er Tisri est le jeudi 27 (règle GATRAD) et par suite Pessah est le mardi 17 avril 1984.

b. Pâques dans le calendrier julien

C'est le *comput julien* qui fixe la date de Pâques. Comme ce comput a été adopté très tôt dans la vie de l'église, le jour bissextile y est encore fixé, comme sous les romains, au 24 février. C'est pourquoi dans le tableau ci-après appelé "*calendrier lunaire perpétuel julien*" et qui donne les dates du commencement de chaque mois lunaire pour les différentes années du cycle de Méton, on trouve en février deux dates, dont une entre parenthèse ne concerne que les années bissextiles, et cela n'a lieu que si la nouvelle lune tombe au delà du 24 février.

CALENDRIER LUNAIRE PERPÉTUEL JULIEN

NOMBRE d'or	JANVIER	FÉVRIER	MARS	AVRIL	MAI	JUIN	JUILLET	AOUT	SEPTEMBRE	OCTOBRE	NOVEMBRE	DÉCEMBRE
1	23	21	23	21	21	19	19	17	16	15	14	13
2	12	10	12	10	10	8	8	6	5	4	3	2
3	1, 31		1, 31	29	29	27	27	25	24	23	22	21
4	20	18	20	18	18	16	16	14	13	12	11	10
5	9	7	9	7	7	5	5	3	2	2, 31	30	29
6	28	26 (27)	28	26	26	24	24	22	21	20	19	18
7	17	15	17	15	15	13	13	11	10	9	8	7
8	6	4	6	5	4	3	2	1, 30	29	28	27	26
9	25	23	25	23	23	21	21	19	18	17	16	15
10	14	12	14	12	12	10	10	8	7	6	5	4
11	3	2	3	2	1, 31	29	29	27	26	25	24	23
12	22	20	22	20	20	18	18	16	15	14	13	12
13	11	9	11	9	9	7	7	5	4	3	2	1, 31
14	30	28 (29)	30	28	28	26	26	24	23	22	21	20
15	19	17	19	17	17	15	15	13	12	11	10	9
16	8	6	8	6	6	4	4	2	1	1, 30	29	28
17	27	25 (26)	27	25	25	23	23	21	20	19	18	17
18	16	14	16	14	14	12	12	10	9	8	7	6
19	5	3	5	4	3	2	1, 30	28	27	26	25	24

On a ainsi réparti 235 lunaisons en alternant sensiblement les lunaisons de 30 et 29 jours (en fait il y a 115 lunaisons de 29 jours et 120 de 30 jours si on ne tient pas compte du jour bissextile) (*). Cela veut dire que les lunaisons du comput ont en moyenne 29,530851 jours soit légèrement plus que la lunaison vraie. L'écart est de 1 h 29 min sur un cycle de 19 années et il va s'accumulant au cours du temps.

Intéressons nous au 14^{ème} jour de la lune qui se situe juste après le 21 mars. Selon le nombre d'or de l'année (c'est-à-dire son rang dans le cycle de Méton) nous obtenons les dates suivantes :

nombre d'or	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Mars ou Avril	5	25	13	2	22	10	30	18	7
en jour de Mars	36	25	44	33	22	41	30	49	38

nombre d'or	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Mars ou Avril	27	15	4	24	12	1	21	9	29	17
en jour de Mars	27	46	35	24	43	32	21	40	29	48

(*) La présence des années bissextiles fait apparaître des lunaisons de 31 jours ou une succession de 4 lunaisons de 30 jours. Des considérations sans rapport avec le mouvement de la lune, telle que : "les lunes qui finissent en janvier ont 30 jours par convention", ont imposé la répartition des mois lunaires.

LA GRANDE SAGA DES CALENDRIERS

Il n'est pas très difficile de voir que le 14^e jour de la lune est donné en jour de mars par $[19N + 26]_{30} + 21$ où N est le nombre d'or qui par convention vaut, en fonction de l'année julienne A : $[A]_{19} + 1$.

Il nous faut maintenant trouver le dimanche qui suit. La formule rencontrée en (4, 2, c), adaptée au 21 mars julien nous permet de connaître le nom de ce jours – sous forme d'un entier modulo 7 – et en ajoutant l'écart au 21 mars soit $[19N + 26]_{30}$, de connaître le nom du 14^e jour de la lune de l'équinoxe de printemps. Le complément à 6 de cette dernière valeur nous indique le nombre de jour à ajouter pour avoir un dimanche, sauf quand on obtient 0 auquel cas il faut prendre 7 (car il s'agit du dimanche qui **suit**). Pour simplifier les calculs il vaut mieux alors faire les calculs pour le 22 mars, d'où l'algorithme :

$$\begin{aligned}
 N &= 1 + [A]_{19} && \text{nombre d'or} \\
 L &= [19N + 26]_{30} && \text{écart entre le 14^e jour de la lune et le 21 mars} \\
 l &= [L]_7 \\
 j &= [[365, 25A]]_7 && \text{nom du jour du 22 mars} \\
 p &= [j + l]_7 && \text{nom du 15^e jour de la lune} \\
 P &= 22 + L + 6 - p \\
 &28 + L - p && \text{date de Pâques en jour de mars.}
 \end{aligned}$$

Par exemple en 1990 on trouve successivement $N = 15, L = 11, l = 4, j = 2, p = 6, P = 33$ soit Pâques le 2 avril julien.

Il est possible de simplifier cet algorithme, en remplaçant N par $n = N - 1$ et en prenant $l = L = [19n + 15]_{30}$.

Il est clair que les dates de Pâques reviennent selon un cycle de $19 \times 28 = 532$ ans car L ne prend que 19 valeurs distinctes et non 30. Au cours d'un tel cycle Pascal la répartition des différentes dates est données par le tableau ci-après :

dates	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	1	2	3	4	5	6	7
occurences	4	8	8	12	16	16	20	16	16	20	16	16	20	16	20	20	16

dates	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
occurences	20	16	16	20	16	16	20	16	20	16	16	20	16	12	12	8	8	4

Pour obtenir ce tableau il y a deux façons : soit calculer les dates de Pâques de 532 années consécutives, soit réfléchir à la façon dont elles sont obtenues : la date du 22 mars exige que le 22 mars soit un dimanche et que le 14^e jour de la lune tombe le 21 mars, c'est une combinaison unique; la date du 23 mars exige que le 23 mars soit un dimanche et que le 14^e jour de la lune tombe le 21 ou le 22 mars,

c'est une combinaison double; la date du 24 mars exige que le 24 mars soit un dimanche et que le 14^e jour de la lune tombe le 21, 22 ou 23 mars, mais le tableau de la page (30) montre que le 23 mars ne peut pas être obtenu, il y a donc encore une combinaison double... En étudiant les possibilités de pleine lune julienne dans les sept jours précédant une date donnée on obtient le nombre de combinaisons donnant cette date pour Pâques. Pour avoir le nombre d'occurrences il suffit de rapporter le total à 532.

c. Où l'on recommence pour faciliter la suite

Nous allons maintenant donner une autre façon d'aborder le calcul de la date de Pâques dans le calendrier julien de façon que le parallèle avec le calcul dans le calendrier grégorien soit plus facile à établir.

Nous appellerons EPACTE l'âge de la lune au 1^{er} janvier diminuée d'une unité. Ce terme d'épacte est abusif dans le calendrier julien car il y a normalement un autre sens – âge de la lune au 22 mars – mais un sens qui est tombé en désuétude. Dans le calendrier julien l'épacte est bien sûr l'âge de la lune au 31 décembre, seulement ce ne sera plus le cas dans le calendrier grégorien, c'est pourquoi nous donnons cette définition un peu alambiquée. Le tableau de la page 30 nous permet de calculer l'épacte en fonction du nombre d'or.

nombre d'or	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
épacte	8	19	0	11	22	3	14	25	6	17	28	9	20	1	12	23	4	15	26
pleine lune Pascale en jour de mars	36	25	44	33	22	41	30	49	38	27	46	35	24	43	32	21	40	29	48

On remarque que l'épacte ϵ est donné par $[11N + 27]_{30}$ et que la pleine lune pascale s'obtient par $44 - \epsilon$ en jour de mars si $\epsilon < 24$ sinon c'est $44 - (\epsilon - 30)$.

Définissons la **lettre dominicale** L de la façon suivante. Attribuons à chaque jours de l'année successivement les 7 premières lettres de l'alphabet A, B, C, D, E, F, G puis à nouveau $A, B, C, \dots$. La lettre dominicale sera la lettre attribuée au dimanche. Aucune difficulté pour une année ordinaire. Pour les années bissextiles souvenons-nous que le calendrier ecclésiastique considère que le 24 février est redoublé en le 25 qui reçoit alors la même lettre que le 24. La lettre dominicale L n'est alors pas la même pour la période du 1^{er} janvier au 24 février et pour celle du 25 février au 31 décembre. Comme Pâques se situe toujours dans cette deuxième période nous considérerons uniquement la deuxième lettre dominicale lors des années bissextiles. Pour faciliter le calcul nous remplacerons L par λ qui n'est autre que le rang de L dans l'alphabet.

On remarque que la valeur numérique λ de la lettre dominicale est donnée en

1. *Thymus*

1. *Thymus*

1. *Thymus*

1. *Thymus*

1. *Thymus*

1. *Thymus*

1. *Thymus*

1. *Thymus*

1. *Thymus*

1. *Thymus*

1. *Thymus*

1. *Thymus*

1. *Thymus*

1. *Thymus*

épacte	8	19	0	11	22	3	14	25	25	6	17	28	9	20	1
pleine lune en jour de mars	36	25	44	33	22	41	30	49	48	38	27	46	35	24	43

épacte	12	23	4	15	26	7	18	29	10	21	2	13	24	5	16	27
pleine lune en jour de mars	32	21	40	29	48	37	26	45	34	23	42	31	49	39	28	47

On retrouve le lien du calendrier julien entre l'épacte ϵ et la pleine lune pascalle qui vaut $44 - \epsilon$ en jour de mars; si $\epsilon < 24$ et $44 - (\epsilon - 30)$ si $\epsilon \geq 24$ avec cependant deux exceptions (cerclées dans le tableau ci-dessus) : si $\epsilon = 24$, il faut faire comme si elle valait 25 et si $\epsilon = \mathbf{25}$ il faut faire comme si elle valait 26.

Il nous faut maintenant expliquer comment est calculé l'épacte en fonction de l'année grégorienne. Après avoir réajusté la lune du comput avec la lune vraie en 1582 il fut décidé que

- 1) A chaque année séculaire non bissextile, on retranche un jour à l'épacte : c'est la **métemptose**.
- 2) Tous les 300 ans, quand on arrive à une année séculaire, on ajoute un jour à l'épacte : c'est la **proemptose**.
- 3) Pour plus d'exactitude (*) quand on a fait 7 fois de suite cette addition, la suivante ne se fait que 400 ans après et on recommence selon un cycle de 25 siècles pendant lequel on répartit 8 adjonctions.

Finalement à une constante près la métemptose vaut $c - [\frac{c}{4}]$ où c est le nombre de centaines de l'année et la proemptose vaut $[\frac{8c+13}{25}]$. A cause du choix de l'origine l'épacte vaut en fonction du nombre d'or N

$$\epsilon = [11N - 3 - c + [\frac{c}{4}] + [\frac{8c + 13}{25}]]_{30}$$

ou bien fonction de l'année $A = 100c + u$

$$\epsilon = [11[A]_{19} + 8 - c + [\frac{c}{4}] + [\frac{8c + 13}{25}]]_{30}$$

Le calcul de la date de Pâques se fait alors au moyen de la même formule que celle donnée dans le calendrier julien à l'alinéa c). Il faut toutefois tenir compte, dans le calcul de la lettre dominicale, des années séculaires non bissextiles. Cela se traduit par :

$$\begin{aligned} \lambda &= [2c - [\frac{c}{4}] - u - [\frac{u}{4}]]_7 + 1 \\ &= 7 - [A + [\frac{A}{4}] + [\frac{A}{400}] - [\frac{A}{100}] + 6]_7. \end{aligned}$$

Nous avons alors tous les renseignements pour calculer la date de Pâques. Il est toutefois possible d'obtenir cette date par une succession de divisions euclidiennes à partir de l'année A . C'est à J. MEUS que l'on doit cet algorithme :

(*) Ce qui est faux, mais étant donnée la date tardive d'application pour la 1^{er} fois de cette 3^e règle (4200) il n'y a pas lieu de s'en préoccuper.

LA GRANDE SAGA DES CALENDRIERS

dividende	diviseur	quotient	reste	explications
A	19		n	cycle de Méton
A	100	c	u	
c	4	s	t	siècle bissextile
c+8	25	p		proemptose
c-p+1	3	q		métemptose
19n+c-s-q+15	30		e	épacte
u	4	b	d	année bissextile
32+2t+2b-e-d	7		l	lettre dominicale
n+11e+22l	451	h		
e+l-7h+114	31	m	j	31 jours en mars

Alors,

si $m = 3$, Pâques est le $j + 1$ mars et
si $m = 4$, Pâques est le $j + 1$ avril.

Pour terminer, quelques mots sur la fréquence des différentes dates. Dans le calendrier grégorien, la date de Pâques suit un cycle, mais un cycle de ...57000 siècles soit 5,7 millions d'années!! Quels sacrés optimistes que les réformateurs de 1582 car sur une telle période les durées des années ou des lunaïsons sont très variables (*). Sur un tel cycle les fréquences de chaque date sont les mêmes, sauf pour les dates extrêmes selon ce que donne un raisonnement analogue à celui effectué pour le calendrier julien : 1 possibilité pour le 22 mars, 2 pour le 23 mars, 3 pour le 24 mars ...7 pour le 28 mars et les suivantes puis on redescend un par un pour aboutir à 1 possibilité pour le 26 avril. Cependant si un calculateur programme sa machine avec l'algorithme précédent il trouvera des fréquences qui oscillent un peu de la même façon que dans le calendrier julien, ce qui est normal car l'écart des épactes juliennes et grégoriennes est constant sur de longues périodes.

(*) La lune du comput est une lune fictive qui peut avoir plus d'un jour d'écart avec la lune réelle, ce qui peut entraîner un écart d'un mois sur la date de Pâques. Mais de plus la lunaïson grégorienne a une valeur moyenne de 29,530592 jours légèrement supérieure à la valeur actuelle. Vu la variabilité des "constantes" astronomiques il est inutile de chercher à faire mieux.