UNE BISSECTRICE,
UNE MÉDIANE ET UNE HAUTEUR CONCOURANTES

André VIRICEL et Jean KUNTZMANN

M. A. VIRICEL, *s'adressant à M. Pierre* DANIEL, *à propos de l'article de ce dernier dans le n° 63, écrit :*

Mon cher collègue,

Votre étude de géométrie dans le n° 63 de '*L'Ouvert*' (juin 1991) m'a vivement intéressé. Je relève un premier point (le blâme ne s'adresse pas à vous) : l'exercice donné au départ (relevé dans un livre de 5ᵉ) me paraît amusant pour des gens déjà formés en géométrie mais à ne pas donner à des débutants, qui risquent d'en conclure on ne sait quoi.

Je vous informe – et mon idée n'est en rien de diminuer votre mérite – que ce problème a déjà été posé dans la revue '*Le Petit Archimède*' n° 90 de décembre 1982, par M. J. KUNTZMANN, éminent collègue de Grenoble, retraité depuis longtemps.

Les deux solutions fournies dans '*Le Petit Archimède*' et dans '*L'Ouvert*' sont d'ailleurs très différentes, et toutes deux simples et intéressantes.

Vous privilégiez comme côté fixe celui qui correspond à la médiane, alors que M. KUNTZMANN prend celui qui correspond à la hauteur.

(...)

Nous joignons ci-après une copie de l'article cité paru dans le n° 90 du 'Petit Archimède' :

DES TRIANGLES NOUVEAUX

Dans tous les triangles, les hauteurs, les médianes et les bissectrices intérieures sont concourantes.

J. KUNTZMANN pose la question et la résout : "*Existe-t-il des triangles dans lesquels la hauteur AH, la médiane BM et la bissectrice CD concourent ?*".

Il s'agit :
1.– de construire de tels triangles,
2.– de les caractériser par une relation entre les côtés et les angles,
3.– de reconnaître dans un tel triangle les différents sommets.

Solution

M étant le milieu de AC, les aires de MAB, MCB d'une part, MAK, MCK d'autre part sont égales; donc les aires de ABK et CBK le sont aussi.

$$AK \,.\, BH = BC \,.\, KH$$
$$\text{ou } \frac{KA}{KH} = \frac{BC}{BH}$$

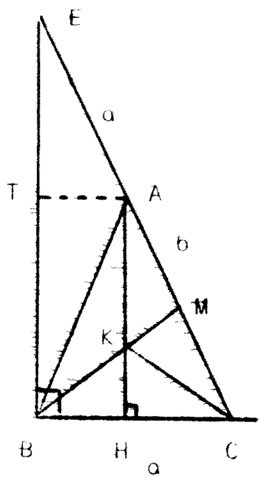
Mais le théorème de la bissectrice donne :

$$\frac{KA}{KH} = \frac{CA}{CH} \text{ donc } \frac{BC}{BH} = \frac{CA}{CH}$$
$$CH = b\cos\widehat{C}\,;\; BH = a - b\cos\widehat{C}$$
$$a\; b\cos\widehat{C} = b(a - b\cos\widehat{C})$$
$$\cos\widehat{C} = \frac{a}{a+b}.$$

Il en résulte que l'intersection E de AC avec la perpendiculaire en B à BC est telle que $CE = a + b$ donc que $AE = a$.

Construction des triangles : On se donne un triangle EBC rectangle en B, on porte $EA = BC$ sur EC. ABC est le triangle cherché.

Identification des sommets : il s'agit de reconnaître les trois droites concourantes : la hauteur AH, la médiane BM et la bissectrice issue de C.



$$\text{Si } a < b \Longrightarrow BH < HC \Longrightarrow c < b$$
$$\Longrightarrow ET < TB \Longrightarrow a < c$$

donc : $a < c < b$.

Si $a > b$, toutes les inégalités sont inversée.

$$a > c > b$$
$$a \gtrless b \Longrightarrow \widehat{C} \gtrless 60°.$$

Si on donne le côté BC fixe, quel est l'ensemble des points A ? Il s'obtient en menant $BE \perp BC$ et en prenant A sur CE tel que $EA = BC$. La courbe obtenue que l'on peut tracer par points est appelée CONCHOÏDE de la droite BE pour le point C et la longueur BC.

REMARQUE : Si on porte sur CE, $EA = BC$, mais de l'autre côté de la droite BE on obtient un triangle ABC dans lequel concourent la hauteur AH, la médiane BM et la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{C}$.

'*The American Mathematical Monthly*' propose dans son numéro d'avril 91, sous la plume de John P. HOYT (Lancaster, PA), le problème suivant.

Démontrer (ou infirmer) qu'il y a une infinité de triplets naturels (a, b, c) sans facteur commun (plus grand que 1) tel que le triangle ABC de côtés a, b, c a la propriété suivante : la médiane issue de A, la bissectrice issue de B et la hauteur issue de C sont concourantes. Des exemples de tels triplets sont (12,13,15), (35,277,308) et (26598,26447,3193).

A PROPOS DE L'ENQUÊTE

Une quarantaine de réponses nous sont parvenues dont les trois quarts émanent d'hommes. La répartition des niveaux d'enseignement traduit bien l'éventail du public visé : 25 % en collège, 40 % en lycée et 35 % en post-bac ou université. Ceci est assez logique puisque ne s'abonnent que les personnes qui trouvent un intérêt dans les articles qui paraissent.

'*L'Ouvert*' est un outil de travail puisque près de 90 % des lecteurs conservent les numéros pour pouvoir en effectuer une lecture tranquillement et se reporter à certaines articles en cas de besoin.

En ce qui concerne la nature des textes publiés, l'histoire des mathématiques est plebiscitée (90 %) ainsi que les informations sur les publications (qui ne sont sans doute pas assez développées dans la structure actuelle de '*L'Ouvert*'). Par ailleurs, les articles précis sur un sujet limité sont largement préférés aux articles de synthèse (80 contre 55 %). La rubrique de problèmes est également fort appréciée (80 %). Par contre, la didactique marque un peu le pas, les lecteurs penchant plutôt pour des propositions d'activités (50 %).

Le point de vue suivant d'une lectrice (M. BENOIS) résume bien l'objectif de '*L'Ouvert*' : (...)"*j'apprécie très souvent la lecture de 'L'Ouvert' . Je pense que les tendances des articles peuvent intéresser les professeurs de lycée, les professeurs de DEUG et les enseignants intéressés par les aspects moins scolaires des mathématiques. 'L'Ouvert' me semble avoir une politique dans ce domaine bien à lui et qu'on ne retrouve pas dans d'autres revues IREM. Les articles plus proches d'une pratique pédagogique ont un public beaucoup plus large mais il y a déjà de nombreuses publications dans ce domaine*" (...)