POUR UNE APPROCHE "FRÉQUENTIELLE" DES PROBABILITÉS

Abderrazzak MAA

Une des nouveautés des programmes de mathématiques, qui rentreront en vigueur à l'année scolaire 1991-92, est l'introduction des probabilités à partir de la classe de première. L'objectif essentiel restant la description d'expériences aléatoires simples et le calcul des probabilités s'y rattachant. L'introduction de la notion de probabilités doit être purement "fréquentielle" c'est-à-dire, **appuyée par l'observation** des séries statistiques associées aux expériences aléatoires considérées, toutes formalisation ou justification théoriques étant hors programme.

Bien entendu, les élèves n'auront pas vu l'analyse combinatoire auparavant, ce qui a l'air de choquer beaucoup d'enseignants trop habitués à la fameuse définition :

$$\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

La question qui se pose, est la faisabilité dans les meilleures conditions d'une introduction "fréquentielle" de la notion de probabilités ainsi que le bien fondé de l'opinion selon laquelle une telle approche didactique centrerait l'effort sur le travail de l'élève.

Des groupes de réflexion à l'échelle académique se sont constitués pour mettre en place des formations pédagogiques sur ce thème. L'objectif de ce petit exposé est d'indiquer quelques exemples d'activités, testées en classe, et qui vont prospectivement dans le sens des nouveaux programmes, dont la grande originalité est de ne pas réduire l'étude des probabilités à celle de l'équiprobabilité. La liste des énoncés testés est donnée à la suite des indications pédagogiques (*).

DÉROULEMENT DE LA LEÇON

I.— Exemple d'approche : Aiguille de BUFFON

On peut faire fabriquer les réseaux par les élèves et les impliquer eux-mêmes dans l'expérience au lieu de leur donner les résultats, dans ce cas il faudra remodeler la rédaction de l'exercice.

Deux finalités sont visées dans cet exemple :
1) la stabilité de la fréquence est la clé de la conjecture demandée;
2) dans le cas particulier $a = 2l$, on obtient $p = \frac{1}{\pi}$ et $q = 1 - p = \frac{\pi-1}{\pi}$, occasion à ne pas rater pour faire la comparaison avec l'expérience qui consiste à lancer une pièce de monnaie ($p = q = \frac{1}{2}$), en posant des questions sur les différents

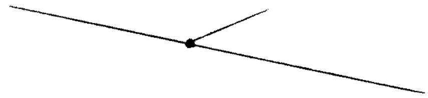
(*) N.D.L.R. : Voir en fin de l'article.

aspects recherchés dans chacune des expériences (l'endroit où la pièce tombe n'a pas d'intérêt alors que pour l'aiguille c'est tout à fait le contraire).

L'uniformité du codage 0,1 ou P,F donnera un excellent prétexte pour parler d'univers et d'éventualité élémentaire.

Mise en garde : l'aiguille peut rencontrer une droite du réseau de deux manières :

le point de rencontre n'est pas une des extrémités de l'aiguille



le point de rencontre est une extrémité de l'aiguille.

Dans ce dernier cas, les élèves peu familiarisés avec les opérations ensemblistes risquent de considérer l'intersection comme vide.

II.— Langage des événements

L'exercice 2, proposé ici, est tiré d'un manuel scolaire (Dimathème, classe de terminale D). Il offre un exemple d'expériences aléatoires assez simples pour que les élèves s'engagent dans l'activité de recherche et fournit à l'enseignant la possibilité d'utiliser plusieurs types de représentations (arbres, tableaux à double entrée) pour la visualisation des notions traitées.

Il peut être à la fois le support de l'introduction du vocabulaire des événements et l'occasion d'utiliser des relations ensemblistes telles que

$$\text{card } A \cup B = \text{card } A + \text{card } B - \text{card } A \cap B.$$

Deux remarques, néanmoins, me paraissent importantes :
1) d'entrée de jeu, la précision de la notion de risque, à savoir qu'un jeu est équitable lorsqu'on a autant de chances de gagner que de perdre;
2) à propos du troisième jeu, souligner l'importance du **choix de l'univers** dans lequel on travaille, et par conséquent la nature de la probabilité considérée dans celui-ci.

On pourra à la fin de l'exercice faire une mise au point en généralisant les définitions vues sur des exemples, à un univers $E = \{a_1, \ldots, a_n\}$; les a_i $1 \leq i \leq n$ étant les différents résultats d'une certaine expérience aléatoire.

On enchaînera ensuite avec l'exercice 3 qui est un cas particulier très facile de la "marche aléatoire" et qui réinsiste sur l'importance du choix de l'univers, redonne des exemples concrets de la notion d'événements impossibles et montre le rôle capital de l'emploi des représentations graphiques pour résoudre les problèmes (sans aucun recours à l'analyse combinatoire, bien sûr!).

Tel qu'il est posé, cet exercice est difficile d'accès. Certains élèves de Terminale à qui il a été proposé, ont répondu hâtivement que l'univers est blanc, noir. Aussi, il serait judicieux de le faire en deux temps.

a. Partie expérimentale

On invite chacun des élèves à réaliser l'expérience une dizaine de fois à l'aide de cinq morceaux de papier portant la mention "B" et cinq autres la mention "N" ; ou encore à lancer une pièce de monnaie dix fois de suite et d'observer le nombre de changements de faces. Un intérêt immédiat de cette étape, est de faire découvrir aux élèves la forme des événements élémentaires et par suite celle des événements "gagner 1 F", "gagner 2 F", etc ...

Pour les événements "gagner 0 F" ou "gagner 10 F", logiquement impossibles, les élèves n'auront pas trop de mal à réaliser qu'ils n'ont aucune chance de se produire.

A la fin de l'expérience, une mise en commun conduira à totaliser les effectifs obtenus par chacun des élèves et à dresser un tableau globalisant les résultats (l'effectif total sera relativement raisonnable : 350 pour une classe de 35 élèves, par exemple!).

Voici un exemple de résultats obtenus avec un groupe de 15 élèves de seconde au mois de juin 1991 :

gain en F	effectifs	effectifs	fréquences observées	fréquences calculées
1	2	3		
2	0 (!)	5		
3	14	29		
4	18	47		
5	29	67		
6	22	38		
7	12	22		
8	2	7		
9	1	2		
Total	100	220		

Ce tableau suggère plus d'un commentaire. En effet, les élèves avaient décidé au départ de fixer le nombre d'expériences à 100, mais la non apparition de l'événement "gagner 2 F" les a surpris au point que le groupe s'est scindé en deux après une grande discussion :
— le premier sous groupe a opté pour la poursuite des expériences,
— le deuxième a préféré chercher une réponse "théorique".

La plupart des élèves de ce deuxième groupe a rejoint le premier après avoir trouvé les éventualités qui composent l'événement "gagner 2 F".

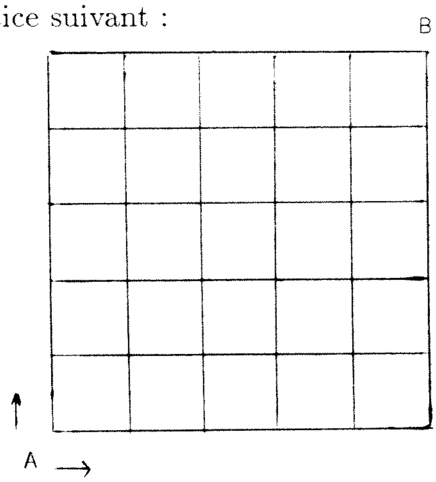
Finalement, l'ensemble du groupe (sauf deux élèves qui ont continué à chercher) est allé jusqu'à 220 expériences. Le tableau obtenu est très parlant puisqu'il donne une idée assez intéressante sur l'importance de la taille de chacun des événements et surtout sur la "symétrie" de la distribution.

A noter que les deux élèves qui n'ont pas joué le jeu de la poursuite de l'expérimentation sont arrivés à des valeurs comme 2^{10} ou 10×5^2 (il y a exactement 252 possibilités!) sans pour autant pouvoir les justifier véritablement.

b. Dénombrement des différentes possibilités

Dans cette partie, on pourra proposer aux élèves, sans donner a priori d'indication sur le lien avec la situation étudiée, l'exercice suivant :

Dénombrer tous les chemins allant de A à B, sachant qu'on ne peut se déplacer que de bas en haut et de gauche à droite.



Pour la résolution on se basera sur le principe de construction du triangle de PASCAL.

On pourra à la fin faire une petite synthèse en comparant les fréquences observées et les fréquences calculées.

III.— Modèle mathématique

Le but de l'exercice 4 (inspiré du manuel de l'IREM de Strasbourg, classe de 5^{e}(*)) est de rappeler les principales propriétés des fréquences d'une série statistique.

Rien n'empêche de demander aux élèves de se partager le travail pour dépouiller la série statistique proposée. La deuxième partie de cet exercice introduit la probabilité d'un événement élémentaire comme étant la fréquence de réalisation de celui-ci.

L'exercice 5 reprend la stabilité de la fréquence de façon intuitive et conduit à une équiprobabilité.

Définition (conforme aux programmes) : la probabilité d'un événement A de l'univers E, est la somme des probabilités de ses événements élémentaires.

Après cette définition, on pourra traiter l'exercice 6 qui est une généralisation de l'exercice 2, tel qu'il est posé s'il s'agit d'une classe d'un bon niveau, sinon on se limitera à des cas particuliers comme $n = 2$ (pièces de monnaies) $n = 5$

(*) Edition Hachette, collection Istra.

(roulette). C'est sans doute un très bon terrain d'investissement du vocabulaire et un champ de découverte des principales propriétés d'une probabilité. Comme dans la deuxième partie, une mise au point permettra de regrouper les différentes propriétés en considérant l'univers E vu précédemment.

LISTE DES ÉNONCÉS PROPOSÉS

Exercice 1.- Aiguille de BUFFON (**) (1777)

Sur un plan sont tracées des droites parallèles distantes de a. On jette au hasard sur ce plan une aiguille "mince" de longueur l, avec $l < a$. On répète cette expérience n fois et **on s'intéresse au nombre de points de rencontre de l'aiguille et du réseau de droites parallèles**.
Dans toute la suite, on prendra $a = 6$ cm et $l = 5$ cm.
1. Pour $n = 118$, voici les résultats obtenus (on code 1 si l'aiguille croise une droite, 0 si l'intersection est vide).

01011011010011010101100101110110100
11011101001100000100001001110010101
0011010110111111010110111101111001
1001000010001

Calculer la fréquence p des rencontres de l'aiguille avec l'une des droites. Calculer au dixième près, le rapport $\frac{2l}{pa}$.

2. Pour $n = 2048$, on a observé 1086 intersections non vides. Calculer au centième près, le rapport $\frac{2l}{pa}$.

3. Faire une conjecture, en supposant que l'on répète l'expérience un très grand nombre de fois.
En déduire la fréquence moyenne du nombre de points de rencontre de l'aiguille et du réseau des droites parallèles en fonction de l et de a.

4. Cas particulier : a = 2l; calculer p et 1 - p.

Exercice 2. Accepteriez-vous de jouer avec quelqu'un qui vous proposerait l'un des jeux suivants?
Premier jeu : "Je parie 5 francs, qu'en lançant un dé bien équilibré, j'obtiendrai un résultat pair".
Deuxième jeu : "Je parie 5 francs qu'en lançant deux dés bien équilibrés, j'amèrerai au moins un six".

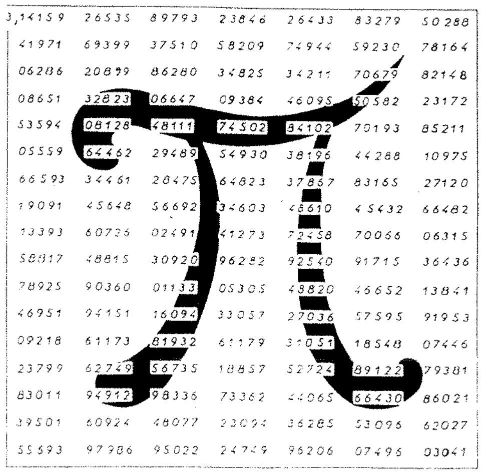
P.S. : Si vous êtes intéressé par une approche historique et si votre établissement dispose d'une salle audio-visuelle, vous pourrez vous procurer les cassettes "Chroniques du hasard I et II" au CNDP.
(**) Georges Louis LECLERC, comte de BUFFON, naturaliste français, né à Montbard (1707-1788) auteur de "L'Histoire naturelle" (44 volumes). Dans le volume VII, BUFFON aborde assez curieusement de nombreux problèmes de calcul des probabilités dont celui de l'aiguille.

Troisième jeu : "Je parie 5 francs qu'en lançant deux dés bien équilibrés, la somme des numéros sortis sera au moins égale à 7".
Quatrième jeu : "Je parie 5 francs qu'en lançant deux dés bien équilibrés, la différence entre les points marqués est 1 ou 2".

Exercice 3. Une urne contient 10 boules : 5 blanches et 5 noires. Un joueur tire ces boules les unes après les autres, en notant leur couleur à chaque tirage, et ceci jusqu'au vidage complet de l'urne.
Le joueur gagne 1 franc à chaque tirage où il tire une boule de couleur différente de la boule précédemment tirée. Sinon, il ne gagne rien.

a) Donner quelques exemples d'événements élémentaires et préciser l'univers E (ensemble des résultats) de cette expérience aléatoire. Déterminer le cardinal de l'ensemble E.
b) A-t-on des "chances" de gagner 0 F? 1 F? 2 F? 9 F? 10 F?

Exercice 4. Le tableau ci-dessous donne le nombre d'apparition des chiffres 0, 1, 2...9 pour les 500 premières décimales du nombre π.
Première partie :
a) Compléter ce tableau. Que peut-on dire des fréquences obtenues?
b) Une expérience aléatoire consiste à tirer au hasard un chiffre parmi les 500 premières décimales de π.



Chiffre	Nombre d'apparitions	Fréquences
0	45	$p_0 =$
1	59	$p_1 =$
2	53	$p_2 =$
3	50	$p_3 =$
4	54	$p_4 =$
5	50	$p_5 =$
6	48	$p_6 =$
7	36	$p_7 =$
8	53	$p_8 =$
9	52	$p_9 =$
Total		

Deuxième partie :
La probabilité de tirer le chiffre i ($0 \leq i \leq 9$) étant la fréquence p_i d'apparition de celui-ci; calculer
a) la probabilité de tirer un chiffre inférieur ou égal à 1;
b) la probabilité de tirer un chiffre pair;
c) la probabilité de tirer un chiffre impair (de deux manières).

Exercice 5
Compléter le tableau ci-contre, correspondant au premier million de décimales de π, et répondre aux questions de l'exercice précédent.

Chiffre	Nombre d'apparitions	Fréquences
0	99959	$p_0 =$
1	99758	$p_1 =$
2	100026	$p_2 =$
3	100229	$p_3 =$
4	100230	$p_4 =$
5	100359	$p_5 =$
6	99548	$p_6 =$
7	99800	$p_7 =$
8	99985	$p_8 =$
9	100106	$p_9 =$
Total		

Exercice 6 : Une urne contient n boules identiques numérotées de 1 à n. On tire successivement, avec remise, deux boules de l'urne. On désigne par x le numéro marqué sur la première boule, par y le numéro marqué sur la deuxième boule. Calculer la probabilité des événements suivants :

a)	$x = 2$	**b)**	$y = 3$
c)	$x = 2$ et $y = 3$	**d)**	$x = 2$ ou $y = 3$
e)	$x < y$	**f)**	$x > y$
g)	$x \neq y$	**h)**	$x + y \leq n$